

40 tips για τις πανελλήνιες

1. Αρχικά βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων και τους περιορισμούς με τους οποίους θα λύσουμε το θέμα. Συνήθως στο Β θέμα δίνονται οι περιορισμοί και θέλει προσοχή αν μια συνάρτηση οριστεί σε υποσύνολο του πεδίου ορισμού. Αν δεν δίνονται ακολουθούμε τους γνωστούς κανόνες:

- οι παρονομαστές να είναι διαφορετικοί του μηδενός
- οι υπόρριζες ποσότητες να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός
- οι ποσότητες μέσα στους λογάριθμους να είναι θετικές
- οι βάσεις των εκθετικών συναρτήσεων να είναι θετικές

(εμφανίζονται πολύ σπάνια: τόξα εφαπτομένων διάφορα του $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ και τόξα συνεφαπτομένων διάφορα του $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)

2. Αν μας δίνεται η C_f και θέλουμε να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε από το σχήμα βρίσκουμε το πλήθος των σημείων τομής της C_f με την οριζόντια ευθεία $y = \alpha$ για όλες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

3. Πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$. Ισχύει: $A_{f \circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\}$

4. Αν μας δίνεται ο τύπος της $f \circ g$ και ζητάμε:

- τον τύπο της g , τότε κάνουμε αντικατάσταση $u = g(x)$ και βρίσκουμε τον τύπο της f
- τον τύπο της f , τότε θέτουμε στην f όπου x το $g(x)$ και εξισώνουμε τους δύο τύπους της $f \circ g$.

(Προσοχή στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ψάχνουμε)

5. Τη μονοτονία μιας συνάρτησης f τη βρίσκουμε **κυρίως** με χρήση των παραγώγων. Με χρήση του ορισμού δουλεύουμε συνήθως σε θεωρητικές ασκήσεις, όπου δεν

γνωρίζουμε τον τύπο της συνάρτησης και **επιπλέον** δεν μας δίνεται (ή δεν προκύπτει) ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Δε ξεχνάμε ότι η μονοτονία μιας συνάρτησης αναφέρεται σε κάποιο διάστημα ή σύνολο. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση. Διαφορετικά, γράφουμε τη μονοτονία ανά διαστήματα.

6. Αν μια συνάρτηση είναι **γνησίως μονότονη** στο πεδίο ορισμού της, τότε θα είναι και 1-1. Προσοχή, **δεν ισχύει το αντίστροφο!**

Αν βρούμε ένα ζευγάρι $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$, τότε η f δεν είναι 1-1.

(Έλεγχος 1-1 και σε πολυκλαδικές συναρτήσεις)

7. Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1, τότε ορίζεται η **αντίστροφή της** και κάθε εξίσωση της μορφής $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, θα έχει το πολύ μια ρίζα.

8. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και σε κάποιο $x_0 \in \Delta$ μηδενίζεται, τότε στο σημείο αυτό η f **θα αλλάξει πρόσημο**. Το πρόσημο της το βρίσκουμε με τον ορισμό της μονοτονίας.

9. Η αντίστροφη συνάρτηση μιας συνάρτησης f ορίζεται **μόνο** αν αυτή είναι **1-1**.

Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f

Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της και έχει το **ίδιο είδος μονοτονίας** με την f (απόδειξη με άτοπο).

Για την **εύρεση** της f^{-1} βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f , το οποίο είναι και το πεδίο ορισμού της και λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x . Αυτό που προκύπτει είναι ο τύπος της f^{-1}

Ισχύουν:

- $f(f^{-1}(y)) = y$, για κάθε y που ανήκει στο σύνολο τιμών της f
- $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f

10. Αν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε:

- Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι **συμμετρικές** ως προς τη διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου, δηλαδή την ευθεία $y = x$
- Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα σημείο A, τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} θα τέμνει την ευθεία $y = x$ στο ίδιο σημείο A
- Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} θα τέμνονται **μόνο** πάνω στην ευθεία $y = x$, αν η f είναι γνησίως αύξουσα, κάτι που δεν ισχύει αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα (θέλει απόδειξη).

11. Αν ένας αριθμός α ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f , τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$, θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο πεδίο ορισμού της f , δηλαδή **υπάρχει ένα τουλάχιστον** x_0 στο πεδίο ορισμού της τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \alpha$

12. Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ένας θετικός αριθμός ή $+\infty$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι θετικοί αριθμοί.

Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι ένας αρνητικός αριθμός ή $-\infty$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι αρνητικοί αριθμοί.

Η παραπάνω ιδιότητα μπορεί να φανεί χρήσιμη όταν έχουμε **όρια με απόλυτα** ή θέλουμε να εφαρμόσουμε το **Θεώρημα Bolzano**.

13. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε όρια κλασματικών συναρτήσεων στο $x_0 \in \mathbb{R}$ που οδηγούν σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και εμφανίζονται στον αριθμητή ή στον παρονομαστή παραστάσεις της μορφής $\sqrt{f(x)} \pm g(x)$ ή $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$, τότε πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη **συζυγή παράσταση** των

παραπάνω παραστάσεων. Σε γενικές γραμμές οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ αντιμετωπίζονται με τον κανόνα του De L'Hospital.

14. Όταν μας δίνεται το όριο μιας παράστασης που περιέχει μια συνάρτηση $f(x)$ και μας ζητάνε να βρούμε το όριο της $f(x)$ (ή το όριο μιας διαφορετικής παράστασης που περιέχει την $f(x)$), τότε θέτουμε ως **βοηθητική συνάρτηση** g την παράσταση της οποίας γνωρίζουμε το όριο και λύνουμε (προσέχοντας τους περιορισμούς) ως προς $f(x)$. Τέλος υπολογίζουμε το ζητούμενο όριο (μέθοδος «θέτω-λύνω»)

15. Προσοχή χρειάζεται στον υπολογισμό ορίων της μορφής $\frac{\alpha}{0}$, με $\alpha \neq 0$. Γράφουμε

το όριο στη μορφή $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right)$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

- Αν $g(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right) = a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases}$

- Αν $g(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right) = a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, a > 0 \\ +\infty, a < 0 \end{cases}$

- Αν η g αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε υπολογίζουμε πλευρικά όρια.

(Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη προσήμου της g , όχι αλγεβρικά, αλλά μέσω μονοτονίας)

16. Αν μας ζητείται το όριο μιας συνάρτησης f και μας δίνεται ανισοϊσότητα της μορφής $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, τότε χρησιμοποιούμε το **κριτήριο παρεμβολής**, αρκεί τα όρια $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ να υπάρχουν και να είναι ίσα

$$(a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$$

Επιπλέον:

- Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$

- Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
- Τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$ **δεν υπάρχουν**. Όταν τα συναντάμε σε κάποια παράσταση χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής, λαμβάνοντας υπόψη της σχέσεις: $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ και $-|x| \leq \eta\mu x \leq |x|$

17. Δε ξεχνάμε ότι για να γράψουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ πρέπει να γνωρίζουμε ότι η f είναι **συνεχής** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Επίσης, αν σε κάποια συνάρτηση f δεν μπορούμε να βρούμε απευθείας την τιμή της στο x_0 , αλλά γνωρίζουμε ότι αυτή είναι συνεχής στο x_0 , τότε η τιμή της ισούται με το όριο της, δηλαδή $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

18. Αν μας δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα ισχύουν:

- η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

19. Αν μας δίνεται ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει **πλάγια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ (όμοια στο $-\infty$) την ευθεία $y = \lambda x + \beta$, τότε ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0$ (ορισμός)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$

Αν μας δίνεται ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει **οριζόντια ασύμπτωτη** στο $+\infty$ (όμοια στο $-\infty$) την ευθεία $y = \ell$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

20. Μια συνάρτηση f **διατηρεί σταθερό πρόσημο** σε διάστημα Δ όταν η f είναι συνεχής στο Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αν επιπλέον γνωρίζουμε και μια τιμή της f στο Δ , τότε μπορούμε να βρούμε και το πρόσημο της.

Για να βρούμε το **πρόσημο** μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ , εκτός από τη χρήση ρίζας και μονοτονίας (**δες 8.**) που είναι και τα πιο συνηθισμένο, μπορούμε να εργασθούμε και ως εξής: δείχνουμε πρώτα ότι είναι συνεχής, στη συνέχεια βρίσκουμε τις ρίζες της και τέλος χρησιμοποιούμε κατάλληλα επιλεγμένες τιμές για καθένα από τα διαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες της.

