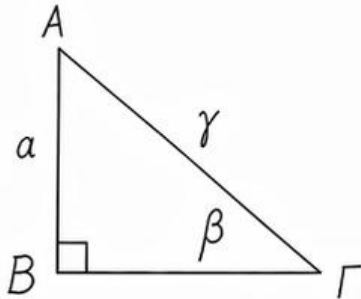
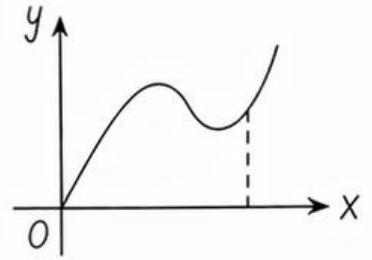


$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ

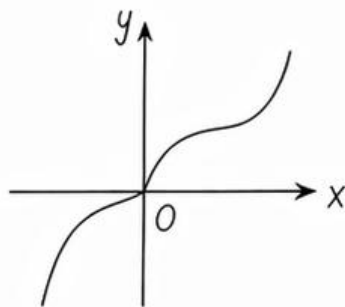
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

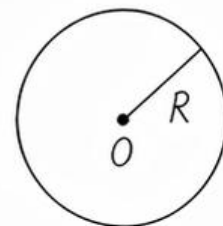
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(x)' = \frac{1}{x}$$



Γ ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



$$E = mc^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

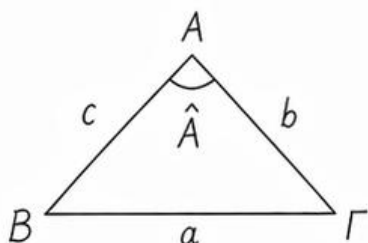
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\log_a (\overline{xy}) = \log_a x + \log_a y$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin \Gamma}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Μαθη(μα)τικά Θέματα

ΗΠΑ

Ηλίας • Παύλος • Ανδρέας



ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΚΥΡΙΑΚΗ 03 ΜΑΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x_0) = 0.$$

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 5

A3. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0 .

β. Αν το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) \neq 0$.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ' ΤΑΞΗ

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $[0, +\infty)$

και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

δ. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty$, όπου $v \in \mathbb{N}$.

ε. Για οποιεσδήποτε συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ e^x - 2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

B1. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

Μονάδες 6

B2. i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (μονάδες 6)

ii) Να αιτιολογήσετε για ποιο λόγο η f δεν αντιστρέφεται. (μονάδες 3)

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 4

B4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + f(x) \right).$

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΘΕΜΑ Γ

Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι:

- το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + f(1)}{x - 1}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός,
- η συνάρτηση $F(x) = (f(x) - \ln x + 1) \cdot x$ είναι μια παράγουσα της f στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1) = 0$. (μονάδες 4)

ii) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{2}$, $x > 0$. (μονάδες 6)

Μονάδες 10

Γ2. Ένα υλικό σημείο $M(x, F(x))$ ξεκινά από το σημείο $\left(\frac{1}{2}, F\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = F(x)$, $x > 0$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι θετικός, δηλαδή $x'(t) > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο:

$$y'(t) = \frac{x'(t) \cdot \ln^2 x(t)}{2}, \quad t \geq 0.$$

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M , τη χρονική στιγμή t_0 που αυτό διέρχεται από το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης F .

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_1^e e^{F(x)} \cdot \ln^2 x dx = 2(\sqrt{e} - e).$$

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ' ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x(\ln x - \alpha), \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Είναι γνωστό ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(e^2, f(e^2))$ τέμνονται κάθετα.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

Μονάδες 5

Δ2. i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 5)$ είναι μια αρχική της f . (μονάδες 2)

Μονάδες 4

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις εφαπτομένες της στα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(e^2, f(e^2))$, ισούται αριθμητικά με την τετμημένη του σημείου τομής των εφαπτομένων.

