

Απαντήσεις και Μοριοδότηση

Θεμάτων

Μαθηματικών Προσανατολισμού

8^{ης} Διαλυκειακής Γραπτής Δοκιμασίας

«Θεόδωρος Φυλακτός»

Γ' Τάξης Ημερησίων Γενικών Λυκείων

Δυτικής Θεσσαλονίκης 2026

- Την επιμέλεια των θεμάτων και των λύσεων είχαν οι μαθηματικοί:

Ασκητά Μελίνα	4 ^ο ΓΕΛ Ευόσμου
Μανάρας Νικόλαος	Πειραματικό ΓΕΛ Παν. Μακεδονίας
Μπαρούτης Δημήτριος	3 ^ο ΓΕΛ Σταυρούπολης
Πρωτιβιώτης Ηλίας	4 ^ο ΓΕΛ Ευόσμου
Ρωσσίδης Ιωσήφ	1 ^ο ΓΕΛ Ευόσμου
Χατζημανώλης Νικόλαος	1 ^ο ΓΕΛ Νεάπολης

- Υπό την εποπτεία των Σ.Ε. Μαθηματικών Δυτικής Θεσσαλονίκης
Βενάρδου Παντελή και Τσαμπούκα Πετρούλας

A1 [6 μονάδες]	
Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. [Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.] (προαιρετικά)	1
Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής [Θ.Μ.Τ.].	1
Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.	1
Άρα, $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$.	1
Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$,	1
έχουμε ότι $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.	1

A2 [2+3=5 μονάδες]	
A2(i)(2 μονάδες)	
Αρχική ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ ονομάζεται	
κάθε συνάρτηση F [που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και...] $\leftarrow$ (προαιρετικά) για την οποία ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$,	1
για κάθε $x \in \Delta$.	1
A2(ii)(3 μονάδες)	
Κρίσιμα σημεία μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ονομάζουμε	
τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία:	1
• είτε η παράγωγος της f μηδενίζεται	1
• είτε (τα εσωτερικά σημεία στα οποία) η f δεν παραγωγίζεται.	1

A3[4 μονάδες]	
Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν ισχύει ότι $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.	4
Σχόλιο: Αν δεν γράψει την φράση «κοντά στο x_0 », αφαιρούμε μία μονάδα. Αν έχει άλλες παραλείψεις, βαθμολογούμε με μηδέν μονάδες.	

A4[2x5=10 μονάδες]				
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
Λ	Λ	Σ	Λ	Λ

B1 [5 μονάδες]	
$D_{\varphi \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_\varphi\} =$	1
$= \{x \in (0, +\infty) / g(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty).$	1
Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι $(\varphi \circ g)(x) = \varphi(g(x)) = \frac{e^{2 \cdot g(x)} - 1}{e^{g(x)}} = \frac{e^{2 \cdot \ln x} - 1}{e^{\ln x}} =$	1
$= \frac{e^{\ln x^2} - 1}{e^{\ln x}} =$	1
$= \frac{x^2 - 1}{x}.$	1

B2[4+5=9 μονάδες]	
B2(i)(4 μονάδες)	
Για $x > 0$:	
$f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2} > 0.$	1
Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.	1
$f''(x) = \dots = -\frac{2}{x^3} < 0.$	1
Άρα, η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.	1
B2(ii)(5 μονάδες)	
Η f είναι συνεχής στο $D_f = (0, +\infty)$.	1
<u>Κατακόρυφες Ασύμπτωτες:</u> Μορφή: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} \stackrel{-1}{\underset{0^+}}{=} -\infty.$	1
Άρα, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .	
<u>Πλάγιες-Οριζόντιες Ασύμπτωτες:</u> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 (\lambda = 1).$	1
Για $\lambda = 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 (b = 0).$	1
Άρα, η ευθεία $y = \lambda x + b \Leftrightarrow y = x$ είναι (πλάγια) ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.	1