21. Αν θέλουμε να βρούμε τον **τύπο μιας συνεχούς συνάρτησης** f για την οποία ισχύει σχέση της μορφής $f^2(x) = g(x)$, με $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε:

- αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε $f^2(x) = g(x) \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{g(x)}$ και αφού η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ , θα είναι $f(x) = \sqrt{g(x)}$, $x \in \Delta$, αν $f(x) > 0$ ή $f(x) = -\sqrt{g(x)}$, $x \in \Delta$, αν $f(x) < 0$. Επιπλέον, αν γνωρίζουμε το πρόσημο μιας τιμής της f , τότε βρίσκουμε τον τύπο της.

- αν υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε οι πιθανοί τύποι της f θα είναι: $f(x) = \sqrt{g(x)}$, $x \in \Delta$, ή $f(x) = -\sqrt{g(x)}$, $x \in \Delta$, ή

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{g(x)}, & x < x_0 \\ -\sqrt{g(x)}, & x \geq x_0 \end{cases}, x \in \Delta, \text{ ή } f(x) = \begin{cases} \sqrt{g(x)}, & x \geq x_0 \\ -\sqrt{g(x)}, & x < x_0 \end{cases}, x \in \Delta$$

22. Αν θέλουμε να **λύσουμε μια εξίσωση** που δε λύνεται αλγεβρικά, τότε αφού πάρουμε τους απαραίτητους περιορισμούς:

- βρίσκουμε μια προφανή ρίζα x_0 και η f γνησίως μονότονη, άρα η ρίζα θα είναι μοναδική

- βρίσκουμε μια προφανή ρίζα x_0 και η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Τότε η f θα αλλάζει μονοτονία στο x_0 . Έστω f γνησίως αύξουσα στο (α, x_0) και f γνησίως φθίνουσα στο (x_0, β) . Οπότε θα είναι $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = 0$ και $x > x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) = 0$. Δηλαδή η προφανής ρίζα x_0 θα είναι και μοναδική αφού για κάθε $x \neq x_0$ ισχύει $f(x) < 0$

- βρίσκουμε δύο προφανείς ρίζες x_1, x_2 (θα μας το ζητάει). Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι είναι μοναδικές είτε με χρήση μονοτονίας, είτε υποθέτοντας ότι έχει τρεις ρίζες και καταλήγοντας σε άτοπο μετά από διαδοχικές εφαρμογές του Θεωρήματος Rolle.

23. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση **έχει μια τουλάχιστον ρίζα** σε ένα διάστημα (α, β) (υπαρξιακό ερώτημα), τότε:

- κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν έχει), τα πηγαίνουμε όλα στο πρώτο μέλος, θεωρούμε βοηθητική συνάρτηση και εφαρμόζουμε **Θεώρημα Bolzano**

(προσοχή στην περίπτωση ύπαρξης ρίζας σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπου κατά την εφαρμογή του θεωρήματος διαπιστώνουμε ότι $f(\alpha) \cdot f(\beta) \leq 0$ και διακρίνουμε περιπτώσεις)

- βρίσκουμε το **σύνολο τιμών** της βοηθητικής συνάρτησης
- τα πηγαίνουμε όλα στο πρώτο μέλος, βρίσκουμε την αρχική συνάρτηση (παράγουσα) την οποία θεωρούμε ως συνάρτηση και εφαρμόζουμε **Θεώρημα Rolle** για αυτήν.
- πιο σπάνια με **Θεώρημα Fermat**, εφόσον διαπιστώνεται η ύπαρξη ακρότατου μιας παράγουσας της συνάρτησης που είναι στο πρώτο μέλος.

Επιπλέον,

- αν θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχουν δύο ή περισσότερες ρίζες κάνουμε τα παραπάνω σε κατάλληλα υποδιαστήματα τόσα όσες και οι ρίζες την ύπαρξη των οποίων θέλουμε να αποδείξουμε
- υπαρξιακά με $\xi_1, \xi_2, \dots \in (\alpha, \beta)$ συνήθως αντιμετωπίζονται με εφαρμογές του **Θεωρήματος Μέσης Τιμής** σε κατάλληλα υποδιαστήματα.

24. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση **έχει το πολύ μια ρίζα** σε ένα διάστημα Δ , τότε:

- η f είναι **γνησίως μονότονη** ή 1-1 στο διάστημα Δ , οπότε θα έχει το πολύ μια ρίζα σε αυτό

• υποθέτουμε ότι η f έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 στο διάστημα Δ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$ καταλήγουμε σε άτοπο.