Μονάδες 4

Δ3. Αν $x > 0$, να λύσετε την εξίσωση:

$$F(e^x) + e^{x+1} = F(ex) + e^2x.$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_e^{e+1} x^x dx > e^e \cdot E,$$

όπου E είναι το εμβαδόν που αναφέρεται στο παραπάνω ερώτημα Δ2,ii).

Μονάδες 6

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

Απαντήσεις θέματος Α**A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 142.**A2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 51.**A3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 73.**A4.** α. Σωστό β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Λάθος.**Προτεινόμενη λύση θέματος Β****B1.** Το πεδίο ορισμού της f είναι το $[-1, +\infty)$.Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία του διαστήματος $(-1, +\infty)$ στα οποία:

- δεν ορίζεται η παράγωγος της f , ή
- αν ορίζεται, αυτή είναι ίση με μηδέν.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-1, 0)$ ως πολυωνυμική, με:

$$f'(x) = 2x < 0 \text{ για κάθε } x \in (-1, 0).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ ως εκθετική, με:

$$f'(x) = e^x > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Για την παραγωγισιμότητα στο μηδέν, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{(f(0)=-1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{(f(0)=-1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \left. \frac{d(e^x)}{dx} \right|_{x=0} = 1.$$

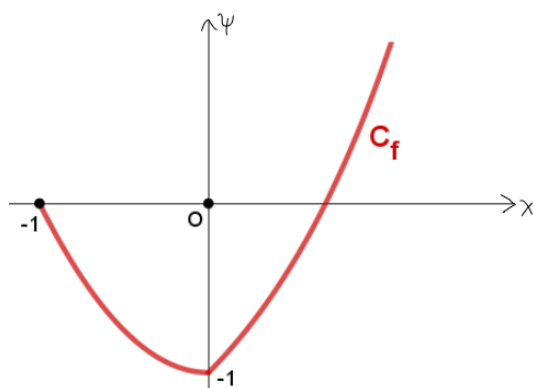
Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν, άρα το μηδέν είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της.**B2. i)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ με $f'(x) = 2x < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$.Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x > 0$ για κάθε $x > 0$.Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και στο $[0, +\infty)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι τα κρίσιμα σημεία της f και το $x_0 = -1$.

Για κάθε $x \in [-1, 0]$ έχουμε: $x \geq -1 \stackrel{(f \setminus [-1, 0])}{\Rightarrow} f(x) \leq f(-1)$.

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 , το $f(-1) = 0$.

Επίσης η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = -1$, διότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.



ii) Βρίσκουμε:

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0, \quad f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Δηλαδή $f(-1) = f(\ln 2)$, άρα η f δεν είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση.

B3. Αρχικά η f είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-1, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 2) = -1.$$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $[-1, +\infty)$, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες η γραφική της παράσταση.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 2)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty,$$

όπως προέκυψε από το θεώρημα DLH.

Συμπεραίνουμε ότι δεν έχει πλάγιες/οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ η γραφική παράσταση της f .

B4. Αρχικά είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2) = +\infty.$$

Οπότε,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \stackrel{\left(\theta = \frac{1}{f(x)}\right)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \theta \rightarrow 0}} \left(\theta \cdot \eta\mu \frac{1}{\theta} \right) = 0.$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Προτεινόμενη λύση θέματος Γ

Γ1. i) Δίνεται ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + f(1)}{x - 1}$ είναι πραγματικός αριθμός, έστω ℓ .

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f(1) &\stackrel{(f \text{ συνεχής στο } 1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) + f(1)}{x - 1} (x - 1) - f(1) \right) = \ell \cdot 0 - f(1) = -f(1) \Rightarrow \\ f(1) &= -f(1) \Rightarrow f(1) = 0. \end{aligned}$$

ii) Από τα δεδομένα προκύπτει ότι: $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\begin{aligned} f(x) = F'(x) &= \left((f(x) - \ln x + 1) \cdot x \right)' = (f(x) - \ln x + 1)' \cdot x + (f(x) - \ln x + 1) \cdot x' = \\ &= \left(f'(x) - \frac{1}{x} \right) \cdot x + f(x) - \ln x + 1 = xf'(x) + f(x) - \ln x \Rightarrow \\ f(x) &= xf'(x) + f(x) - \ln x \Rightarrow xf'(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \\ f'(x) &= (\ln x)' \ln x \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln^2 x}{2} \right)'. \end{aligned}$$

Από συνέπεια Θεωρήματος Μέσης Τιμής, προκύπτει η ύπαρξη σταθερού αριθμού c , για τον οποίο ισχύει:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + c \text{ για κάθε } x > 0.$$

Έχουμε αποδείξει όμως ότι $f(1) = 0$, οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι $c = 0$.

