Διαγώνισμα Μαθηματικών-2-

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Ν.ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ - Ν. ΣΟΥΡΜΠΗΣ

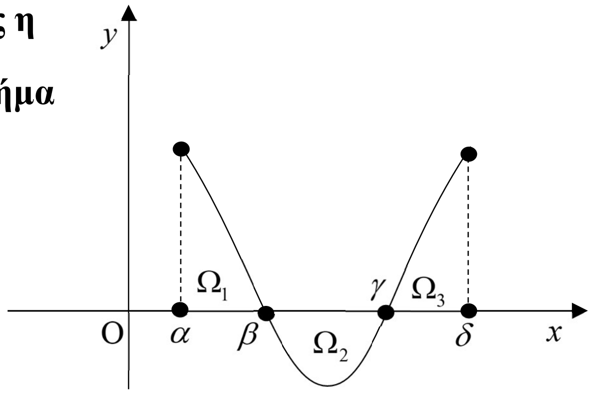
30/04/2026 Γ' λυκείου

ΘΕΜΑ Α

Α1) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 **ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο** x_0 **και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό , να αποδειχθεί ότι ισχύει :** $f'(x_0)=0$

Α2) Πότε μια συνάρτηση f **λέγεται παραγωγίσιμη στο διάστημα** $[\alpha,\beta]$ **του πεδίου ορισμού της ;**

Α3) Έστω η συνεχής συνάρτηση f **της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα**



Αν $E(\Omega_1)=2,\ E(\Omega_2)=1$ **και** $E(\Omega_3)=3$

τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)\,dx$ **είναι ίσο με**

Α) 6 **Β)** -4 **Γ)** 4

Δ) 0 **Ε)** 2

Α4) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

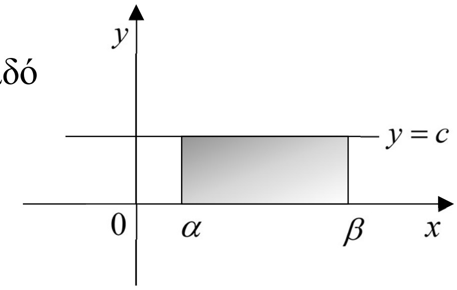
1) Αν για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in\mathbb{R}$,

$(x_0\in\mathbb{R})$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

2) Αν η πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε $f'(x_0)=0$.

3) Αν η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο (α,γ) είναι κυρτή στο (α,β) και κοίλη στο (β,γ) τότε το σημείο $(\beta, f(\beta))$ είναι πάντοτε σημείο καμπής της C_f.

4) Αν $c>0$, $\alpha<\beta$ τότε το $\int_\alpha^\beta c\,dx$ εκφράζει το εμβαδό ενός ορθογωνίου με βάση $\beta-\alpha$ και ύψος c.



5) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ, τότε τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}$ **με** $A_f=\mathbb{R}-\{\alpha\}$ **και** $\beta>\alpha>0$

Β1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$.

Β2) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτηση f

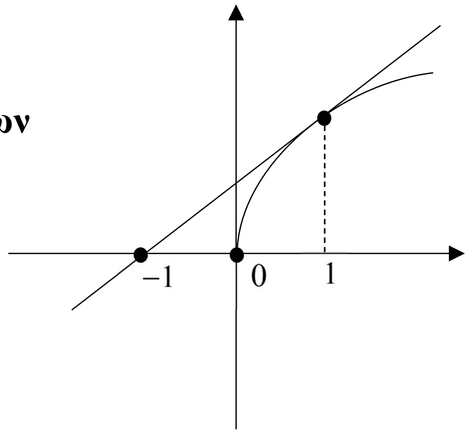
Β3) Να δείξετε ότι $x+(fofof)(x)>\eta\mu x+\eta\mu f^{-1}(x)$ για κάθε $x>\alpha$.

Β4) Να βρείτε το β αν το εμβαδόν χωρίου ανάμεσα στη C_f, την οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=\alpha+1$, $x=\alpha+2$ ισούται με $(\alpha^2+1+\ln\beta)\ln 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$**, συνεχής στο** $D=[0,+\infty)$ **και παραγωγίσιμη στο** $(0,+\infty)$ **, με** $2f(x)f'(x)=1$

για $x>0$ **και** $f(1)=1$**. Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων** f **και** g**, με** $g(x)=e^{-x}$ **έχουν κοινό σημείο** $\mathrm{M}(x_0,f(x_0))$



Γ1)Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x},\ x\in D$.

Γ2) Να δείξετε ότι η ευθεία ΑΒ, όπου $\mathrm{A}(1,1),\mathrm{B}(-1,0)$ εφάπτεται με την C_f.

Γ3)Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln f(x)}{\left(xe^{2x}-1\right)^2}$.

Γ4)Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ των C_f, ΑΒ*και* $x'x$ ισούται με $\frac{1}{3}$ τ.μ.

και να βρείτε ευθεία $x=\alpha$ με $\alpha\in(-1,0)$ που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

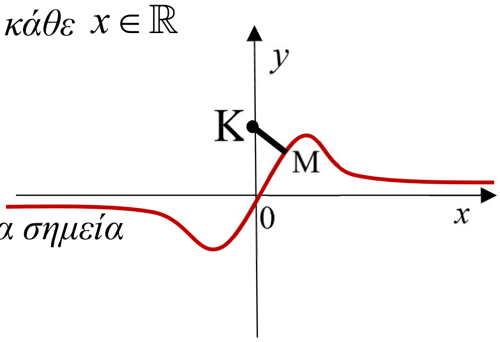
ΘΕΜΑ Δ

Έστω f ***συνεχής στο*** $\mathbb{R}$ ***με*** $\left(\frac{f(t)}{t}\right)^x + \left(t^2+3\right)^x \geq 2$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ***και*** $t \neq 0$

Δ1 *) Αν* $\alpha, \beta > 0$ *και ισχύει ότι* $\alpha^x + \beta^x \geq 2$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$

να δείξετε ότι $\alpha\beta = 1$ *και* $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$, $A = \mathbb{R}$



Δ2) *Να βρείτε ακρότατα της* f *και να δείξετε ότι τα σημεία καμπής της* C_f *είναι συνευθειακά*

Δ3) *Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση* $x = \pi - u$ *να δείξετε ότι*

$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)\,dx$ *και να υπολογίσετε το* $\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}\,dx$

Δ4) Αν F αρχική της $f(x^2)$ να δείξετε ότι $\left|F(\beta) - F(\alpha)\right| \leq \left|\beta - \alpha\right|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(F\left(\sqrt{x^2+1}\right) - F(x)\right)$.