(Ανάλογα αν θέλουμε να δείξουμε ότι έχει το πολύ δύο ή περισσότερες ρίζες. Προσοχή σε ειδικές περιπτώσεις που προκύπτουν με προφανή τρόπο. Για παράδειγμα η 2^{ου} βαθμού πολυωνυμική συνάρτηση έχει πάντα δύο το πολύ ρίζες)

25. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια εξίσωση **έχει ακριβώς μια ρίζα** σε ένα διάστημα Δ , τότε πρέπει να δείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον (**δες 23.**) και μια το πολύ (**δες 24.**) ρίζα στο Δ .

26. Όταν για μια συνάρτηση f θέλουμε να **αποδείξουμε την ύπαρξη μοναδικής θέσης ακροτάτου** σε ένα διάστημα Δ , τότε αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και το Δ δεν είναι κλειστό διάστημα, εργαζόμαστε ως εξής: αρχικά αποδεικνύουμε την ύπαρξη μοναδικού x_0 τέτοιου, ώστε $f'(x_0) = 0$ (πιθανή θέση ακροτάτου ή κρίσιμο σημείο). Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι εκατέρωθεν του x_0 αλλάζει η μονοτονία.

(Ανάλογα εργαζόμαστε και για να αποδείξουμε την ύπαρξη δύο ή και περισσότερων ακροτάτων)

27. Όταν για μια συνάρτηση f θέλουμε να **αποδείξουμε την ύπαρξη μοναδικής θέσης σημείου καμπής** σε ένα διάστημα Δ , τότε εργαζόμαστε ως εξής: αρχικά αποδεικνύουμε την ύπαρξη μοναδικού x_0 τέτοιου, ώστε $f''(x_0) = 0$ (πιθανή θέση σημείου καμπής). Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι εκατέρωθεν του x_0 αλλάζουν τα κοίλα. Αν x_0 το σημείο αλλαγής πολυκλαδικής συνάρτησης, θα πρέπει η f να είναι μια φορά παραγωγίσιμη (για να ορίζεται εφαπτομένη).

(Ανάλογα εργαζόμαστε και για να αποδείξουμε την ύπαρξη δύο ή και περισσότερων σημείων καμπής).

28. Αν μας ζητάνε να βρούμε το **πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης** της μορφής $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

• βρίσκουμε τη μονοτονία της f

- βρίσκουμε τα επιμέρους σύνολα τιμών για καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της που η f διατηρεί τη μονοτονία και

- αν το α ανήκει σε κάποιο από τα επιμέρους σύνολα τιμών, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα, ενώ αν το α δεν ανήκει σε κάποιο από τα επιμέρους σύνολα τιμών, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα

(Προσοχή και στην περίπτωση που το α δεν είναι γνωστός αριθμός και κάνουμε **διερεύνηση** του πλήθους των ριζών)

29. Αν θέλουμε να **λύσουμε μια ανίσωση** ή να **αποδείξουμε μια ανισότητα**, τότε:

- μπορεί το πρόσημο να προκύπτει **άμεσα** από την επίλυση μιας εύκολης ανίσωσης ή από τα δεδομένα της άσκησης

- με τις **συνέπειες** του Θεωρήματος Bolzano. Δηλαδή, αν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δεν έχει ρίζες, τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό (το πρόσημο προκύπτει αν γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε κάποια τιμή της συνάρτησης)

- με τη βοήθεια της **μονοτονίας**. Αν η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και μηδενίζεται σε ένα σημείο, τότε στο σημείο αυτό αλλάζει πρόσημο.

- με χρήση του **Θεωρήματος Μέσης Τιμής**. Αν η συνάρτηση f είναι για παράδειγμα κυρτή και στο διάστημα $[\alpha, x]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ., τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, x)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$. Με τη βοήθεια της μονοτονίας της f' (η f' θα είναι γνησίως αύξουσα αφού η f κυρτή) θα έχουμε:

$$\alpha < \xi < x \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(x) \text{ κ.λ.π.}$$

- με τη βοήθεια των **ακροτάτων**. Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή το m , τότε θα ισχύει $f(x) \geq m$ για όλες τις τιμές της. Ανάλογα αν η f έχει μέγιστη τιμή το M , τότε θα ισχύει $f(x) \leq M$ για όλες τις τιμές της.