Οπότε πράγματι $f(x) = \frac{\ln^2 x}{2}$, $x > 0$.

Γ2. i) Καθώς το σημείο $M(x, F(x))$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = F(x)$, $x > 0$, η τετμημένη του εξαρτάται από το χρόνο t , δηλαδή $x = x(t)$, $t \geq 0$.

Οπότε η τεταγμένη του σημείου M είναι:

$$y(t) = F(x(t)) = (f(x(t)) - \ln x(t) + 1) \cdot x(t) = \left(\frac{\ln^2 x(t)}{2} - \ln x(t) + 1 \right) \cdot x(t), t \geq 0.$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(\left(\frac{\ln^2 x(t)}{2} - \ln x(t) + 1 \right) \cdot x(t) \right)' = \\ &= \left(\frac{\ln^2 x(t)}{2} - \ln x(t) + 1 \right)' \cdot x(t) + \left(\frac{\ln^2 x(t)}{2} - \ln x(t) + 1 \right) \cdot x'(t) = \\ &= \left(\ln x(t) \cdot (\ln x(t))' - (\ln x(t))' \right) \cdot x(t) + \frac{x'(t) \cdot \ln^2 x(t)}{2} - x'(t) \cdot \ln x(t) + x'(t) = \\ &= \frac{x'(t) \cdot \ln^2 x(t)}{2}, t \geq 0. \end{aligned}$$

ii) Για $t = t_0$ η προηγούμενη σχέση δίνει:

$$y'(t_0) = \frac{x'(t_0) \cdot \ln^2 x(t_0)}{2}, \quad (1).$$

Θα βρούμε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης F.

Για κάθε $x > 0$ βρίσκουμε:

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

και

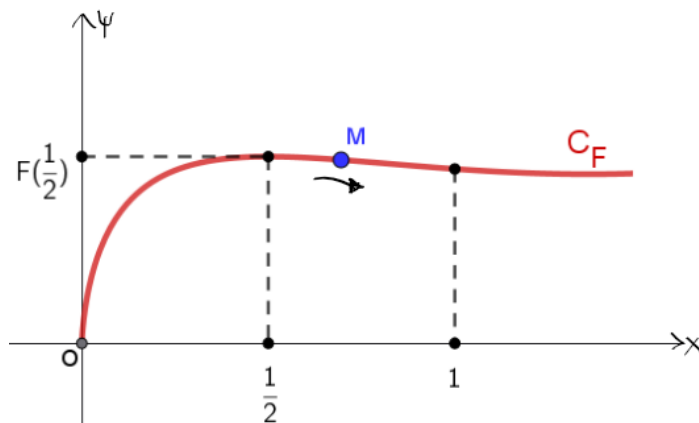
$$F''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$F''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1,$$

$$F''(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Η συνάρτηση F'' μηδενίζεται στο 1, αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του 1 και ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $(1, F(1))$, διότι η F είναι παραγωγίσιμη στο 1. Άρα το σημείο $(1, F(1))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της F.

Επειδή $F''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, το σημείο καμπής $(1, F(1))$ είναι μοναδικό.



Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι $x(t_0) = 1$, διότι είδαμε ότι το σημείο $(1, F(1))$ είναι μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της F .
 Άρα η σχέση (1) δίνει:

$$y'(t_0) = \frac{x'(t_0) \cdot \ln^2 1}{2} = 0.$$

Γ3. Έχουμε διαδοχικά ότι:

$$\begin{aligned}
 \int_1^e e^{F(x)} \cdot \ln^2 x \, dx &\stackrel{(\ln^2 x = 2f(x))}{=} 2 \int_1^e e^{F(x)} \cdot f(x) \, dx \stackrel{(f=F')}{=} 2 \int_1^e e^{F(x)} \cdot F'(x) \, dx = \\
 &= 2 \int_1^e (e^{F(x)})' \, dx = 2 \left[e^{F(x)} \right]_1^e = \\
 &= 2(e^{F(e)} - e^{F(1)}) = 2 \left(e^{\frac{e}{2}} - e \right) = \\
 &= 2(\sqrt{e^e} - e).
 \end{aligned}$$

Προτεινόμενη λύση θέματος Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f'(x) = (x(\ln x - \alpha))' = \ln x - \alpha + 1$.

Γνωρίζουμε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(e^2, f(e^2))$ τέμνονται κάθετα, οπότε οι συντελεστές διεύθυνσής τους θα έχουν γινόμενο ίσο με -1 .

Δηλαδή θα ισχύει $f'(1) \cdot f'(e^2) = -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\ln 1 - \alpha + 1) \cdot (\ln e^2 - \alpha + 1) = -1 \Leftrightarrow (-\alpha + 1) \cdot (3 - \alpha) = -1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Δ2.i) Αν $x \in (0, +\infty)$:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$,
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e$,
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$, οπότε

$$f(\Delta_1) = \left[f(e), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-e, 0), \text{ καθώς } f(e) = -e \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x - 2x) = 0,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [e, +\infty)$, οπότε

$$f(\Delta_2) = \left[f(e), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-e, +\infty), \text{ καθώς } f(e) = -e \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\ln x - \frac{2}{x} \right) \right] = +\infty,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

$$\text{Είναι } f((0, +\infty)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-e, +\infty).$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{4} \cdot (2\ln x - 5) \right)' = \left(\frac{x^2}{4} \right)' \cdot (2\ln x - 5) + \left(\frac{x^2}{4} \right) \cdot (2\ln x - 5)' =$$

$$= \frac{x}{2} \cdot (2\ln x - 5) + \frac{x^2}{4} \cdot \frac{2}{x} = x \cdot \ln x - \frac{5x}{2} + \frac{x}{2} = x \cdot \ln x - 2x = f(x),$$

οπότε η συνάρτηση F είναι μία αρχική της f στο $(0, +\infty)$.

ii) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_1): \psi - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \stackrel{f(1)=-2}{\underset{f'(1)=-1}{\Leftrightarrow}} \psi = -x - 1,$$

ενώ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(e^2, f(e^2))$ έχει εξίσωση

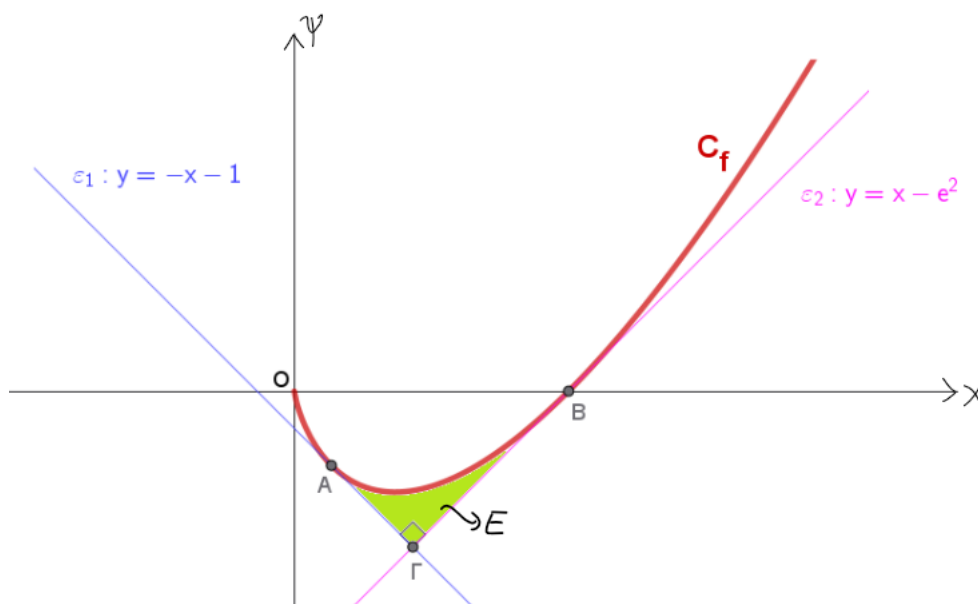
$$(\varepsilon_2): \psi - f(e^2) = f'(e^2) \cdot (x - e^2) \stackrel{f(e^2)=0}{\underset{f'(e^2)=1}{\Leftrightarrow}} \psi = x - e^2.$$

