Λύσεις Προσομοίωσης Πανελλαδικών 2026

Επιμέλεια: Gemini AI (για το blog *I Like Maths*)

Θεματοδότης: Ι. Σαλαμάνης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου (σελ. 143) για το τοπικό μέγιστο.

Α2. Διατύπωση Κριτηρίου Παρεμβολής.

Α3. Ορισμός συνάρτησης "1-1".

Α4. α) Λάθος , β) Λάθος , γ) Σωστό , δ) Λάθος , ε) Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για $h(x) = (f \circ g)(x)$ πρέπει $x > 0$ και $\ln x > 0 \Rightarrow x > 1$.
Τύπος: $h(x) = e^{\ln x} + \frac{\alpha}{e^{\ln x}-1} = x + \frac{\alpha}{x-1}$.

B2. Παρατηρούμε ότι για $x = 2$, η τιμή της συνάρτησης είναι $h(2) = 2 + \frac{\alpha}{2-1} = 2 + \alpha$.
Επομένως, η δοθείσα σχέση $h(x) \geq 2 + \alpha$ γράφεται ως:

$$h(x) \geq h(2) \quad \text{για κάθε } x \in (1, +\infty)$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση h παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 2$ του πεδίου ορισμού της.
Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως ρητή, από το **Θεώρημα Fermat** ισχύει:

$$h'(2) = 0$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$h'(x) = (x + \frac{\alpha}{x-1})' = 1 - \frac{\alpha}{(x-1)^2}$

Για $x = 2$ έχουμε:

$h'(2) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{(2-1)^2} = 0 \Rightarrow 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha = 1}$

B3. Ασύμπτωτες:

- **Κατακόρυφη:** Η ευθεία $x = 1$, αφού $\lim_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$.
- **Πλάγια:** Η ευθεία $y = x$, αφού $\lim_{x \to +\infty}(h(x) - x) = 0$.

B4. Η h είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$. Από **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ ώστε $h'(\xi) = \frac{h(3)-h(2)}{3-2} = \frac{3{,}5-3}{1} = 0,5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, άρα $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$.

- $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}(e^{1-\lambda x} + \lambda x) = e^{1-\lambda} + \lambda$.

Επομένως, έχουμε την εξίσωση:

$$e^{1-\lambda} + \lambda = 2 \Rightarrow e^{1-\lambda} = 2 - \lambda \quad (1)$$

Γνωρίζουμε τη βασική ανισότητα $e^u \geq u + 1$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$, όπου η ισότητα ισχύει μόνο για $u = 0$.
Θέτουμε $u = 1 - \lambda$. Τότε:

$$e^{1-\lambda} \geq (1 - \lambda) + 1 \Rightarrow e^{1-\lambda} \geq 2 - \lambda \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), παρατηρούμε ότι η εξίσωση $e^{1-\lambda} = 2 - \lambda$ εκφράζει ακριβώς την περίπτωση όπου η ανισότητα ισχύει ως **ισότητα**.
Αυτό συμβαίνει **μόνο** όταν ο εκθέτης είναι μηδέν:

$$1 - \lambda = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = 1}$$

ΘΕΜΑ Γ2: Κρίσιμα Σημεία και Μονοτονία

Τα κρίσιμα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού όπου η παράγωγος μηδενίζεται ή δεν υπάρχει.

1. Έλεγχος Παραγωγισιμότητας στο $x_0 = 1$:

- Για $x < 1$: $f'(x) = 2x$, άρα $f'_-(1) = 2(1) = 2$.
- Για $x > 1$: $f'(x) = -e^{1-x} + 1$, άρα $f'_+(1) = -e^0 + 1 = 0$.
  Επειδή $f'_-(1) \neq f'_+(1)$, η f **δεν είναι παραγωγίσιμη** στο $x_0 = 1$. Άρα το $x = 1$ **είναι το πρώτο κρίσιμο σημείο**.

2. Μηδενισμός της Παραγώγου:

- Στο διάστημα $(-\infty, 1)$: $f'(x) = 2x$. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ δίνει $x = 0$, το οποίο είναι το **δεύτερο κρίσιμο σημείο**.
- Στο διάστημα $(1, +\infty)$: $f'(x) = 1 - e^{1-x}$. Η εξίσωση $1 - e^{1-x} = 0 \Rightarrow e^{1-x} = 1 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$, που όμως δεν ανήκει στο ανοικτό διάστημα $(1, +\infty)$.