- από την **κυρτότητα και μια εφαπτομένη**. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ και (ε) είναι μια εφαπτομένη της σε ένα τυχαίο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, τότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο M , δηλαδή $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0$). Ανάλογα αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ και (ε) είναι μια εφαπτομένη της σε ένα τυχαίο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, τότε η γραφική της

παράσταση βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο M , δηλαδή $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0$).

• από το **σύνολο τιμών**. Το σύνολο τιμών μας δείχνει ακριβώς ποιες είναι οι τιμές της συνάρτησης, οπότε ίσως να μπορούμε βρούμε και το πρόσημο της ή να αποδείξουμε μια ανισότητα.

Ανισότητα ορισμένου ολοκληρώματος

Με τη βοήθεια των παραπάνω:

- αν αποδείξουμε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$
- αν αποδείξουμε ότι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$
- αν αποδείξουμε ότι $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
- αν αποδείξουμε ότι $f(x) \geq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και το « $\geq$ » ισχύει σε μεμονωμένα σημεία, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

30. Αν μας **δίνεται μια ανισοϊσότητα** που ισχύει για κάθε τιμή της μεταβλητής που περιέχει και θέλουμε να καταλήξουμε σε μια ισότητα ή να βρούμε μια παράμετρο, τότε:

- μεταφέρουμε όλους τους όρους της ανισοϊσότητας στο πρώτο μέλος
- θεωρούμε συνάρτηση f και βρίσκουμε μια ρίζα της x_0 , οπότε την φέρνουμε στη μορφή $f(x) \geq f(x_0)$ ή $f(x) \leq f(x_0)$
- από την σχέση αυτή προκύπτει (εξ ορισμού) ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0
- αιτιολογούμε επιπλέον ότι το x_0 είναι εσωτερικό του A_f και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , οπότε θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θεωρήματος Fermat**. Άρα $f'(x_0) = 0$ από όπου θα προκύψει και το ζητούμενο.

(Από σύνολο τιμών της f ή από Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης Τιμής μπορεί επίσης να προκύψει ότι $m \leq f(x) \leq M \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, οπότε η f παρουσιάζει ακρότατα στα x_1, x_2 και εφαρμόζοντας Θεώρημα Fermat θα έχουμε ότι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$)

31. Η **εφαπτομένη** γραφικής παράστασης συνάρτησης f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_0)$ και εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Σε περίπτωση που δε γνωρίζουμε το σημείο επαφής $M(x_0, f(x_0))$, τότε γράφουμε την προηγούμενη εξίσωση και από τα δεδομένα της άσκησης προσπαθούμε να το βρούμε.

32. Αν οι C_f και C_g έχουν **κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο** $M(x_0, y_0)$ και οι f και g παραγωγίζονται στο x_0 , τότε ισχύει $f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$

33. Αν οι C_f και C_g έχουν **κοινή εφαπτομένη σε διαφορετικά σημεία** $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ αντίστοιχα και οι f, g παραγωγίζονται στα α και β , τότε οι εφαπτομένες τους $(\varepsilon_1): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ και

$(\varepsilon_2): y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta)$ στα σημεία αυτά θα ταυτίζονται.

34. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f **δεν έχει τοπικό ή ολικό ακρότατο** σε ένα διάστημα (α, β) , τότε:

- δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) ή
- αν γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υποθέτουμε ότι παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και από Θεώρημα Fermat έχουμε $f'(x_0) = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

(Ανάλογα, για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση f **δεν έχει σημείο καμπής** σε ένα διάστημα (α, β) , τότε αρκεί να δείξουμε ότι η f' είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) ή αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) , τότε υποθέτουμε ότι

παρουσιάζει σημείο καμπής σε ένα σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$, οπότε θα έχουμε $f''(x_0) = 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο)

35. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f **είναι σταθερή** σε ένα διάστημα Δ , τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ . Αν επιπλέον μας δίνεται και μια τιμή της f , τότε μπορούμε να βρούμε και τον τύπο της.

Προσοχή! Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι δύο συναρτήσεις f, g **είναι ίσες σε ένα διάστημα Δ** , τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η $f - g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ με παράγωγο ίση με μηδέν. Επομένως από το Θεώρημα των Συνεπειών του Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $(f - g)(x) = c$ και έπειτα δείχνουμε ότι $c = 0$

36. Αν θέλουμε να **βρούμε τον τύπο** μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f για την οποία ισχύει $f'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \Delta$ με $g(x)$ γνωστή συνάρτηση, τότε βρίσκουμε μια αρχική συνάρτηση G της g , οπότε θα ισχύει $f'(x) = G'(x), x \in \Delta$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα των Συνεπειών του Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x) = G(x) + c$ και από τα δεδομένα βρίσκουμε την σταθερά και άρα τον τύπο της f

Επιπλέον,

1) αν θέλουμε να **βρούμε τον τύπο** μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f για την οποία ισχύει $f'(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$, τότε ισχύει $f(x) = g(x) + c_1$ για κάθε $x \in \Delta_1$ και $f(x) = g(x) + c_2$ για κάθε $x \in \Delta_2$.