Το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) προκύπτει από την επίλυση του συστήματος:

$$\left. \begin{array}{l} \psi = -x - 1 \\ \psi = x - e^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \frac{e^2 - 1}{2} \text{ και } \psi = \frac{-e^2 - 1}{2}.$$

Έστω $x_0 = \frac{e^2 - 1}{2}$. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f''(x) = (\ln x - 1)' = \frac{1}{x} > 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Λόγω της κυρτότητας, η C_f θα βρίσκεται πάνω από τις (ε_1) και (ε_2) , με εξαίρεση τα σημεία επαφής $A(1, f(1))$ και $B(e^2, f(e^2))$ αντίστοιχα.



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_1^{x_0} |f(x) - (-x-1)| dx + \int_{x_0}^{e^2} |f(x) - (x-e^2)| dx = \int_1^{x_0} (f(x) + x + 1) dx + \int_{x_0}^{e^2} (f(x) - x + e^2) dx = \\
 &= \left[F(x) + \frac{x^2}{2} + x \right]_1^{x_0} + \left[F(x) - \frac{x^2}{2} + e^2 x \right]_{x_0}^{e^2} = \\
 &= F(x_0) + \frac{x_0^2}{2} + x_0 - F(1) - \frac{1}{2} - 1 + F(e^2) - \frac{e^4}{2} + e^4 - F(x_0) + \frac{x_0^2}{2} - e^2 x_0 = \\
 &= F(e^2) - F(1) + x_0^2 - \frac{3}{2} + \frac{e^4}{2} - \left(\frac{e^2-1}{2x_0} \right) x_0 = -\frac{e^4}{4} + \frac{5}{4} - x_0^2 - \frac{3}{2} + \frac{e^4}{2} = \frac{e^4-1-(2x_0)^2}{4} = \\
 &= \frac{e^4-1-(e^2-1)^2}{4} = \frac{e^2-1}{2} = x_0.
 \end{aligned}$$

$$\Delta 3. F(e^x) + e^{x+1} = F(ex) + e^2 x \Leftrightarrow F(e^x) + e \cdot e^x = F(ex) + e \cdot ex.$$

Θεωρούμε συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = F(x) + ex$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $g'(x) = (F(x) + ex)' = f(x) + e \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = e$. Επομένως:

$g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$ } $\Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και 1-1. Έτσι:
 g συνεχής στο e

$$\begin{aligned}
 F(e^x) + e \cdot e^x = F(ex) + e \cdot ex &\Leftrightarrow g(e^x) = g(ex) \stackrel{g \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} e^x = ex \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(ex) \Leftrightarrow x = 1 + \ln x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \ln x = x - 1 \Leftrightarrow x = 1.
 \end{aligned}$$

$\Delta 4.$ Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(x) + e \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = e$.

$$\text{Άρα } x(\ln x - 2) \geq -e \Rightarrow x \cdot \ln x \geq 2x - e \Rightarrow e^{x \cdot \ln x} \geq e^{2x-e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^x \geq e^{2x-e} \Rightarrow \int_e^{e+1} x^x dx > \int_e^{e+1} e^{2x-e} dx = \frac{1}{2} [e^{2x-e}]_e^{e+1} = \frac{1}{2} (e^{e+2} - e^e) = e^e \cdot \frac{e^2-1}{2} = e^e \cdot E.$$