23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

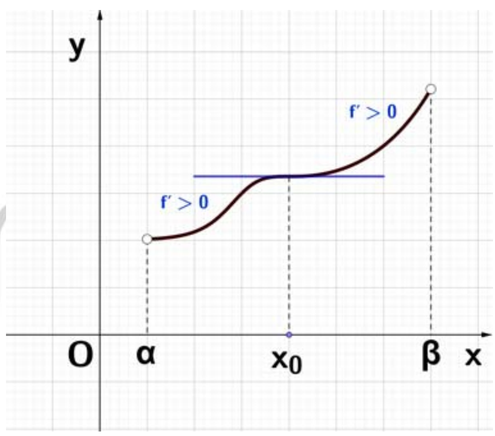
38ο ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -Ενδεικτικές απαντήσεις

Α1. Έχουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 άρα

- η f **είναι** συνεχής στο $(\alpha,x_0]$ και $f'(x)>0$ για κάθε (α,x_0) επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$.
- **Όμοια** η f **είναι** συνεχής στο $[x_0,\beta)$ και $f'(x)>0$ για κάθε (x_0,β) επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$.

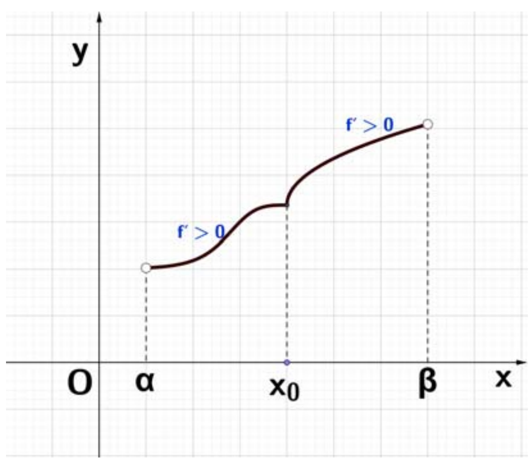
Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Άρα για κάθε $x_1<x_0<x_2$ θα ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$ (δηλαδή η f στο διάστημα (α,β) λαμβάνει τιμές και μικρότερες και μεγαλύτερες από το $f(x_0)$) άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f.

Θα δείξουμε τώρα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).



Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$ τότε:

- Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$.
- Τέλος αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.



Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις δηλαδή για κάθε $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

Α2. Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού:

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)=\left[G(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική ή παράγουσα της f στο Δ, ονομάζεται κάθε συνάρτηση F, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Α4. Για τον ισχυρισμό

«Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$.»

α. Ψευδής

β. Αφού το α μπορεί να είναι **ίσο** με το β και τότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με μηδέν ή το α μπορεί να είναι **μικρότερο** του β και τότε το ολοκλήρωμα είναι αρνητικό.

Α5.

α. Αν μια συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$, τότε σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$

ΣΩΣΤΟ (συνδυασμός της συνέπειας του ορισμού του ορίου σελίδα 43 β) και του ορισμού της συνέχειας σε σημείο σελίδα 70)

β. Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε το μέγιστο της, είναι σε κάθε περίπτωση, το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

ΣΩΣΤΟ (γιατί η συνάρτηση σαν συνεχής σε κλειστό διάστημα σύμφωνα με το θεώρημα της Μέγιστης και της Ελάχιστης τιμής λαμβάνει μέγιστο, επομένως θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα συνδυασμός Θεωρήματος σελίδας 77 και του σχολίου ii) σελίδα 142)

γ. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2=\mathbb{R}-\{x\,|\,\eta\mu x=0\}$ και ισχύει ότι $f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$

ΣΩΣΤΟ (σελίδα 114)

δ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq 0$, για όλα τα $x\in(0,1)$ τότε αναγκαστικά $f(0)\neq f(1)$.

ΣΩΣΤΟ (Με απαγωγή σε Άτοπο: Αν οι τιμές στα άκρα 0 και 1 ήταν ίσες τότε η συνάρτηση f στο διάστημα [0,1] ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Θεωρήματος Rolle επομένως θα υπήρχε σημείο στο (α,β) στο οποίο

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

μηδενίζεται η παράγωγος της f. Το οποίο δεν μπορεί να ισχύει αφού η παράγωγος της f δεν μηδενίζεται στο διάστημα(α,β).)

ε. Για κάθε ζεύγος f,g συνεχών συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ισχύει σε κάθε περίπτωση ότι:

$$\int_\alpha^\beta\left[\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x)\right]dx=\lambda\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx+\mu\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

ΣΩΣΤΟ (Θεώρημα Ι σελίδα 214)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και για κάθε $x>0$ ισχύει ότι: $f(x)=x\cdot(f(x)+\ell nx)$ έτσι προφανώς

$f(x)=x\cdot f(x)+x\cdot\ell nx$, για κάθε $x>0$ $\Leftrightarrow$

$f(x)-x\cdot f(x)=x\cdot\ell nx$, για κάθε $x>0$ $\Leftrightarrow$

$\boxed{(1-x)\cdot f(x)=x\cdot\ell nx}$, για κάθε $x>0$.