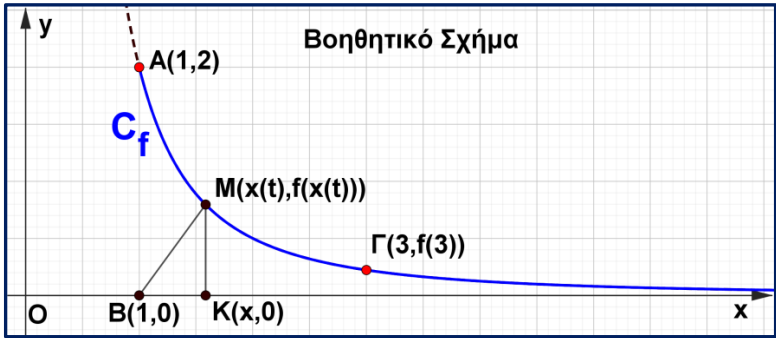
B3 [3+3=6 μονάδες]	
B3(i)(3 μονάδες)	
Στο B2(i) δείξαμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1-1 (δηλαδή αντιστρέψιμη).	1
Επιπλέον, λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας της συνάρτησης f , ισχύει ότι $D_{f^{-1}} = f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$,	1
διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$. Σημείωση: Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ έχει υπολογιστεί στο ερώτημα B2(ii) και για αυτό το λόγο η τιμή του μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα στο ερώτημα B3(i).	1
B3(ii)(3 μονάδες)	
Σημείωση: Τα αρχικά σχόλια είναι (προφανώς) προαιρετικά και για αυτό δεν βαθμολογούνται: Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ με $f^{-1}(f(x) - \alpha) = 1$ ισχύει η ισοδυναμία:	
$f^{-1}(f(x) - \alpha) = 1 \Leftrightarrow f(x) - \alpha = f(1) \Leftrightarrow f(x) = \alpha + f(1)$.	1
Επειδή $\alpha + f(1) \in \mathbb{R} = f((0, +\infty))$ και λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης f ,	1
προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \alpha + f(1)$. Συνεπώς, η εξίσωση $f^{-1}(f(x) - \alpha) = 1$ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$.	1

B4[5 μονάδες]	
Για $x \in (0, +\infty)$:	1
$f(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \cdot (x^2 - 1) \Leftrightarrow (x^2 - 1) \cdot (x - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 \cdot (x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $\underbrace{x = -1}_{\substack{\text{απορρίπτεται} \\ \text{λόγω} \\ \text{περιορισμών}}} \Leftrightarrow x = 1$.	2
Επειδή $h'(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $h'(1) = 2 \cdot 1 = 2$. Ακόμη, $f'(1) = \frac{1^2 + 1}{1^2} = 2$. Επομένως, $f'(1) = h'(1)$. Συνεπώς, στο μοναδικό κοινό σημείο $A(1, f(1))$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h ορίζεται κοινή εφαπτομένη.	2

Γ1 [6 μονάδες]	
Από υπόθεση, προκύπτει ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και επομένως $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \alpha x + \beta) = 2 \Leftrightarrow e^0 + \alpha + \beta = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1 - \alpha.$	1
(Υπολογισμός αριστερής παραγώγου:) Άρα, η f έχει τύπο της μορφής $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha x + 1 - \alpha & , \quad x < 1 \\ \frac{2}{x^2} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$. Συνεπώς, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \alpha x + 1 - \alpha - 2}{x - 1} \stackrel{\text{Μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \alpha}{1} = 1 + \alpha.$	2
Επιπλέον, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{2}{x^2} - 2}{x - 1} \stackrel{\text{Μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4}{x^3} = -4.$	1
Από υπόθεση, προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Άρα, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow$	1
$\Leftrightarrow \alpha + 1 = -4 \Leftrightarrow \alpha = -5 \quad \text{και} \quad \beta = 1 - \alpha = 1 - (-5) = 6.$	1

Γ2[6 μονάδες]	
Η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 5x + 6 & , \quad x < 1 \\ \frac{2}{x^2} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$.	
Για $x < 1$ ισχύει ότι $f'(x) = e^{x-1} - 5 < 0$, διότι $x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow e^{x-1} < e^0 \Rightarrow e^{x-1} < 1 \Rightarrow e^{x-1} - 5 < -4 \Rightarrow e^{x-1} - 5 < 0$.	1
Για $x > 1$ ισχύει ότι $f'(x) = \left(\frac{2}{x^2}\right)' = (2 \cdot x^{-2})' = -\frac{4}{x^3} < 0$.	1
Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε με βάση και τα παραπάνω προκύπτει ότι η $f \searrow$ στο $\mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$, διότι:	2
Μορφή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2}\right) \stackrel{+\infty}{=} 0$	1
Μορφή $\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} - 5x + 6) \stackrel{0-5(-\infty)+6}{=} +\infty$.	1

