5Η ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΟΙΚΕΙΩΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) Ισχύει $\lim_{x\to-\infty} e^x=-\infty$

γ) Για κάθε συνάρτηση f το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

δ) Ισχύει $\left(\ln|x|\right)'=-\frac{1}{x}$ για κάθε $x<0$.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 4

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα (μον. 4), να βρείτε όλες τις ασύμπτωτές της και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση. (μον. 6)

Μονάδες 10

Β3. Να βρείτε την αρχική F της συνάρτησης f στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$, με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της F διέρχεται από το σημείο $N\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $F(x) = 2026$.

Μονάδες 6

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (1,2).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$

Γ1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η h αντιστρέφεται και ότι $h^{-1}(x) = 3x^2 + 2$, $x \geq 0$

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το σημείο Ν της γραφικής παράστασης της f που έχει από το σημείο $A\left(\frac{5}{2},0\right)$ τη μικρότερη απόσταση (μον. 3). Αν $N(2,1)$ να αποδείξετε ότι $AN \perp (\varepsilon)$, όπου (ε) είναι η εφαπτομένη της C_f στο N. (μον. 2)

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g.

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}+1} \quad \text{και} \quad P = \lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu x}{h^{-1}(x)}$$

Μονάδες 2+3

Γ5. Δίνεται το μεταβλητό σημείο Μ(α,f(α)) της γραφικής παράστασης. Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/min, να βρείτε το ρυθμό που μεταβάλλεται η τεταγμένη του Μ, τη χρονική στιγμή που το σημείο Μ απέχει από τον άξονα των τεταγμένων απόσταση ίση με 10 cm.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

- $x^2f^2(x)+1 = x^2e^{2x} - 2xf(x)$, $x > 0$ και
- $f(1) = e-1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης (μονάδες 3) .

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f^{-1}(e^x - \frac{1}{x} + e - 1) + f^{-1}(e-1) = 2$$

έχει μοναδική ρίζα ρ στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι αν η F είναι μια αρχική της f, τότε $F(1)+F(3) > 2F(2)$.

Μονάδες 5

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)</u>

1. Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
3. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
4. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
5. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