- **Αν $x>0$ και $x\neq1$ έχουμε** $\boxed{f(x)=\dfrac{x\cdot\ell nx}{1-x}}$, $0<x\neq1$

- Αν $x=1$ αφού η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι συνεχής και στο $x_0=1$

επομένως $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\cdot\ell nx}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\left(-x\cdot\dfrac{\ell nx}{x-1}\right)$

- $\lim\limits_{x\to1}(-x)=-1$

- $h(x)=\ell nx$ όπως ξέρουμε είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ και ισχύει ότι

$h'(x)=(\ell nx)'=\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x>0$, επομένως $h'(1)=\dfrac{1}{1}=1$, όμως

$$h'(1)=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ell nx-\ell n1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\ell nx-0}{x-1}\boxed{=\lim_{x\to1}\frac{\ell nx}{x-1}=1}$$

Σημείωση: Πολλοί μαθητές «υπολογίζουν» το παραπάνω όριο με χρήση του 1ου κανόνα De L' Hôpital

$$\lim_{x\to1}\frac{\ell nx}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(\ell nx)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

το οποίο **επιτρέπεται ΜΟΝΟ για μαθητές!! (*) Βλέπε παρακάτω σχόλιο**

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

Άρα $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot \ell nx}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\left(-x\cdot\dfrac{\ell nx}{x-1}\right)=-1\cdot 1=-1$

Επομένως $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot\ell nx}{1-x}, & 0<x\neq 1\\ -1, & x=1\end{cases}$

B2. Για την μονοτονία της f : Η f **είναι παραγωγίσιμη για κάθε** $0<x\neq 1$ **ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει ότι**

$$f'(x)=\left(\frac{x\cdot\ell nx}{1-x}\right)'=\frac{(x\cdot\ell nx)'\cdot(1-x)-x\cdot\ell nx\cdot(1-x)'}{(1-x)^2},\ 0<x\neq 1 \text{ ή}$$

$$f'(x)=\frac{\left[(x)'\cdot\ell nx+x\cdot(\ell nx)'\right]\cdot(1-x)-x\cdot\ell nx\cdot(-1)}{(1-x)^2},\ 0<x\neq 1$$

$$f'(x)=\frac{\left[\ell nx+x\cdot\frac{1}{x}\right]\cdot(1-x)+x\cdot\ell nx}{(1-x)^2},0<x\neq 1$$

$$f'(x)=\frac{(\ell nx+1)\cdot(1-x)+x\cdot\ell nx}{(1-x)^2}=\frac{\ell nx\cancel{-x\cdot\ell nx}+1-x+\cancel{x\cdot\ell nx}}{(1-x)^2},0<x\neq 1$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{\ell nx+1-x}{(1-x)^2}},0<x\neq 1$$

παρατηρούμε ότι το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή της αφού $(1-x)^2>0$, για κάθε $0<x\neq 1$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι ισχύει $\ell nx\leq x-1$, για κάθε $x>0$ και το "=" μόνο για $x=1$, επομένως

$\ell nx<x-1$, για κάθε $0<x\neq 1\Leftrightarrow \boxed{\ell nx+1-x<0}$, για κάθε $0<x\neq 1$

Άρα $f'(x)=\dfrac{\ell nx+1-x}{(1-x)^2}<0$, για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

Έτσι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, άρα το $f(1)$ δεν είναι ακρότατο για την f και η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της $A=(0,+\infty)$.

Και το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to0^+} f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\ell nx}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\ell nx\right)=(-1)\cdot(+\infty)=-\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{-1}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=-1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ell nx=+\infty$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to{}^+}\frac{x\cdot\ell nx}{1-x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ell nx}{\frac{1-x}{x}}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}-1}\right)\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)\underset{DLH}{\overset{2ος\,κ}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ell nx)'}{\left(\frac{1}{x}-1\right)'}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to0^+} f(x)\right)=(-\infty,0)$$

Επομένως η $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)\subseteq\mathbb{R}$ σαν γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,+\infty)$ **είναι και** $1-1$ **άρα** αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή το $f(A)=(-\infty,0)$

Άρα η $f^{-1}:f(A)\to A\subseteq\mathbb{R}$ ή $f^{-1}:(-\infty,0)\to(0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}$

Σημείωση: Δεν είναι απαραίτητο να μελετήσουμε την παραγωγισιμότητα της f **στο** $x_0=1$, εκτός αν μας ζητούσαν κάτι σχετικό, όπως για παράδειγμα την εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $A(1,f(1))$… τότε

για $x\neq1$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x\cdot\ell nx}{1-x}-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x\cdot\ell nx}{1-x}+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x\cdot\ell nx+1-x}{1-x}}{x-1}\ \text{ή}$$

$$\lim_{x\to1}\left(-\frac{x\cdot\ell nx+1-x}{(x-1)^2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1-x\cdot\ell nx}{(x-1)^2}\left(\frac{0}{0}\right)\underset{DLH}{\overset{1ος\,κ}{=}}\lim_{x\to1}\frac{(x-1-x\cdot\ell nx)'}{\left((x-1)^2\right)'}=$$

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\left(1\cdot \ell nx + x\cdot \frac{1}{x}\right)}{2(x-1)(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\ell nx-1}{2(x-1)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\ell nx}{x-1} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$ και $f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$

Β3. Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu t| \le |t|$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$ και το "=" μόνο για $t=0$

Έτσι για κάθε $t<0$ ισχύει ότι $|\eta\mu t| < |t|$ ή $|\eta\mu t| < -t$, αφού $|t| = -t$

ή για κάθε $t<0$ ισχύει ότι $-(-t) < \eta\mu t < -t$ δηλαδή

για κάθε $t<0$ ισχύει ότι $t < \eta\mu t < -t$

Άρα για κάθε $t<0$ ισχύει ότι $\boxed{t < \eta\mu t}$

Επομένως αν θέσουμε όπου $t = f(x)$, με δεδομένο ότι για κάθε $x>0$ αποδείξαμε ότι $f(x)<0$, άρα $t = f(x) < 0 \Rightarrow \boxed{f(x) < \eta\mu f(x)}$, για κάθε $x>0$.