2) αν θέλουμε να **βρούμε τον τύπο** μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f για την οποία ισχύει $f'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε ισχύει $f(x) = c \cdot e^x$ για κάθε $x \in \Delta$. Από τα δεδομένα υπολογίζουμε την σταθερά.

37. Για τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος

- αν μέσα στο ολοκλήρωμα υπάρχει η **παράγωγος μιας συνάρτησης**, τότε το ολοκλήρωμα είναι απλό. Προσοχή μήπως η παράγωγος είναι κρυμμένη.

- αν μέσα στο ολοκλήρωμα υπάρχει το γινόμενο δύο «άσχετων» συναρτήσεων, τότε μάλλον χρειάζεται να κάνουμε **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**.
- αν μέσα στο ολοκλήρωμα υπάρχει μια συνάρτηση και η παράγωγός της, τότε μάλλον χρειάζεται να κάνουμε **αντικατάσταση**.
- αν μέσα στο ολοκλήρωμα υπάρχει παράσταση της μορφής $f(g(x))$, τότε μάλλον χρειάζεται να κάνουμε **αντικατάσταση**.

Δε ξεχνάμε!

- 1) Στην αντικατάσταση να αλλάζουμε και τα άκρα ολοκλήρωσης
- 2) Όταν υπολογίζουμε **εμβαδόν χωρίου** στο ολοκλήρωμα βάζουμε απόλυτο και το αποτέλεσμα είναι πάντα θετικός αριθμός.

38. Όταν μας ζητάνε να υπολογίσουμε το $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx$ (f^{-1} συνεχής) και δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f^{-1} , τότε:

- θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$, οπότε $dx = f'(u)du$
- για $x = \alpha$ έχουμε $f(u) = \alpha \Leftrightarrow f(u) = f(u_1) \Leftrightarrow u = u_1$ και για $x = \beta$ έχουμε $f(u) = \beta \Leftrightarrow f(u) = f(u_2) \Leftrightarrow u = u_2$
- το ολοκλήρωμα γίνεται $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} u \cdot f'(u)du$ και ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες

(Ανάλογα εργαζόμαστε και αν ζητάμε το ολοκλήρωμα της f και γνωρίζουμε την αντίστροφή της)

39. Για να βρούμε τον τύπο μιας συνάρτησης από μια συναρτησιακή σχέση που έχει μέσα το ολοκλήρωμα της, τότε θέτουμε το ολοκλήρωμα ίσο με μια σταθερά c (1), αντικαθιστούμε το ολοκλήρωμα με την σταθερά c στον τύπο της συνάρτησης και αντικαθιστούμε ξανά στην (1) τον τύπο της συνάρτησης στο ολοκλήρωμα. Με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε την σταθερά c και στη συνέχεια τον τύπο της f

40. Για το τέλος δύο χρήσιμες προτάσεις:

A) Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) > 0$. Τότε επειδή η f είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, θα είναι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, άτοπο. Άρα, αφού δεν υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) > 0$ θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

(Ανάλογα και αν $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$)

B) Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, όπου $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε θα ισχύει $\alpha = \beta$

Απόδειξη

Αν $\alpha < \beta$, τότε θα ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, που είναι άτοπο

Αν $\alpha > \beta$, τότε θα ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$, που είναι άτοπο

Άρα $\alpha = \beta$

(Ανάλογα και αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$)

Βασικές Ανισότητες

- $\ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$
- $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\eta \mu x \leq x$, για κάθε $x \geq 0$
- $\eta \mu x \geq x$, για κάθε $x \leq 0$

Χρήσιμοι τύποι

- Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Για τις συντεταγμένες του μέσου $M(x_M, y_M)$ ενός ευθύγραμμου τμήματος AB , όπου $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ ισχύει: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$
- Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ δίνεται από τον τύπο $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) \right|$

Θανάσης Κοπάδης

Μαθηματικός

