

**Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά
Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου από το Askisopolis
2025 - 2026**

ΑΣΚΗΣΟ ΠΟΛΙΣ



www.askisopolis.gr

Ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

est. 2014

Αντώνης Βαλέργας	Γαβριήλ Ελευθερίου	
Αποστόλης Κακαβάς	Νίκος Κουμάντος	
Στέλιος Μιχαήλογλου	Άγγελος Μπλιάς	
Θανάσης Νικολόπουλος	Βαγγέλης Ραμαντάνης	
Δημήτρης Πατσιμάς	Νίκος Σαμπάνης	
Βαγγέλης Τόλης	Νίκος Τούντας	Ισαάκ Χιονίδης

8ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου
από την ομάδα του Ασκησόπολις
Διάρκεια: 3 ώρες
Ύλη: 4ο Γενικό Επαναληπτικό

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$

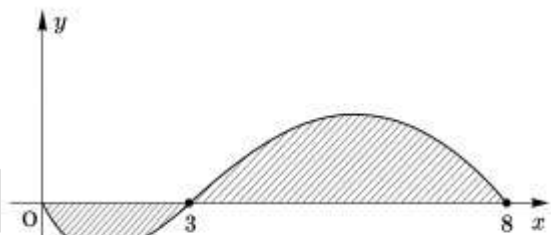
7 μονάδες

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano.

4 μονάδες

A3. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με

α) $\int_0^8 f(x) dx$ **β)** $\int_0^3 f(x) dx + \int_3^8 f(x) dx$
γ) $-\int_0^3 f(x) dx + \int_3^8 f(x) dx$ **δ)** $\int_0^3 f(x) dx - \int_3^8 f(x) dx$



4 μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ τότε είναι γνησίως μονότονη.

β) Μια συνεχής συνάρτηση έχει άπειρες αρχικές συναρτήσεις.

γ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = +\infty$.

δ) Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ε) Για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

B1. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

4 μονάδες

B2. Να γράψετε δύο διαστήματα στα οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

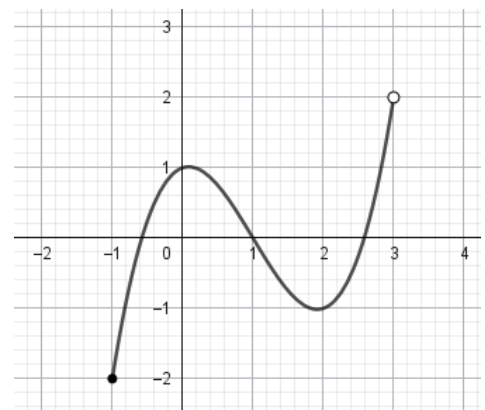
6 μονάδες

B3. Να βρείτε τις ρίζες της πρώτης παραγώγου f' της f .

5 μονάδες

B4. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$ για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$.

10 μονάδες



Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα εξής :

- $e^x (f(x) + f'(x)) = 2x - 1$
- Η γραφική της παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$.

4 μονάδες

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

6 μονάδες

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

5 μονάδες

Γ4. i. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη τη μεγαλύτερη ρίζα της.

ii. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \cdot 2026^x}{x^2 \cdot e^{-x+1} - x \cdot e^{-x+1} - x + 1}$.

5+5 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες είναι 3 φορές παραγωγίσιμες και για τις οποίες ισχύουν :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x} = 1 + f(0) - g(0)$,
- $f'(0) - f(1) < g'(0) - g(1)$ και ,
- $f''(x) \neq g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(0) = g'(0) + 1$.

6 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

5 μονάδες

Αν επιπλέον $k(x) = h(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η k παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h(x)}{h(x) \cdot k(x)}$.

2 + 3 = 5 μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^4 h(x) dx > 8$.

5 μονάδες

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης k , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=2$ είναι $E=6$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 h(x) dx$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\int_0^2 H(x) dx < \frac{8}{3}$, όπου H αρχική της h με

$$H(2) < \frac{8}{3}.$$

4 μονάδες

Κάθε επιτυχία!

Λύσεις

Θέμα Α

A1. Η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

$$- \text{ Αν } x \in (x_0 - \delta, x_0), \text{ τότε, λόγω της (1), θα είναι } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ οπότε θα έχουμε}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

$$- \text{ Αν } x \in (x_0, x_0 + \delta), \text{ τότε, λόγω της (1), θα είναι } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ οπότε θα έχουμε}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

A2. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν :

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(a) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μία, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

A3. γ

A4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

B1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = [-1, 3)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $f(D_f) = [-2, 2)$.