Για το όριο: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$

θέτουμε όπου $t = f(x)$ **και τότε** $\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, **επομένως**

$\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|} = 0}$. **Και τότε έχουμε ότι**

για κάθε $x>0$ ισχύει: $\left|\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}\right| = \frac{|\eta\mu(f(x))|}{|f(x)|} \le \frac{1}{|f(x)|}$ και $f(x)<0$ **άρα**

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{|f(x)|} \le \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} \le \frac{1}{|f(x)|} \\ \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right) = 0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|} \end{array}\right\} \overset{\kappa.\pi.}{\Rightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} = 0}$$

Β3. Για την ισότητα $\int_1^e f(x)dx + \int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(x)dx = \frac{e^2-e+1}{1-e}$

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

έχουμε αποδείξει ότι η $f:(0,+\infty)\to(-\infty,0)\subseteq\mathbb{R}$ αντιστρέφεται και ορίζεται η $f^{-1}:(-\infty,0)\to(0,+\infty)\subseteq\mathbb{R}$, και όπως ξέρουμε ισχύει τότε η ισοδυναμία

$\boxed{y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)}$ και ισχύουν επίσης

- $\boxed{f^{-1}(f(x))=x}$ για κάθε $x\in A=(0,+\infty)$ και
- $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$, για κάθε $y\in f(A)=(-\infty,0)$ ή

  $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, για κάθε $x\in f(A)=(-\infty,0)$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_1=\displaystyle\int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(x)dx$,

$I_1=\displaystyle\int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(x)dx=\int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(y)dy$ στο οποίο θέτουμε όπου $y=f(x)$ και τότε τα

άκρα: Όταν $y=-1\Leftrightarrow f(x)=-1\Leftrightarrow f(x)=f(1)\underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}}x=1$

ενώ όταν $y=\dfrac{e}{1-e}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e\cdot 1}{1-e}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{e\cdot \ell ne}{1-e}\Leftrightarrow f(x)=f(e)\underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}}x=e$ **και**

(το διαφορικό) $dy=f'(x)dx$ επομένως

$$\int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(y)dy=\int_{1}^{e} f^{-1}(f(x))\cdot f'(x)dx\Leftrightarrow$$

$$\int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(y)dy=\int_{1}^{e} x\cdot f'(x)dx\Leftrightarrow$$

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

$$\int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(x)dx = \left[x\cdot f(x)\right]_1^e - \int_1^e (x)'\cdot f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(x)dx = \left[e\cdot f(e) - 1\cdot f(1)\right] - \int_1^e 1\cdot f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e f(x)dx + \int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(x)dx = e\cdot\frac{e}{1-e} - (-1) \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e f(x)dx + \int_{-1}^{\frac{e}{1-e}} f^{-1}(x)dx = \frac{e^2+1-e}{1-e}.$$

(*) Σχόλιο:

για τον υπολογισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ell nx}{x-1}$ **με τον κανόνα του De L' Hôpital:** Δυστυχώς, αποτελεί αποθέωση του φαύλου κύκλου στα Μαθηματικά, αφού στην απόδειξη της παραγώγου της συνάρτησης $h(x)=\ell nx$, χρησιμοποιείται το όριο αυτό που προσπαθούμε να υπολογίσουμε...... για το τυχαίο $x_0>0$ και για $x\neq x_0$

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ell nx-\ell nx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ell n\frac{x}{x_0}}{x_0\left(\frac{x}{x_0}-1\right)}$$

και θέτοντας $h=\frac{x}{x_0}$, **τότε** $\lim\limits_{x\to x_0}h=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x}{x_0}=1$

$$h'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\ell nx-\ell nx_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ell n\frac{x}{x_0}}{x_0\left(\frac{x}{x_0}-1\right)}=\lim_{h\to 1}\frac{\ell nh}{x_0(h-1)}=\lim_{h\to 1}\left[\frac{1}{x_0}\cdot\frac{\ell nh}{h-1}\right]=\frac{1}{x_0}\cdot 1=\frac{1}{x_0}$$

23ns Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση
Άρα θα είναι της μορφής

$\boxed{f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0}$, με $\alpha_\nu\neq 0$ και όλοι οι εκθέτες $\nu,\nu-1,\nu-2,\ldots..\in\mathbb{N}$

δηλαδή θα είναι ν βαθμού, τότε προφανώς

$f'(x)=\nu\alpha_\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-2}+\ldots+2\alpha_2x+\alpha_1$,

η παράγωγος της θα είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση $\nu-1$ βαθμού
επομένως και η

$\boxed{f'(-x)=\nu\alpha_\nu(-x)^{\nu-1}+(\nu-1)\alpha_{\nu-1}(-x)^{\nu-2}+\ldots-2\alpha_2x+\alpha_1}$

θα είναι επίσης μια πολυωνυμική συνάρτηση $\nu-1$ βαθμού
τότε και η δεύτερη παράγωγος της f είναι:

$f''(x)=\nu(\nu-1)\alpha_\nu x^{\nu-2}+(\nu-1)(\nu-2)\alpha_{\nu-1}x^{\nu-3}+\ldots+2\alpha_2$

δηλαδή μια πολυωνυμική συνάρτηση $\nu-2$ βαθμού, επομένως

$\boxed{f''(2-x)=\nu(\nu-1)\alpha_\nu(2-x)^{\nu-2}+(\nu-1)(\nu-2)\alpha_{\nu-1}(2-x)^{\nu-3}+\ldots+2\alpha_2}$

θα είναι επίσης μια πολυωνυμική συνάρτηση $\nu-2$ βαθμού
Επομένως η συνάρτηση
$f(x)+f'(-x)+f''(2-x)$ τελικά θα είναι μια συνάρτηση το πολύ ν βαθμού, εξαιτίας της f και μάλιστα ο μεγιστοβάθμιος όρος της θα είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος της f δηλαδή ο $\alpha_\nu x^\nu$

Έτσι, αφού από υπόθεση έχουμε

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+f'(-x)+f''(2-x)}{x^5+2x^4+3x^3-2x+1}=1$ όμως

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+f'(-x)+f''(2-x)}{x^5+2x^4+3x^3-2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{x^5}=\alpha_\nu\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{x^\nu}{x^5}$$

I. Αν $\nu>5$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+f'(-x)+f''(2-x)}{x^5+2x^4+3x^3-2x+1}=\alpha_\nu\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}x^{\nu-5}=\alpha_\nu\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$

Άτοπο αφού από υπόθεση έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+f'(-x)+f''(2-x)}{x^5+2x^4+3x^3-2x+1}=1$.

