



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ : Ν. ΖΑΝΤΑΡΙΔΗΣ - Ν. ΣΟΥΡΜΠΗΣ

23/5/26

Διαγώνισμα Μαθηματικών -3-

ΘΕΜΑ Α

A1) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η ανάμεσα στους $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

A2)α) Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής στη θέση x_0 του πεδίου ορισμού της;

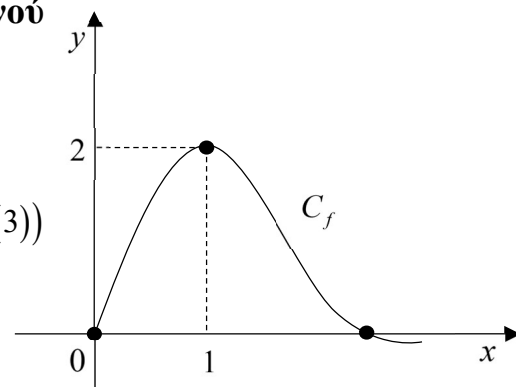
β) Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, ($\lambda, \beta \in \mathbb{R}$), είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$;

A3) Η συνάρτηση F είναι αρχική της f του διπλανού σχήματος. Τότε η F έχει σημείο καμπής το

α) $O(0, F(0))$

β) $A(1, F(1))$

γ) $B(3, F(3))$



A4) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ);

α) Αν για τη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού

μηδέν, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

β) Η γραφική παράσταση μιας «1-1» συνάρτησης τέμνει κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν μια , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ τότε πάντα ισχύει $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $A = \mathbb{R} - \{0\}$

και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$,τότε η f είναι σταθερή

στο $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

ε) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2)}{x \eta \mu x} = +\infty$

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x - \frac{1}{x - \beta}$ με πεδίο ορισμού

$A = (0, +\infty)$ που έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = x$ και $x = 0$

και την συνάρτηση $g(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$

B1) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$

B2) Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση

B3) i) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης g και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση

B4) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = f(t)$

να βρείτε το $\int_0^{f(2)} g(x) dx$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το

$A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x \in A$$

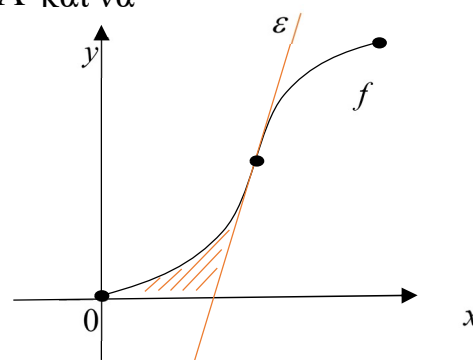
και $\int_0^{\pi} (f''(x) + f(x)) \eta\mu x dx = f(\pi)$

Γ1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta\mu^2 x$ είναι σταθερή στο A και ότι $f(x) = \eta\mu^2 x, x \in A$

Γ2) Να δείξετε ότι $f''(x) + 4f(x) = 2$ για κάθε $x \in A$ και να βρείτε τη μονοτονία και το σημείο καμπής της C_f

Γ3) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο καμπής της

και να λυθεί η εξίσωση: $4f(x) + \pi = 4x + 2$



Γ4) Να βρείτε το εμβαδόν χωρίου, που περικλείεται από την C_f ,

τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x - 2$, $A = \mathbb{R}$

Δ1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και έχει ελάχιστο στη θέση $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Δ2) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x_0 f(x_0 + f(x)) + 2x_0^2 + 4x_0 - 1 = 0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες α, β με $\alpha < x_0 < \beta$

Δ3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{2x_0 f(x) + 2x_0^2 + 4x_0 - 1}$

Δ4) Να δείξετε ότι $\int_1^\beta [2f(x) + f'(\beta)(\beta - 1)] dx > 0$