B2. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 2]$ με $f(-1) \cdot f(0) < 0$ και $f(0) \cdot f(2) < 0$, οπότε για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 2]$.

B3. Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 0$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 2$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και τα x_1, x_2 βρίσκονται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

B4.

- Αν $k < -2$ η εξίσωση $f(x) = k$ είναι αδύνατη.
- Αν $k \in [-2, -1)$ η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς 1 λύση.
- Αν $k = -1$ η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς 2 λύσεις.
- Αν $k \in (-1, 1)$ η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς 3 λύσεις.
- Αν $k = 1$ η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς 2 λύσεις.
- Αν $k \in (1, 2)$ η έχει ακριβώς 1 λύση.
- Αν $k \geq 2$ η εξίσωση $f(x) = k$ είναι αδύνατη.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^x (f(x) + f'(x)) = 2x - 1 \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2x - 1 \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (x^2 - x)' \Leftrightarrow$$

$e^x f(x) = x^2 - x + c$, $c \in \mathbb{R}$ (1). Η γραφική της παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα $f(0) = 0$. Στην (1) για $x = 0$ έχουμε $e^0 f(0) = 0^2 - 0 + c \Leftrightarrow c = 0$.

$$\text{Άρα } f(x) = (x^2 - x)e^{-x}.$$

Γ2. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = [(x^2 - x)e^{-x}]' = (x^2 - x)'e^{-x} + (x^2 - x)(e^{-x})' = (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x)e^{-x} = (-x^2 + 3x - 1)e^{-x} \text{ και}$$

$$f''(x) = [(-x^2 + 3x - 1)e^{-x}]' = (-x^2 + 3x - 1)'e^{-x} + (-x^2 + 3x - 1)(e^{-x})' = (-2x + 3)e^{-x} - (-x^2 + 3x - 1)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = 4$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)e^{-x} > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ ή } x > 4 \text{ άρα } f \text{ 3 } (-\infty, 1] \text{ και } f \text{ 3 } [4, +\infty).$$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 4)e^{-x} < 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow 1 < x < 4$ άρα f 4 $[1, 4]$ και επειδή ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στα σημεία με τετμημένη 1 και 4 η f παρουσιάζει

σημεία καμπής στα σημεία $A(1, f(1)) \equiv A(1, 0)$ και $B(4, f(4)) \equiv B\left(4, \frac{12}{e^4}\right)$.

Γ3. Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x)e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 1)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = 0$$

Άρα η $y = 0$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - x)e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^{-x} = -\infty \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)e^{-x} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$ άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

Γ4. i. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

$f(1) = 0$ και $f'(1) = (-1^2 + 3 \cdot 1 - 1)e^{-1} = \frac{1}{e}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{1}{e}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{x - 1}{e}$.

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \cdot 2026^x}{x^2 \cdot e^{-x+1} - x \cdot e^{-x+1} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \cdot 2026^x}{x^2 \cdot e^{-x} \cdot e^{-x+1} - x \cdot e^{-x} \cdot e^{-x+1} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \cdot 2026^x}{e \left(x^2 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} - \frac{x-1}{e} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2026^x}{\left(x^2 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} - \frac{x-1}{e} \right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2026^x}{\left(f(x) - \frac{x-1}{e} \right)}$$

Για $x < 1$ η f είναι κυρτή και επειδή $y = \frac{x-1}{e}$ η εφαπτομένη της ισχύει

$f(x) > \frac{x-1}{e} \Leftrightarrow f(x) - \frac{x-1}{e} > 0$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(f(x) - \frac{x-1}{e} \right) = 0$, και $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2026^x = 2026$ θα έχουμε

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2026^x}{\left(f(x) - \frac{x-1}{e} \right)} = +\infty.$$

Για $x \in (1, 4]$ η f είναι κοίλη και επειδή $y = \frac{x-1}{e}$ η εφαπτομένη της ισχύει

$f(x) < \frac{x-1}{e} \Leftrightarrow f(x) - \frac{x-1}{e} < 0$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(f(x) - \frac{x-1}{e} \right) = 0$, και $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2026^x = 2026$ θα έχουμε

$$\text{ότι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2026^x}{\left(f(x) - \frac{x-1}{e} \right)} = -\infty. \text{ Άρα το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e \cdot 2026^x}{x^2 \cdot e^{-x+1} - x \cdot e^{-x+1} - x + 1} \text{ δεν υπάρχει.}$$

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) - g(x) = x \cdot \alpha(x)$, $x \neq 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \alpha(x)) = 0 \cdot (1 + f(0) - g(0)) = 0 = f(0) - g(0)$ αφού οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες άρα και συνεχείς.