Άρα $\boxed{\nu\not>5}$

II. Αν $0\le\nu<5$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+f'(-x)+f''(2-x)}{x^5+2x^4+3x^3-2x+1}=\alpha_\nu\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^{5-\nu}}=\alpha_\nu\cdot 0=0$

Άτοπο αφού από υπόθεση έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)+f'(-x)+f''(2-x)}{x^5+2x^4+3x^3-2x+1}=1$.

Άρα έχουμε επίσης ότι: $\boxed{\nu\not<5}$.

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

III. Επομένως αναγκαστικά $\boxed{\nu=5}$ δηλαδή η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0$ είναι $5^{ου}$ βαθμού

Άρα $f(x)=\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\kappa x+\lambda$ έτσι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+f'(-x)+f''(2-x)}{x^5+2x^4+3x^3-2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha x^5}{x^5}=\alpha\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5}{x^5}=\alpha$$ όμως

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+f'(-x)+f''(2-x)}{x^5+2x^4+3x^3-2x+1}=1$$ επομένως $\boxed{\alpha=1}$.

$\boxed{f(x)=x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\delta x^2+\kappa x+\lambda}$ και τότε

$\boxed{f'(x)=5x^4+4\beta x^3+3\gamma x^2+2\delta x+\kappa}$

Γ2.

Από υπόθεση έχουμε ότι: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A=(0,f(0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με -2, επομένως $f'(0)=-2\Rightarrow 5\cdot 0^4+4\beta\cdot 0^3+3\gamma\cdot 0^2+2\delta\cdot 0+\kappa=-2\Rightarrow\boxed{\kappa=-2}$.

Επίσης $f''(x)=\left(5x^4+4\beta x^3+3\gamma x^2+2\delta x+\kappa\right)'=20x^3+12\beta x^2+6\gamma x+2\delta$

και από την υπόθεση η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της παραγώγου , δηλαδή της f' , στο σημείο της $B=(0,f'(0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με -2, επομένως

$f''(0)=-2\Rightarrow 20\cdot 0^3+12\beta\cdot 0^2+6\gamma\cdot 0+2\delta=-2\Rightarrow\boxed{\delta=-1}$

Άρα τελικά

$\boxed{f(x)=x^5+\beta x^4+\gamma x^3-x^2-2x+\lambda}$

Έχουμε επίσης από υπόθεση ότι $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x^2+2x+1}=-2$

Έτσι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $G(x)=\frac{f(x)}{x^2+2x+1}$ τότε προφανώς

έχουμε $\lim_{x\to-1}G(x)=-2$ και $\boxed{f(x)=\left(x^2+2x+1\right)\cdot G(x)}$ ή $\boxed{f(x)=(x+1)^2\cdot G(x)}$

τότε προφανώς επειδή η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική ισχύει ότι $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$ ενώ

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\left[(x+1)^2\cdot G(x)\right]=0\cdot(-2)=0$$

Άρα $f(-1)=0\Rightarrow(-1)^5+\beta\cdot(-1)^4+\gamma\cdot(-1)^3-(-1)^2-2(-1)+\lambda=0$ ή

$-1+\beta-\gamma-1+2+\lambda=0\Rightarrow\boxed{\lambda=\gamma-\beta}$

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

τότε το $\boxed{f(x)=x^5+\beta x^4+\gamma x^3-x^2-2x+\gamma-\beta}$

και με δεδομένο ότι $f(-1)=0$, άρα το πολυώνυμο $f(x)$, έχει για παράγοντα το διώνυμο $x+1$ έτσι το $f(x)$ θα γράφεται

$f(x)=(x+1)\cdot\pi(x)$, Για τον προσδιορισμό του πηλίκου $\pi(x)$, κάνουμε Horner στο $f(x)$ με το $x+1$

x^5	x^4	x^3	x^2	x	σταθερός	$x-\rho$
1	β	γ	-1	-2	$\gamma-\beta$	
$\downarrow$	-1	$1-\beta$	$-1-\gamma+\beta$	$2+\gamma-\beta$	$\beta-\gamma$	$\rho=-1$
4ου 1	$\beta-1$	$1+\gamma-\beta$	$-2-\gamma+\beta$	$\gamma-\beta$	0	

$\pi(x)=x^4+(\beta-1)x^3+(1+\gamma-\beta)x^2+(\beta-\gamma-2)x+\gamma-\beta$

τότε $f(x)=(x+1)\cdot\left(x^4+(\beta-1)x^3+(1+\gamma-\beta)x^2+(\beta-\gamma-2)x+\gamma-\beta\right)$ και έτσι η $G(x)$ γίνεται

$$G(x)=\frac{f(x)}{x^2+2x+1}=\frac{\cancel{(x+1)}\cdot\left(x^4+(\beta-1)x^3+(1+\gamma-\beta)x^2+(\beta-\gamma-2)x+\gamma-\beta\right)}{(x+1)^{\cancel{2}}}$$

$$G(x)=\frac{x^4+(\beta-1)x^3+(1+\gamma-\beta)x^2+(\beta-\gamma-2)x+\gamma-\beta}{x+1}=\frac{\pi(x)}{x+1},$$

για την οποία έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to-1}G(x)=-2$

έτσι $\boxed{\pi(x)=(x+1)\cdot G(x)}$

και προφανώς αφού η $\pi(x)=x^4+(\beta-1)x^3+(1+\gamma-\beta)x^2+(\beta-\gamma-2)x+\gamma-\beta$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση $\lim\limits_{x\to-1}\pi(x)=\pi(-1)$ και

$\lim\limits_{x\to-1}\pi(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left[(x+1)\cdot G(x)\right]=0\cdot(-2)=0$ άρα

$$\pi(-1)=0\Rightarrow(-1)^4+(\beta-1)\cdot(-1)^3+(1+\gamma-\beta)\cdot(-1)^2+(\beta-\gamma-2)(-1)+\gamma-\beta=0$$

$$1-(\beta-1)+1+\gamma-\beta-\beta+\gamma+2+\gamma-\beta=0\Rightarrow1-\beta+1+1+\gamma-\beta-\beta+\gamma+2+\gamma-\beta=0$$

$$5-4\beta+3\gamma=0\Rightarrow3\gamma=4\beta-5\Rightarrow\boxed{\gamma=\frac{4}{3}\beta-\frac{5}{3}}$$