Γ3 [6 μονάδες]	
Στο ερώτημα Γ2 αποδείξαμε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	1
Η ευθεία $x = k$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία αν και μόνο αν $\int_1^k f(x) dx = \int_k^3 f(x) dx \Leftrightarrow$	1
$\stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \int_1^k f(x) dx = \int_k^3 f(x) dx$ [σχέση Α].	1
Όμως, $\int_1^k f(x) dx = \int_1^k \frac{2}{x^2} dx = \int_1^k 2 \cdot x^{-2} dx = \left[2 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^k = \left[-2 \cdot \frac{1}{x} \right]_1^k = \left[-\frac{2}{x} \right]_1^k =$ $= \left[\frac{2}{x} \right]_k^1 = 2 - \frac{2}{k}$ [σχέση Β].	1
Ακόμη, $\int_k^3 f(x) dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_k^3 = \left[\frac{2}{x} \right]_3^k = \frac{2}{k} - \frac{2}{3}$. [σχέση Γ].	1
Από τις σχέσεις [Α], [Β], [Γ] προκύπτει ότι $2 - \frac{2}{k} = \frac{2}{k} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{k} = 2 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{k} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow k = \frac{12}{8} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$.	1

Γ4 [7 μονάδες]	
[Εστω Δ το χρονικό διάστημα κατά το οποίο πραγματοποιείται η κίνηση του σημείου M] $\leftarrow$ (προαιρετική αναφορά)	
	
Το εμβαδόν του τριγώνου MBK ως συνάρτηση της τετμημένης x του σημείου M δίνεται από τον τύπο: $(MBK) = \frac{1}{2} \cdot (x-1) \cdot f(x) = \frac{(x-1) \cdot 2}{2 \cdot x^2} = \frac{x-1}{x^2}, x \geq 1.$	1
Συνεπώς, το εμβαδόν E του ίδιου τριγώνου ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται από τον τύπο: $E(t) = \frac{x(t)-1}{(x(t))^2}, t \in \Delta.$ (Αντί για «$t \in \Delta$» μπορεί εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνηθέστερη έκφραση «$t \geq 0$».)	1
Για κάθε $t \in \Delta$ (ή $t \geq 0$) ισχύει ότι $E'(t) = \left[-\frac{1}{x^2(t)} \cdot x'(t) + \frac{2}{x^3(t)} \cdot x'(t) \right] = \frac{x'(t)}{x^2(t)} \cdot \left[\frac{2}{x(t)} - 1 \right].$	1
Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3, f(3))$.	1
Τότε $E'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{x^2(t_0)} \cdot \left[\frac{2}{x(t_0)} - 1 \right] \Leftrightarrow -1 = \frac{x'(t_0)}{3^2} \cdot \left[\frac{2}{3} - 1 \right] \Leftrightarrow$	2
$\Leftrightarrow \frac{x'(t_0)}{9} \cdot \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow x'(t_0) = 27 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$	1

Δ1 [4+3=7 μονάδες]	
Δ1(i) (4 μονάδες)	
Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x + 1$.	1
Από υπόθεση, προκύπτει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $g(0) = f(0) - e^0 + 1 = 0$, άρα ισχύει ότι $g(x) \leq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) - e^x$.	2
Δηλαδή, η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Fermat στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του $\mathbb{R}$ και συνεπώς ισχύει ότι $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - e^0 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.	1
Δ1(ii) (3 μονάδες)	
Από υπόθεση, ισχύει ότι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η f είναι κυρτή.	1
[Εύρεση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $O(0,0)$]: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x$.	1
Λόγω κυρτότητας της συνάρτησης f , προκύπτει ότι $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.	1

Δ2 [4+3=7 μονάδες]	
Δ2(i) (4 μονάδες)	
Θέτοντας $x=0$ στην ζητούμενη σχέση παρατηρούμε ότι: $f(0) \leq 0 \cdot f'(0) \leq f(2 \cdot 0) - f(0) \Leftrightarrow f(0) \leq 0 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0 \leq 0$ ισχύει ως ισότητα.	1
Για $x > 0$: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, x]$, $[x, 2x]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0, x)$, $(x, 2x)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0, x)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x, 2x)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} = \frac{f(2x) - f(x)}{x}.$	1
Άρα, $\xi_1 < x < \xi_2 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(\xi_1) < f'(x) < f'(\xi_2) \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) < \frac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow{x > 0} f(x) < x \cdot f'(x) < f(2x) - f(x).$	2
Δ2(ii) (3 μονάδες)	
Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = x \cdot f(x) - 2F(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι $h'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) - 2F'(x) = f(x) + x \cdot f'(x) - 2f(x) = x \cdot f'(x) - f(x).$	1
Στο ερώτημα Δ2(i) αποδείξαμε ότι για $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι $x \cdot f'(x) > f(x) \Leftrightarrow x \cdot f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0.$	1
Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και συνεπώς προκύπτει ότι $x > 0 \xRightarrow{h \nearrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow x \cdot f(x) - 2 \cdot F(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot F(x) < x \cdot f(x).$	1

