

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 1<sup>ου</sup> ΓΕΛ ΑΜΦΙΣΣΑΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 4 ΜΑΪΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λανθασμένη καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

- i) Οι ρητές συναρτήσεις  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , με βαθμό του αριθμητή  $P(x)$  μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά 2 του βαθμού του παρονομαστή  $Q(x)$  δεν έχουν οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες,
- ii) Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$ .
- iii) Αν το  $A(x_0, f(x_0))$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$  και η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε  $f''(x_0) = 0$ .
- iv) Ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.
- v) Αν  $a > 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = -\infty$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι ίσες συναρτήσεις  $f, g : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\alpha x^2}{x-1}$  και

$$g(x) = x + 1 + \frac{x^2 + \beta}{x-1}.$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$  και  $\beta = 1$ .

**Μονάδες 4**

**B2.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $h(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ . Να ορίσετε την  $f \circ h$ .

**Μονάδες 4**

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι  $\varphi(x) = (f \circ h)(x) = \frac{2}{x-x^2}$ ,  $x > 1$ .

**B3. i)** Να αποδείξετε ότι η  $\varphi$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $\varphi^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

**ii)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $\varphi^{-1}$  δεν τέμνει την ευθεία  $y = x$ .

**Μονάδες 5**

**B4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 \varphi(x) + \eta\mu(3x)]$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει η σχέση

$$|x^2 f'(x) - 1| = e^{2-f(x)} + 1 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται επιπλέον ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $K(1, 2)$  σχηματίζει γωνία  $\frac{3\pi}{4}$  με τον άξονα  $x'x$ .

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ  
1<sup>ο</sup> ΓΕΛ ΑΜΦΙΣΣΑΣ

Γ1. Να αποδείξετε ότι  $x^2 f'(x) - 1 < 0$  για κάθε  $x > 0$ .

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2 - \ln x$ ,  $x > 0$  και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

Μονάδες 6

Γ3. Έστω  $\Omega$  το χωρίο που σχηματίζεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , του άξονα  $x'x$ , του άξονα  $y'y$  και της ευθείας  $y = 1$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E(\Omega)$  του χωρίου  $\Omega$ .

Μονάδες 5

Γ4. Δίνονται τα κινητά σημεία  $M(x, f(x))$ ,  $A(x, 0)$  και  $B(0, f(x))$  με  $0 < x < e^2$ . Έστω επίσης ότι  $t_0$  είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία η εφαπτομένη της  $f$  στο σημείο  $M$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $AB$ .

i) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου  $M$  την χρονική στιγμή  $t_0$  είναι  $x(t_0) = e$ .

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου  $ABM$  την χρονική στιγμή  $t_0$ .

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \epsilon\phi x - x^4, & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}(\sigma\upsilon\nu x - 1) + x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ .

Δ1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Μονάδες 3

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ  
1<sup>ο</sup> ΓΕΛ ΑΜΦΙΣΣΑΣ

**Δ2. i)** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = x$  εφάπτεται της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .

**:Μονάδες 4**

**ii)** Να αποδείξετε ότι:

η εξίσωση  $f(x) = x$  έχει μοναδική λύση την  $x = 0$  (μονάδες 3) και

στη συνέχεια ότι  $f(x) \leq \eta\mu x$  για κάθε  $x \leq 0$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση  $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι  $\int_0^{-x_0} f(x) \sin x dx > \frac{2}{\pi^2}$ , όπου  $x_0$  η θέση μεγίστου της  $f$  του ερωτήματος Δ3.

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)**

- 1. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω - πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 9.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**Οι Μαθηματικοί: Κοκκίνου Ιωάννα, Καραγεώργου Ιωάννα, Τσάτσος Χρήστος**