τότε το πολυώνυμο $\pi(x)$ γίνεται

$$\pi(x)=x^4+(\beta-1)x^3+\left(1+\frac{4}{3}\beta-\frac{5}{3}-\beta\right)x^2+\left(\beta-\frac{4}{3}\beta+\frac{5}{3}-2\right)x+\frac{4}{3}\beta-\frac{5}{3}-\beta$$

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

$$\pi(x)=x^4+(\beta-1)x^3+\left(\frac{1}{3}\beta-\frac{2}{3}\right)x^2+\left(-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{3}\right)x+\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}$$

τότε επειδή $\pi(-1)=0$ άρα και το $\pi(x)$ έχει για παράγοντα το $x+1$ άρα θα γράφεται $\pi(x)=(x+1)\cdot R(x)$, Για τον προσδιορισμό του πολυωνύμου $R(x)$ κάνουμε Horner στο $\pi(x)$ με το $x+1$

x^4	x^3	x^2	x	σταθερός	$x-\rho$
1	$\beta-1$	$\frac{1}{3}\beta-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}$	$\rho=-1$
$\downarrow$	-1	$2-\beta$	$\frac{2}{3}\beta-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}\beta+\frac{5}{3}$	
$3^{ου}$ 1	$\beta-2$	$-\frac{2}{3}\beta+\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}$	0	

$$R(x)=x^3+(\beta-2)x^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\beta\right)x+\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}$$

τότε $\pi(x)=(x+1)\left(x^3+(\beta-2)x^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\beta\right)x+\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}\right)$

έτσι η $G(x)$ γίνεται

$$G(x)=\frac{\pi(x)}{x+1}=\frac{\cancel{(x+1)}\cdot\left(x^3+(\beta-2)x^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\beta\right)x+\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}\right)}{\cancel{x+1}}$$

Άρα $G(x)=x^3+(\beta-2)x^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\beta\right)x+\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}$

και τότε $\lim\limits_{x\to-1}G(x)=\lim\limits_{x\to-1}\left[x^3+(\beta-2)x^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\beta\right)x+\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}\right]$ ή

$\lim\limits_{x\to-1}G(x)=-1+\beta-2+\frac{2}{3}\beta-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}$ ή $\lim\limits_{x\to-1}G(x)=2\beta-6$

όμως $\lim\limits_{x\to-1}G(x)=-2\Rightarrow 2\beta-6=-2\Rightarrow 2\beta=4\Rightarrow \boxed{\beta=2}$

$\gamma=\frac{4}{3}\cdot 2-\frac{5}{3}\Rightarrow\boxed{\gamma=1}$ και $\lambda=1-2\Rightarrow\boxed{\lambda=-1}$

Έτσι $\boxed{f(x)=x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1}$ και

$\boxed{f'(x)=5x^4+8x^3+3x^2-2x-2}$

Γ3. Για το πρόσημο της f.
Από την μελέτη που έχουμε ήδη κάνει ξέρουμε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση f έχει τον αριθμό -1 ρίζα και μάλιστα διπλή άρα έχει για παράγοντα το $(x+1)^2$. Επομένως παραγοντοποιείται και λαμβάνει την

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

μορφή $f(x)=(x+1)\cdot\pi(x)$ και όπως είδαμε και το πολυώνυμο $\pi(x)$ έχει κι αυτό με τη σειρά του για παράγοντα το $x+1$ και γράφεται :

$$\pi(x)=(x+1)\left(x^3+(\beta-2)x^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\beta\right)x+\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}\right)$$ και με δεδομένο ότι $\beta=2$

τελικά το $\pi(x)$ λαμβάνει την μορφή:

$$\pi(x)=(x+1)\left(x^3+(2-2)x^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot 2\right)x+\frac{1}{3}2-\frac{5}{3}\right)=(x+1)\left(x^3-1\right)$$

Έτσι $f(x)=(x+1)\cdot\pi(x)=(x+1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^3-1\right)=(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$.

Σχόλιο

Εννοείται ότι στο ίδιο συμπέρασμα μπορούσαμε να καταλήξουμε και με δύο ακόμα τρόπους από την θεωρία πολυωνύμων της Β Λυκείου

$x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$	x^2+2x+1
$-x^5-2x^4-x^3$	x^3-1
$-x^2-2x-1$	
$+x^2+2x+1$	
0	

- Μπορούμε να κάνουμε την διαίρεση του $f(x)$ με το x^2+2x+1 και από την ταυτότητα της διαίρεσης να πάρουμε ότι

$$f(x)=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^3-1\right)+0=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^3-1\right)$$

- ή με δύο διαδοχικά Horner στο $f(x)$ με το $x+1$

$f(x)$	x^5	x^4	x^3	x^2	x	σταθερός	$x-\rho$
	1	2	1	−1	−2	−1	$\rho=-1$
		−1	−1	0	1	1	
4ου	1	1	0	−1	−1	0	
	$\pi(x)$						

$f(x)=(x+1)\cdot\pi(x)$ όπου $\pi(x)=x^4+x^3+0\cdot x^2-x-1$ και στη συνέχεια

$\pi(x)$	x^4	x^3	x^2	x	σταθερός	$x-\rho$
	1	1	0	−1	−1	$\rho=-1$
		−1	0	0	1	
3ου	1	0	0	−1	0	
	$R(x)$					

$\pi(x)=(x+1)\cdot R(x)$, όπου $R(x)=x^3-1$

Άρα $f(x)=(x+1)\cdot\pi(x)=(x+1)\cdot(x+1)\cdot\left(x^3-1\right)$

Επομένως $f(x)=(x+1)^2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$ ή $f(x)=(x+1)^2\cdot\left(x^3-1\right)$

x	$-\infty$	$x_1=-2$	-1	$x_2=0$	1	$x_3=2$	$+\infty$
$f(x)=(x+1)^2(x^3-1)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
		$f(-2)<0$		$f(0)<0$		$f(2)>0$	

