ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να δείξετε ότι **(α)** $\left(x^{\nu}\right)' = \nu x^{\nu-1}, \nu \in N - \{0,1\}$, $x \in R$. **(3 Μονάδες)**

(β) $\left(x^{-\nu}\right)' = -\nu x^{-\nu-1}, \nu \in N^{*}, x \in R - \{0\}$. **(3 Μονάδες)**

Α2. Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως ,να δώσετε τον ορισμό της σύνθεσης της f με την g ,δηλαδή να γράψετε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της σύνθεσης. **(4 Μονάδες)**

Α3. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$.Ένας μαθητής ισχυρίσθηκε ότι “μπορεί να ισχύει η ισότητα $f(0) = f(1)$ „ .Συμφωνείτε με τον παραπάνω ισχυρισμό; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(5 Μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με την ίδια τετμημένη.

ii. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

iii. Αν f είναι συνάρτηση ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$,τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m .

iv. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$.

v. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x\in R$.

Β1. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και τις ασύμπτωτες της C_f .

(6 Μονάδες)

Β2. Να δείξετε ότι

(α) Η f είναι γνησίως αύξουσα. **(2 Μονάδες)**

(β) Ισχύει $3\cdot f(\ln 2)=1$ **(2 Μονάδες)**και να λύσετε την ανίσωση

$f\left(x^2-x+\ln 2\right)<\dfrac{1}{3}$. **(6 Μονάδες)**

Β3.Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$. **(5 Μονάδες)**

Β4.Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα-σημεία καμπής και με τη βοήθεια του πίνακα μεταβολών να <u>σχεδιάσετε</u> τη C_f . **(6 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f , $f(x)=\sqrt{x-1}, x\geq 1$.

Γ1.Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **(5 Μονάδες)**

Γ2. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f ,τον άξονα $x'x$ και την εφαπτόμενη (ε) : $y=\dfrac{1}{2}x$.

(α) Αφού σχεδιάσετε τα παραπάνω **(Μονάδες 2)** να δείξετε ότι το χωρίο Ω έχει εμβαδόν $E(\Omega)=\dfrac{1}{3}$ τ.μ. **(6 Μονάδες)**

(β) Να βρείτε την ευθεία $x=\alpha\in(0,1)$ η οποία χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία. **(3 Μονάδες)**

Γ3. Κινητό σημείο $K(x,y), x\in[0,2]$ κινείται πάνω στην εφαπτόμενη (ε) και απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα $\upsilon=2\sqrt{5}$ cm/min.Να δείξετε ότι η τετμημένη του Κ αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο να βρείτε. **(5 Μονάδες)**

Γ4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης g , $g(x)=\eta\mu x\cdot f(x+1)$. **(6 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f , $f(x)=x\ln x+x^2+g(x)$, $x\in(0,+\infty)$
όπου g παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση ώστε
$|g'(x)-g'(y)|\le(x-y)^2$,για κάθε $x,y\in R$
με $g(1)=1$ και $g'(1)=-3$.

Δ1. Να βρείτε την g και να δείξετε ότι
$f(x)=x\cdot\ln x+x^2-3x+4$, $x\in(0,+\infty)$. **(5 Μονάδες)**

Δ2.Να βρείτε το ακρότατο και το σύνολο τιμών της f . **(5 Μονάδες)**

Δ3.Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α και β αν ισχύει η ισότητα

$$\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\beta-\frac{3}{2}\right)^2+\ln\left(\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\right)=\frac{1}{2}.$$

(5 Μονάδες)

Δ4.Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^x=e^{3x-x^2}$, $x\in(0,+\infty)$ έχει
μοναδική ρίζα $x_1\in(1,+\infty)$. **(5 Μονάδες)**

Δ5.Να δείξετε ότι η συνάρτηση φ με παράγωγο
$\varphi'(x)=(x-1)^2(x-2)^3(f(x)-4), x>0$.
έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο. **(5 Μονάδες)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