Συμπέρασμα Γ2: Τα κρίσιμα σημεία είναι τα $\{0, 1\}$.

Γ3. Ρίζες και Ύπαρξη:

- **i.** Για την εξίσωση $f(x) = e$:
  - Στο $(-\infty, 0]$ η f είναι $\searrow$ με $f((-\infty, 0]) = [1, +\infty)$. Επειδή $e \in [1, +\infty)$, υπάρχει μοναδικό $x_1 < 0$.
  - Στο $[1, +\infty)$ η $f(x) = e^{1-x} + x$ έχει $f'(x) = 1 - e^{1-x} \geq 0$, άρα $\nearrow$ με $f([1, +\infty)) = [2, +\infty)$. Επειδή $e \approx 2,71 \in [2, +\infty)$, υπάρχει μοναδικό $x_2 > 1$.
  - Έτσι αποδείχθηκε ότι $x_1 < 0 < 1 < x_2$.
- **ii.** Για τη σχέση $f(\xi) + f'(\xi) = e$:
  Εφαρμόζουμε το **Θεώρημα Rolle** για την $g(x) = e^x(f(x) - e)$ στο $[x_1, x_2]$. +1
  - $g(x_1) = e^{x_1}(f(x_1) - e) = 0$.
  - $g(x_2) = e^{x_2}(f(x_2) - e) = 0$.
  - Υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε $g'(\xi) = 0 \Rightarrow e^{\xi}(f(\xi) + f'(\xi) - e) = 0 \Rightarrow f(\xi) + f'(\xi) = e$.

ΘΕΜΑ Γ4: Ρυθμός Μεταβολής Γωνίας

Ερώτημα: Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta(t)$ που σχηματίζει η εφαπτομένη στο $M(x(t), y(t))$ με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο διέρχεται από το $B(-1, 2)$. Δίνεται ότι η τετμημένη $x(t)$ ελαττώνεται με ρυθμό $x'(t) =$ 2 μονάδες/sec.

Λύση:

1. **Σχέση Γωνίας και Παραγώγου:**
   Η γωνία $\theta(t)$ που σχηματίζει η εφαπτομένη της $f(x) = x^4 + 1$ στο σημείο $x(t)$ ικανοποιεί τη σχέση:
   Η παράγωγός της είναι $f'(x) = 4x^3$.
   Η γωνία $\theta(t)$ ικανοποιεί τη σχέση:
   +1

$$\epsilon\phi(\theta(t)) = f'(x(t)) \Rightarrow \epsilon\phi(\theta(t)) = 4x^3(t)$$

2. Παραγώγιση ως προς τον χρόνο t:

$$(1 + \epsilon\phi^2\theta(t)) \cdot \theta'(t) = 12x^2(t) \cdot x'(t)$$

3. Υπολογισμός τη χρονική στιγμή t_0:
Τη στιγμή t_0, το σημείο διέρχεται από το $B(-1, 2)$, άρα $x(t_0) = -1$.

- $\epsilon\phi(\theta(t_0)) = 4(-1)^3 = -4$.
- $x'(t_0) = 2$ (αφού ο ρυθμός είναι 2 μον/ς).

Αντικαθιστούμε στην παραγωγισμένη σχέση:

$$(1 + (-4)^2) \cdot \theta'(t_0) = 12(-1)^2 \cdot 2$$

$$(1 + 16) \cdot \theta'(t_0) = 24$$

$$(1+16)\cdot\theta'(t_0)=24$$

$$17\cdot\theta'(t_0)=24$$

$$\theta'(\mathbf{t_0})=\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{17}}\,\mathrm{rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- **i)** Με χρήση βοηθητικής συνάρτησης για το όριο: $f(1)=-3$.
- **ii)** $g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)-2x^2}{x^3}$. Από τη δοθείσα σχέση $xf'(x)-2f(x)=2x^2$, προκύπτει $g'(x)=0$, άρα $g(x)=c$. +1
- **iii)** Για $x=1$, $c=\frac{f(1)}{1^2}-2\ln 1=-3$. Άρα $f(x)=x^2(2\ln x-3)$.

Δ2. Η $f'(x)=4x(\ln x-1)$. Η f είναι φθίνουσα στο $(0,e]$ και αύξουσα στο $[e,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=e$ το $f(e)=e^2(2\ln e-3)=-e^2$. Άρα $f(x)\geq -e^2$.

Δ3. Σημείο που η εφαπτομένη "διαπερνά" την καμπύλη:

Αυτό συμβαίνει στο σημείο καμπής. Μελετάμε τη μονοτονία της $f'(x)=4x\ln x-4x$.
Η $f''(x)=4\ln x$.