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

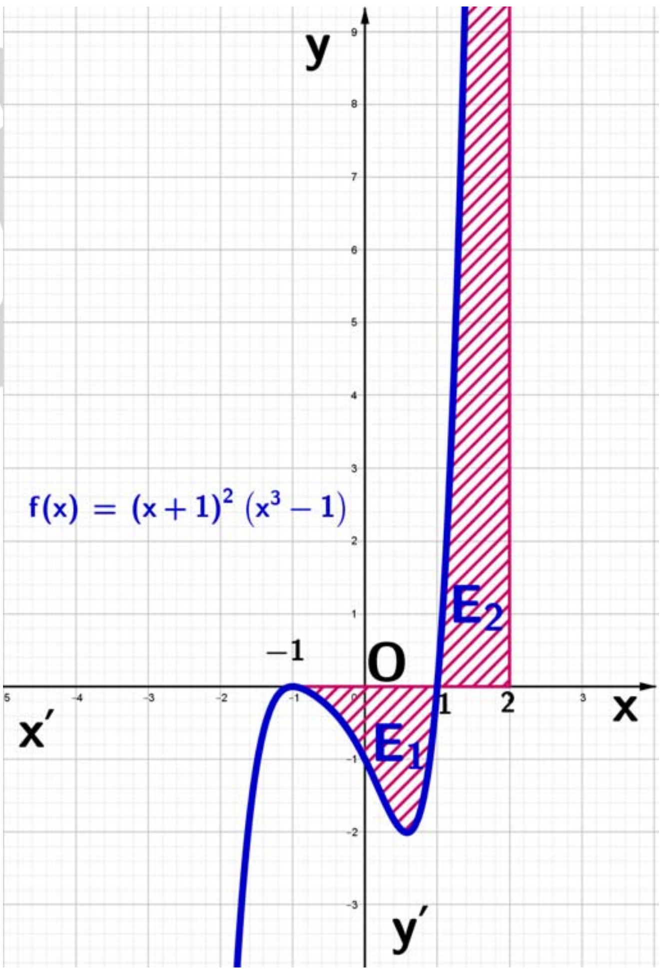
έτσι από την γνωστή διαδικασία
Επειδή η f σαν πολυωνυμική είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα που χωρίζουν οι διαδοχικές ρίζες της το πεδίο ορισμού της. Έτσι αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες της f

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή } (x+1)^2=0 \\ \text{ή } \ x-1=0 \\ \text{ή } \ x^2+x+1=0\left(\Delta=-3<0\right) \end{cases}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ή}\, x=-1\left(\delta\iota\pi\lambda\eta\right) \\ \text{ή}\, x=1\ \left(\alpha\pi\lambda\eta\right) \end{cases}.$$

- Επιλέγουμε $x_1=-2\in(-\infty,-1)$ και παρατηρούμε ότι $f(-2)=(-2+1)^2\cdot\left((-2)^3-1\right)=-9<0$, επομένως $f(x)<0$, για κάθε $x<-1$
- Επιλέγουμε $x_2=0\in(-1,1)$ και παρατηρούμε ότι $f(0)=(0+1)^2\cdot\left(0^3-1\right)=-1<0$, επομένως $f(x)<0$, για κάθε $x\in(-1,1)$
- Επιλέγουμε $x_3=2\in(1,+\infty)$ και παρατηρούμε ότι $f(2)=(2+1)^2\cdot\left(2^3-1\right)=63>0$, επομένως $f(x)>0$, για κάθε $x>1$

Σχόλιο: Προφανώς η f σαν πολυωνυμική συνάρτηση εκατέρωθεν της διπλής ρίζας της δεν μεταβάλλει το πρόσημο της και αυτό συμβαίνει γύρω από την ρίζα -1, ενώ εκατέρωθεν μιας ρίζας της περιττής πολλαπλότητας μεταβάλλει το πρόσημο της, και αυτό γίνεται γύρω από την ρίζα 1



Γ4. Για το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=2$ παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[-1,2]$ και από τον παραπάνω πίνακα για το πρόσημο της έχουμε ότι $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[-1,1]$, και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$ επομένως

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

$$E = E(\Omega) = E_1 + E_2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx + \int_{1}^{2} |f(x)|dx$$

όπου $E_1 = \int_{-1}^{1} (-f(x))dx$ και $E_2 = \int_{1}^{2} f(x)dx$, τότε διαδοχικά έχουμε:

$$E_1 = \int_{-1}^{1} -\left(x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1\right)dx = \int_{-1}^{1} \left(-x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 2x + 1\right)dx$$

$$E_1 = \left[-\frac{x^6}{6} - 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$E_1 = \left(-\frac{1^6}{6} - 2\frac{1^5}{5} - \frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} + 1^2 + 1\right) - \left(-\frac{(-1)^6}{6} - 2\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + (-1)\right)$$

$$E_1 = -\cancel{\frac{1}{6}} - \frac{2}{5} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} + 2 + \cancel{\frac{1}{6}} - \frac{2}{5} + \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} \cancel{-1} \cancel{+1} = 2 + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{30 + 10 - 12}{15} = \frac{28}{15} \text{τ.μ.}$$

και $E_2 = \int_{1}^{2} \left(x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1\right)dx = \left[\frac{x^6}{6} + 2\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 - x\right]_{1}^{2}$

$$E_2 = \left(\frac{2^6}{6} + 2\frac{2^5}{5} + \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 2^2 - 2\right) - \left(\frac{1^6}{6} + 2\frac{1^5}{5} + \frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} - 1^2 - 1\right)$$

$$E_2 = \frac{64}{6} + \frac{64}{5} \cancel{+4} - \frac{8}{3} \cancel{-4} \cancel{-2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cancel{+2} = \frac{1219}{60} \text{τ.μ.}$$