Δ3[6 μονάδες]	
Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) - f(\eta\mu x) = x - \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) - x = f(\eta\mu x) - \eta\mu x .$ Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\varphi(x) = \varphi(\eta\mu x)$.	1
Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει ότι $\varphi'(x) = f'(x) - 1$.	1
Ακόμη, για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 1 \stackrel{\Delta 1(i)}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} x > 0.$ Άρα, $\varphi \nearrow$ στο $[0, +\infty)$.	1
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $x \geq 0$ και $\eta\mu x \geq 0$. Συνεπώς, για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ισοδυναμία: $\varphi(x) = \varphi(\eta\mu x) \stackrel{\substack{ x \in [0, +\infty) \\ \eta\mu x \in [0, +\infty) \\ \varphi \uparrow \\ \text{στο} \\ [0, +\infty)}}{\Leftrightarrow} x = \eta\mu x \Leftrightarrow x = 0,$	2
διότι είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $\eta\mu x \leq x$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.	1

Δ4[5 μονάδες]	
Ισχύει ότι $F(x) = 1 - \int_0^1 f(t) dt \Leftrightarrow F(x) + \int_0^1 f(t) dt - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F(x) + F(1) - F(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow F(x) + F(1) - 1 = 0.$ Θεωρούμε την συνάρτηση $G(x) = F(x) + F(1) - 1.$	1
Η G είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι $G'(x) = F'(x) = f(x) > 0$, διότι για $x > 0$ προκύπτει ότι $x > 0 \xrightarrow{f'} f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0.$ Επομένως, η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty).$	1
$G(0) = F(0) + F(1) - 1 = F(1) - 1 \stackrel{\Delta 2(ii)}{<} \frac{1}{2} f(1) - 1 \leq \frac{e-1}{2} - 1 \leq \frac{e-3}{2} < 0$, διότι από τις αρχικές υποθέσεις ισχύει ότι $f(x) \leq e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα $f(1) \leq e - 1.$	1
$G(1) = F(1) + F(1) - 1 = 2F(1) - 1 > 0$, διότι στο Δ1 δείξαμε ότι $f(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0.$ Επομένως, $\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 x dx \Leftrightarrow F(1) - F(0) > \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F(1) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2F(1) - 1 > 0.$	1
Δηλαδή, η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ισχύει ότι $G(0) \cdot G(1) < 0.$ Από θεώρημα Bolzano και λόγω μονοτονίας, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $G(x_0) = 0.$	1

Εναλλακτικές Λύσεις

Γ3 (2 ^{ος} Τρόπος) [6 μονάδες]	
Στο ερώτημα Γ2 αποδείξαμε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	1
Η ευθεία $x = k$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία αν και μόνο αν $\int_1^k f(x) dx = \frac{\int_1^3 f(x) dx}{2} \Leftrightarrow$	1
$\stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \int_1^k f(x) dx = \frac{\int_1^3 f(x) dx}{2} \text{ [σχέση Α].}$	1
Όμως, $\int_1^k f(x) dx = \int_1^k \frac{2}{x^2} dx = \int_1^k 2 \cdot x^{-2} dx = \left[2 \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^k = \left[-2 \cdot \frac{1}{x} \right]_1^k = \left[-\frac{2}{x} \right]_1^k =$ $= \left[\frac{2}{x} \right]_k^1 = 2 - \frac{2}{k} \text{ [σχέση Β].}$	1
Ακόμη, $\int_1^3 f(x) dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_1^3 = \left[\frac{2}{x} \right]_3^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ [σχέση Γ].	1
Από τις σχέσεις [Α], [Β], [Γ] προκύπτει ότι $2 - \frac{2}{k} = \frac{\frac{4}{3}}{2} \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{k} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{k} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{k} = 2 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{k} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}.$	1

