

Επαναληπτικό Διαγώνισμα Μαθηματικών
Γ' Λυκείου - Προσανατολισμός

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 7)

A2. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ .

(Μονάδες 4)

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι υποχρεωτικά γνησίως αύξουσα σε όλο το A .»

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή. (Μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας παραθέτοντας ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα. (Μονάδες 3)

(Μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι υποχρεωτικά και γνησίως μονότονη.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει τοπικά ακρότατα, τότε υποχρεωτικά $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει υποχρεωτικά $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1, \quad \text{με } x \in [0, 1]$$

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad \text{με } x \in [0, +\infty)$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.

(Μονάδες 6)

B2. Αν $h(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ με $x \in [0, 1]$, να βρείτε το σύνολο τιμών $h([0, 1])$ της συνάρτησης h και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(h(x) - \sigma \nu \nu x)(h(x) - e^x + 1) = 0$$

έχει ακριβώς δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 6)

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού καθώς και τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης h^{-1} .

(Μονάδες 6)

B4. Αν $h^{-1}(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ με $x \in [1, \sqrt{2}]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 - 1} dx = \sqrt{2}$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x) = \ln(e^{2x} + e^x) - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ1. α) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \ln(e^x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 4)

Γ2. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f^2(x) = x^2 g^2(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου g η συνάρτηση του ερωτήματος Γ1.

α) Να αποδείξετε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x^2 g^2(x) = 0$ είναι η $x = 0$. (Μονάδες 3)

β) Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της συνεχούς συνάρτησης f , αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

(Μονάδες 8)

Γ3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1) = \ln(e + 1)$ και $f(-1) = -\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = x \ln(e^x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει ασύμπτωτες.

(Μονάδες 7)

Γ4. Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(1, 0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ τέτοια ώστε, αν λ_1, λ_2 είναι οι αντίστοιχες κλίσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f του ερωτήματος Γ3 στα σημεία $M_1(\xi_1, f(\xi_1))$ και $M_2(\xi_2, f(\xi_2))$, να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_{AM_1} + \lambda_{BM_1} &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_{AM_2} + \lambda_{BM_2} &= 0\end{aligned}$$

όπου λ_{AM_1} και λ_{BM_2} είναι οι κλίσεις των ευθύγραμμων τμημάτων AM_1 και BM_2 αντίστοιχα.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ και την παραγωγίσιμη συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$g'(x) = -2x + 9\kappa, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\kappa}{2} = \int_1^2 g(t) dt \quad \text{και} \quad g(1) = 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και κυρτή στο $[0, +\infty)$ και να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{-1}{f(x) - x + 1}} \eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

(Μονάδες 6)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \frac{1}{3}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_3^4 \frac{-x^3 + 3x^2 - x}{g(x)} dx$$

(Μονάδες 7)

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (1, 2)$ ισχύει η ανισότητα:

$$f(x) + (2-x)g'(x) < f(2)$$

(Μονάδες 6)

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, το θετικό ημιεπίπεδο που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

(Μονάδες 6)