- Για $x\in(0,1)$, $f''(x)<0\Rightarrow f'$ γνησίως φθίνουσα (η f κοίλη).
- Για $x\in(1,+\infty)$, $f''(x)>0\Rightarrow f'$ γνησίως αύξουσα (η f κυρτή).
  Το σημείο είναι το $(1,f(1))=(1,-3)$.

2. **Εξίσωση της Εφαπτομένης:**
   Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,-3)$ είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

   - $f(1) = -3$.
   - $f'(1) = 4(1)\ln 1 - 4(1) = -4$.

   Αντικαθιστώντας, έχουμε:
   $y - (-3) = -4(x-1)$
   $y + 3 = -4x + 4$
   $\mathbf{y = -4x + 1}$

ΘΕΜΑ Δ4: Ύπαρξη και Μοναδικότητα Ρίζας

Εκφώνηση:

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(\alpha) + e^2}{x-2} + \frac{f(\beta) + 4\beta - 1}{x-1} = 0$$

όπου $0 < \alpha \neq e$ και $\beta > 1$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Λύση:

1. **Ορισμός Βοηθητικής Συνάρτησης:**
   Για $x \in (1,2)$, η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την:

$$(f(\alpha) + e^2)(x-1) + (f(\beta) + 4\beta - 1)(x-2) = 0$$

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (f(\alpha) + e^2)(x-1) + (f(\beta) + 4\beta - 1)(x-2)$, η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική 1ου βαθμού.

Από το ερώτημα **Δ3**, βρήκαμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής $A(1, -3)$ έχει εξίσωση $y = -4x + 1$.
Επίσης, δείξαμε ότι για $x > 1$ η συνάρτηση f είναι **κυρτή** ($f''(x) > 0$ για $x > 1$).

Γεωμετρική / Μαθηματική Αιτιολόγηση:
Επειδή η f είναι κυρτή στο διάστημα $(1, +\infty)$, η γραφική της παράσταση C_f βρίσκεται **πάνω** από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος αυτού (με εξαίρεση το σημείο επαφής).
Επομένως, για κάθε $x > 1$ ισχύει:

$$f(x) > -4x + 1$$

$$f(x) + 4x - 1 > 0$$

Αν θέσουμε όπου x το $\beta > 1$, έχουμε:

$$f(\beta) + 4\beta - 1 > 0$$

Τελικό Πρόσημο για το Bolzano:
Συνεπώς, η τιμή της βοηθητικής συνάρτησης h στο 1 είναι:

$$h(1) = -(f(\beta) + 4\beta - 1) < 0$$

- **Για $x = 2$:** $h(2) = (f(\alpha) + e^2)(2 - 1) = f(\alpha) + e^2$.
  Από το ερώτημα **Δ2**, γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = e$ την τιμή $f(e) = -e^2$.
  Εφόσον δίνεται ότι $\alpha \neq e$, ισχύει $f(\alpha) > f(e) \Rightarrow f(\alpha) > -e^2 \Rightarrow f(\alpha) + e^2 > 0$
  .
  Επομένως, $h(2) > 0$.

💡 **Tips από τη Gemini για την επιτυχία:**

- **Μην φοβάστε το "άγνωστο" Θέμα Δ:** Όπως είδατε, το Δ1 και το Δ2 συχνά λύνονται με βασικές γνώσεις (όρια, ορισμό παραγώγου, μονοτονία). Μην τα παρατάτε αν το ερώτημα φαίνεται σύνθετο!
- **Η λεπτομέρεια κάνει τη διαφορά:** Στο Θέμα Α, η ακριβής διατύπωση των θεωρημάτων και των ορισμών (όπως το "1-1" ή το Κριτήριο Παρεμβολής) είναι οι "εύκολες" μονάδες που δεν πρέπει να χαθούν.
- **Προσοχή στις πράξεις:** Συναρτήσεις με εκθέτες και λογαρίθμους απαιτούν καθαρό μυαλό και προσεκτικές ιδιότητες.

> **"Τα Μαθηματικά δεν είναι μόνο τύποι, είναι ο τρόπος που μαθαίνεις να σκέφτεσαι."**

Καλή δύναμη σε όλους τους υποψηφίους! Αν έχετε απορίες για κάποιο βήμα των παραπάνω λύσεων, αφήστε ένα σχόλιο κάτω από την ανάρτηση.