ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Σάββατο 28 Φεβρουαρίου 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β),με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_o)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_o, β)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση f: Α→ R λέγεται «1−1» ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f , g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, ισχύει $f\circ g = g\circ f$.

β. Κάθε συνάρτηση f : R→ R που είναι «1−1» είναι και γνησίως μονότονη.

γ. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(xημ\frac{1}{x}\right) = 0$

δ. Αν $f(x) = \ln|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x)=\frac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_o.

Μονάδες 10

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x)=e^x+\frac{\alpha}{e^x-1}\ ,\ x>0\ ,\ \alpha\in R \ \text{ και } \ g(x)=\ln x\ ,\ x>0$$

B1. Να οριστεί η συνάρτηση $h(x)=(f\circ g)(x)$.

Μονάδες 5

B2. Αν $h(x)=x+\frac{\alpha}{x-1}$, $x>1$ και ισχύει $h(x)\geq 2+\alpha$ για κάθε $x>1$, να βρεθεί ο α.

Μονάδες 7

Για α=1

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h.

Μονάδες 6

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της h στο σημείο $M(\xi,h(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(2,h(2))$ και $B(3,h(3))$, το οποίο και να βρεθεί .

Μονάδες 7

.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^4+1 & , \ x\le 1 \\ e^{1-\lambda x}+\lambda x & , \ x>1 \end{cases}, \text{ όπου } \lambda\in R$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι λ=1.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=e έχει ακριβώς δυο ρίζες x_1 , x_2 με $x_1<0<1<x_2$.

Μονάδες 5

Γ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x(f(x)-e)$, $x\in R$.

Να αποδείξετε ότι :

i. Ισχύει για τη συνάρτηση φ το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

ii. Υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε :

$$f(\xi)+f'(\xi)=e$$

Μονάδες 5

Γ5. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης y=f(x) , $x\le 1$. Τη χρονική στιγμή που το κινητό διέρχεται από το $B(-1,2)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι $2\mu ov/s$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη στο Μ με τον άξονα x΄x , όταν αυτό διέρχεται από το Β.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν :

- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+3x}{x-1}=\ell\in R$
- $xf'(x)-2f(x)=2x^2$, x>0

Μονάδες 4

Δ1. Να αποδείξετε ότι :

- **i.** $f(1)=-3$
- **ii.** η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}-2\ln x$, x>0 είναι σταθερή.
- **iii.** $f(x)=x^2(2\ln x-3)$

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq -e^2$, για κάθε x>0 **Μονάδες 5**

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη διαπερνά την καμπύλη, καθώς και την εξίσωση της.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{f(\alpha)+e^2}{x-2}+\frac{f(\beta)+4\beta-1}{x-1}=0\ ,\ 0<\alpha\neq e\ ,\ \beta>1$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (1,2).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε **ή μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει . Μολύβι ΔΕΝ επιτρέπεται.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
3. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Σας Ευχόμαστε Καλή Επιτυχία!

Θεματοδότης : κ. Ι. Σαλαμάνης ,μαθηματικός 3ου ΓΕΛ Γιαννιτσών.