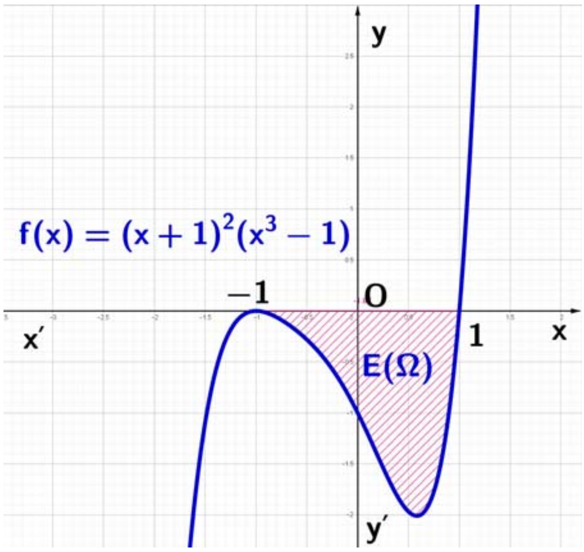
$$E(\Omega) = E_1 + E_2 = \frac{28}{15} + \frac{1219}{60} = \frac{1331}{60} \text{τ.μ.}$$

Σημείωση: Αν ζητούσε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$ τότε το ζητούμενο εμβαδόν θα ήταν:

Γ4(*). Για το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και από τον παραπάνω πίνακα για το πρόσημο της έχουμε ότι

$f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$, επομένως $E = E(\Omega) = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx$

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr



Έτσι $E=E(\Omega)=\int_{-1}^{1}(-f(x))dx$

$$E=E(\Omega)=\int_{-1}^{1}-\left(x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-x^5-2x^4-x^3+x^2+2x+1\right)dx$$

$$E=\left[-\frac{x^6}{6}-2\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{1}$$

$$E=\left(-\frac{1^6}{6}-2\frac{1^5}{5}-\frac{1^4}{4}+\frac{1^3}{3}+1^2+1\right)-\left(-\frac{(-1)^6}{6}-2\frac{(-1)^5}{5}-\frac{(-1)^4}{4}+\frac{(-1)^3}{3}+(-1)^2+(-1)\right)$$

$$E=\cancel{-\frac{1}{6}}-\frac{2}{5}\cancel{-\frac{1}{4}}+\frac{1}{3}+2\cancel{+\frac{1}{6}}-\frac{2}{5}\cancel{+\frac{1}{4}}+\frac{1}{3}\cancel{-1}\cancel{+1}=2+\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{30+10-12}{15}=\frac{28}{15}\text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

α) Αφού για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\left|f(x)-2x-1\right|\cdot e^x\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως

$\left|f(x)-2x-1\right|\le\frac{1}{e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή ισοδύναμα

$-\frac{1}{e^x}\le f(x)-(2x+1)\le\frac{1}{e^x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{1}{e^x}\le f(x)-(2x+1)\le\frac{1}{e^x}\\&\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\end{aligned}\right\}\overset{\text{κ.π.}}{\Rightarrow}\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=0}.$$

Επομένως από τον ορισμό η ευθεία $y=2x+1$ είναι (πλάγια ασύμπτωτη) της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

β) Από το παραπάνω έχουμε ότι

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2}$ και $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=1}$

Έτσι όταν $x\to+\infty$ προφανώς ισχύει $f(x)=\frac{f(x)}{x}\cdot x$ άρα

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot x\right] = 2\cdot(+\infty) = +\infty$$

Επομένως $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Δ2. Προφανώς η $g = f\circ f$ ορίζεται στο $D_{f\circ f} = \{x\in D_f = \mathbb{R} / f(x)\in D_f = \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ και έχει τύπο $g(x) = (f\circ f)(x) = f(f(x))$, τότε

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right]$$

- Για το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)}$

θέτουμε όπου $u = f(x)$, τότε

$\lim_{x\to+\infty} u = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και έτσι

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)} = \lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u} = 2$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)} = 2$ έτσι

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right] = 2\cdot 2 = 4$$

Άρα $\boxed{\lambda = 4}$ ή $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 4}$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[g(x) - \lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(f(x)) - 4x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(f(x)) - 2f(x) - 1 + 2f(x) + 1 - 4x\right]$$

$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[f(f(x)) - (2f(x)+1) + 2f(x) - 4x + 1\right]$ ή

$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[f(f(x)) - (2f(x)+1) + 2(f(x) - 2x) + 1\right]$ ή

$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[f(f(x)) - (2f(x)+1) + 2(f(x) - 2x - 1) + 2 + 1\right]$ ή

$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[f(f(x)) - (2f(x)+1) + 2(f(x) - 2x - 1) + 3\right]$.

- Για το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left[f(f(x)) - (2f(x)+1)\right]$,

θέτω όπου $u = f(x)$, τότε

$\lim_{x\to+\infty} u = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και έτσι

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(f(x)) - (2f(x)+1)\right] = \lim_{u\to+\infty}\left[f(u) - (2u+1)\right] = 0$.