Επομένως $f(0) = g(0)$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} (f'(x) - g'(x)) = f'(0) - g'(0)$ οπότε

$$f'(0) - g'(0) = 1 \Leftrightarrow f'(0) = g'(0) + 1.$$

Δ2. Η συνάρτηση h είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με $h'(x) = f'(x) - g'(x)$,

$h''(x) = f''(x) - g''(x) \neq 0$ αφού $f''(x) \neq g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η h'' είναι συνεχής στο \mathbb{R} αφού είναι 3 φορές παραγωγίσιμη άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα η h' είναι γνησίως μονότονη.

Από το θεώρημα Μέσης Τιμής για την h στο $[0,1]$, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = h(1) = f(1) - g(1) \text{ αφού } h(0) = f(0) - g(0) = 0. \text{ Είναι}$$

$$f'(0) - f(1) < g'(0) - g(1) \Leftrightarrow f'(0) - g'(0) < f(1) - g(1) \Leftrightarrow h'(0) < f(1) - g(1) \Leftrightarrow h'(0) < h'(\xi).$$

Επειδή $0 < \xi < 1$, $h'(0) < h'(\xi)$ και η h' είναι γνησίως μονότονη, θα είναι γνησίως αύξουσα, άρα η h είναι κυρτή.

Δ3. Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο 0 .

Η (ε) έχει εξίσωση $y - h(0) = h'(0) \cdot x \Leftrightarrow y = x$ αφού $f'(0) - g'(0) = 1 \Leftrightarrow h'(0) = 1$.

Η h είναι κυρτή άρα βρίσκεται πάνω από την (ε) εκτός από το σημείο επαφής.

Επομένως $h(x) \geq x \Leftrightarrow h(x) - x \geq 0 \Leftrightarrow k(x) \geq k(0)$ άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 , το $k(0) = 0$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h(x)}{h(x) \cdot k(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu h(x)}{h(x)} \cdot \frac{1}{k(x)} \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h(x)}{h(x)} \stackrel{u=h(x)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

και $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0$ με $k(x) > 0$ για $x \neq 0$.

Δ4. Είναι $h(x) \geq x$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$ οπότε

$$\int_0^4 h(x) dx > \int_0^4 x dx \Leftrightarrow \int_0^4 h(x) dx > \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 \Leftrightarrow \int_0^4 h(x) dx > 8.$$

Δ5. Είναι $k(x) \geq 0$ οπότε $E = \int_0^2 k(x) dx \Leftrightarrow 6 = \int_0^2 (h(x) - x) dx \Leftrightarrow$

$$6 = \int_0^2 h(x) dx - \int_0^2 x dx \Leftrightarrow 6 = \int_0^2 h(x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \Leftrightarrow 6 = \int_0^2 h(x) dx - 2 \Leftrightarrow \int_0^2 h(x) dx = 8.$$

$$\text{Επίσης } \int_0^2 H(x) dx = \int_0^2 x' \cdot H(x) dx = [x \cdot H(x)]_0^2 - \int_0^2 x \cdot H'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 H(x) dx = 2H(2) - \int_0^2 x \cdot h(x) dx.$$

Είναι $h(x) \geq x \Leftrightarrow x \cdot h(x) \geq x^2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως

$$\int_0^2 x \cdot h(x) dx > \int_0^2 x^2 dx \Leftrightarrow \int_0^2 x \cdot h(x) dx > \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 x \cdot h(x) dx > \frac{8}{3} \Leftrightarrow -\int_0^2 x \cdot h(x) dx < -\frac{8}{3} \quad (1).$$

$$\text{Όμως } H(2) < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 2H(2) < \frac{16}{3} \quad (2).$$

$$\text{Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε } 2H(2) - \int_0^2 x \cdot h(x) dx < \frac{16}{3} - \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_0^2 H(x) dx < \frac{8}{3}.$$