Δ1(i)(2^{ος} Τρόπος) (4 μονάδες)	
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, ισχύει ότι $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R} \text{ [σχέση 1].}$	1
Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις: ▪ Για $x > 0$: $f(x) \leq e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) - f(0) \leq e^x - 1 \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{e^x - 1}{x}.$ Όμως, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{Μορφή } 0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} (e^x) = 1.$ Συνεπώς, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(0) \leq 1 \text{ [σχέση 2]}$ ▪ Για $x < 0$: Όμοια οδηγούμαστε στη σχέση $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(0) \geq 1 \text{ [σχέση 3]}$	2
Από τις σχέσεις [2], [3] προκύπτει ότι $f'(0) = 1$.	1

Δ2(i)(2^{ος} Τρόπος) (4 μονάδες)	
Θέτοντας $x = 0$ στην ζητούμενη σχέση παρατηρούμε ότι: $f(0) \leq 0 \cdot f'(0) \leq f(2 \cdot 0) - f(0) \Leftrightarrow f(0) \leq 0 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0 \leq 0$ ισχύει ως ισότητα.	1
Για $x > 0$: $f(x) < x \cdot f'(x) < f(2x) - f(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < \frac{x \cdot f'(x)}{x} < \frac{f(2x) - f(x)}{x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x) < \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x} \text{ [σχέση 4]}$	1
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, x]$, $[x, 2x]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0, x)$, $(x, 2x)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0, x)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x, 2x)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(2x) - f(x)}{2x - x}$.	1
Συνεπώς, [σχέση 4] $\Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(x) < f'(\xi_2) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} \xi_1 < x < \xi_2$ ισχύει.	1

Δ2(ii)(2^{ος} Τρόπος) (3 μονάδες)	
Έστω $x > 0$. Από τη σχέση Δ2(i) προκύπτει ότι για κάθε $t \in [0, x]$ ισχύει ότι $f(t) \leq t \cdot f'(t) \leq f(2t) - f(t) \stackrel{+f(t)}{\Rightarrow} 2f(t) \leq t \cdot f'(t) + f(t) \Leftrightarrow 2f(t) \leq (t \cdot f(t))'.$	1
Όπως δείξαμε στο ερώτημα Δ2(i), οι προηγούμενες σχέσεις ισχύουν ως ισότητες μόνο για $t = 0$. Άρα, $\int_0^x 2f(t) dt < \int_0^x (t \cdot f(t))' dt \Leftrightarrow$	1
$2F(x) - 2F(0) < x \cdot f(x) - 0 \cdot f(0) \Leftrightarrow 2F(x) < x \cdot f(x).$	1

Δ3 (2^{ος} Τρόπος) [6 μονάδες]	
Παρατηρούμε ότι για $x = 0$ η εξίσωση γράφεται: $f(0) - f(\eta\mu 0) = 0 - \eta\mu 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ισχύει. Άρα, η $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης.	1
Έστω ότι η εξίσωση έχει και άλλη λύση $x_0 \in \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Τότε $ \eta\mu x_0 < x_0 $.	1
Επίσης, προκύπτει η ισοδυναμία: $f(x_0) - f(\eta\mu x_0) = x_0 - \eta\mu x_0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\eta\mu x_0)}{ x_0 - \eta\mu x_0 } = 1 \text{ [σχέση 5].}$	1
Λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές υποθέσεις, παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\eta\mu x_0 , x_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(\eta\mu x_0 , x_0)$. Δηλαδή ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[\eta\mu x_0 , x_0]$ και άρα υπάρχει $\xi \in (\eta\mu x_0 , x_0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\eta\mu x_0)}{ x_0 - \eta\mu x_0 } \text{ [σχέση 6].}$	1
Από τις σχέσεις [5] και [6] προκύπτει ότι $\frac{f(x_0) - f(\eta\mu x_0)}{ x_0 - \eta\mu x_0 } = 1 \Leftrightarrow f'(\xi) \stackrel{\Delta 1(i)}{=} 1 \Leftrightarrow f'(\xi) = f'(0) \stackrel{f'1-1}{\Leftrightarrow} \xi = 0, \text{ άτοπο διότι}$ $0 \leq \eta\mu x_0 < \xi < x_0 .$	2
Επομένως, στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) - f(\eta\mu x) = x - \eta\mu x $ έχει μοναδική λύση την $x = 0$. (Το τελευταίο σχόλιο δεν βαθμολογείται.)	