- ενώ για το όριο

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2\left[f(x)-(2x-1)\right]+3\right]=2\cdot 0+3=3$$

Έτσι

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-(2f(x)+1)+2(f(x)-2x-1)+3\right]=0+3=3$$

Έτσι το $\boxed{\beta=3}$ ή $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-4x\right]=3}$

Άρα η ευθεία $y=\lambda x+\beta=4x+3$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της g στο $+\infty$

Δ3. Για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))\cdot f(x)\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x+1}{x}\right)\right]$

Θεωρούμε $G(x)=f(f(x))\cdot f(x)\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x+1}{x}\right)$

όταν $x\to+\infty$ προφανώς $x>0$, έτσι

$$G(x)=\frac{f(f(x))}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x+1}{x}\right)$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=4\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x}=4$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x+1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}\right)\right]$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x+1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}.$$

Στο όριο αυτό θέτω $\frac{1}{x}=u$, έτσι προφανώς $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$, έτσι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x+1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-u-1}{u^2}\left(\frac{0}{0}\right)\overset{1^{ος}\,\kappa}{\underset{DLH}{=}}\lim_{u\to0^+}\frac{\left(e^u-u-1\right)'}{\left(u^2\right)'}=$$

$$\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{u}=\frac{1}{2}\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-e^0}{u-0}$$

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

όμως η συνάρτηση $h(u)=e^u$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$h'(u)=\left(e^u\right)'=e^u$, για κάθε $u\in\mathbb{R}$, επομένως $h'(0)=e^0=1$, όμως

$h'(0)=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-e^0}{u-0}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=e^0=1$, άρα $\boxed{\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x+1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{u\to 0^+}\frac{e^u-1}{u}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

Έτσι

$$\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(f(x))}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}\cdot x^2\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{x+1}{x}\right)\right]=4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=4$$

Δ4. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$,

Επομένως από το Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$ ή $\boxed{f'(\xi)=f(1)-f(0)}$

Από υπόθεση έχουμε ότι

$|f(x)-2x-1|\cdot e^x\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως και για

- $x=0\Rightarrow|f(0)-2\cdot 0-1|\cdot e^0\le 1\Rightarrow|f(0)-1|\cdot 1\le 1\Rightarrow -1\le f(0)-1\le 1\Rightarrow 0\le f(0)\le 2$

έτσι $\boxed{0\ge -f(0)\ge -2}$ (1)

- $x=1\Rightarrow|f(1)-2\cdot 1-1|\cdot e^1\le 1\Rightarrow|f(1)-3|\le\dfrac{1}{e}\Rightarrow -\dfrac{1}{e}\le f(1)-3\le\dfrac{1}{e}\Rightarrow 3-\dfrac{1}{e}\le f(1)\le 3+\dfrac{1}{e}$

επομένως $\boxed{3+\dfrac{1}{e}\ge f(1)\ge 3-\dfrac{1}{e}}$ (2)

$$\left.\begin{array}{l}0\ge -f(0)\ge -2\\ 3+\dfrac{1}{e}\ge f(1)\ge 3-\dfrac{1}{e}\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}3+\frac{1}{e}+0\ge f(1)-f(0)\ge 3-\frac{1}{e}-2\Rightarrow\boxed{3+\frac{1}{e}\ge f'(\xi)\ge 1-\frac{1}{e}}$$

Δ5. Για την ανισοτική σχέση: $1+\dfrac{1}{e}\le\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\le 3-\dfrac{1}{e}$.

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

Έχουμε από υπόθεση ότι ισχύει

$|f(x)-2x-1|\cdot e^{x}\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$|f(x)-2x-1|\le\frac{1}{e^{x}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{e^{x}}\le f(x)-2x-1\le\frac{1}{e^{x}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$2x+1-\frac{1}{e^{x}}\le f(x)\le 2x+1+\frac{1}{e^{x}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Οι συναρτήσεις $h(x)=2x+1-\frac{1}{e^{x}}$, $f(x)$, $\varphi(x)=2x+1+\frac{1}{e^{x}}$, είναι συνεχείς στο $[0,1]$ με $h(x)\le f(x)\le\varphi(x)$, για κάθε $x\in[0,1]$

έτσι από την γνωστή ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος (βλέπε σχετική οδηγία του Ι.Ε.Π.)

$$h(x)\le f(x)\le\varphi(x)\Rightarrow\int_0^1 h(x)dx\le\int_0^1 f(x)dx\le\int_0^1\varphi(x)dx\Rightarrow$$

$$\int_0^1\left(2x+1-\frac{1}{e^{x}}\right)dx\le\int_0^1 f(x)dx\le\int_0^1\left(2x+1+\frac{1}{e^{x}}\right)dx\Rightarrow\boxed{I_1\le\int_0^1 f(x)dx\le I_2}$$

- $I_1=\int_0^1\left(2x+1-\frac{1}{e^{x}}\right)dx$ και $I_2=\int_0^1\left(2x+1+\frac{1}{e^{x}}\right)dx$

$$I_1=\int_0^1\left(2x+1-\frac{1}{e^{x}}\right)dx=\int_0^1\left(2x+1-e^{-x}\right)dx=\int_0^1\left(2x+1+(-x)'\cdot e^{-x}\right)dx,\text{ άρα}$$

$$I_1=\int_0^1\left(2x+1+(-x)'\cdot e^{-x}\right)dx=\left[x^2+x+e^{-x}\right]_0^1=\left(1^2+1+e^{-1}\right)-\left(0^2+0+e^{-0}\right)$$

$$I_1=2+\frac{1}{e}-1=1+\frac{1}{e}\Rightarrow\boxed{I_1=1+\frac{1}{e}}$$

23ης Φεβρουαρίου 2 & Παρ. Ολύμπου, Ηγουμενίτσα, Τηλ.: (26650) 29097-8-9, 25414, Fax: 26650 29097, E-mail: kougioub@otenet.gr

- $I_2 = \int_0^1 \left(2x+1+\frac{1}{e^x}\right)dx$

$$I_2 = \int_0^1 \left(2x+1+\frac{1}{e^x}\right)dx = \int_0^1 \left(2x+1+e^{-x}\right)dx = \int_0^1 \left(2x+1-(-x)'\cdot e^{-x}\right)dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \left(2x+1-(-x)'\cdot e^{-x}\right)dx = \left[x^2+x-e^{-x}\right]_0^1 = \left(1^2+1-e^{-1}\right)-\left(0^2+0-e^{-0}\right)$$

$$I_2 = 2-\frac{1}{e}+1 = 3-\frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{I_2 = 3-\frac{1}{e}}$$

Επομένως

$$I_1 \le \int_0^1 f(x)dx \le I_2 \Rightarrow \boxed{1+\frac{1}{e} \le \int_0^1 f(x)dx \le 3-\frac{1}{e}}$$