Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από το Askisopolis 2025 - 2026

Αντώνης Βαλέργας

Γαβριήλ Ελευθερίου

Αποστόλης Κακαβάς

Νίκος Κουμάντος

Στέλιος Μιχαήλογλου

Άγγελος Μπλιάς

Θανάσης Νικολόπουλος

Βαγγέλης Ραμαντάνης

Δημήτρης Πατσιμάς

Νίκος Σαμπάνης

Βαγγέλης Τόλης

Νίκος Τούντας

Ισαάκ Χιονίδης

10ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου
από την ομάδα του Ασκησόπολις
Διάρκεια: 3 ώρες
Ύλη: 6ο Γενικό Επαναληπτικό

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|,\ x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}.$$

7 μονάδες

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

4 μονάδες

Α3. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

4 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}\left(f(x)\right)=x,\ x\in A$ και $f\left(f^{-1}(y)\right)=y, y\in f(A)$.

β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

γ) Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx.$$

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta, \alpha\neq 0,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

- Τα σημεία $-1, 1$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων.
- $f(0)=2, f''(1)=6$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta=0$.

6 μονάδες

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3-3x+2, x\in\mathbb{R}$.

6 μονάδες

γ) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος των ακροτάτων.

6 μονάδες

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$. 7 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2+2x-1 & ,x<2 \\ 7 & ,x=2 \\ x^2-\beta x+\gamma & ,x>2 \end{cases}$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: **α)** $\alpha=1$ και $\gamma=2\beta+3$.

β) $f(x)=x^2+2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

2 + 3 = 5 μονάδες

Γ2. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)$ και **β)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x-x}$.

3 + 3 = 6 μονάδες

Γ3. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=2x(\ln x+1)$, $x>0$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_φ δέχονται μοναδική κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο, την οποία και να βρείτε.

6 μονάδες

Γ4. Να βρείτε ακέραιο αριθμό $\kappa\in\mathbb{Z}$, για τον οποίο υπάρχει $\xi\in(\kappa,\kappa+1)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=-\xi^3+\xi^2+\xi.$$

4 μονάδες

Γ5. Να αποδείξετε ότι το ξ του προηγούμενου ερωτήματος είναι μοναδικό και στη συνέχεια να εξετάσετε αν βρίσκεται πιο κοντά στο κ ή στο $\kappa+1$.

1 + 3 = 4 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$, $x>0$ και $g(x)=e^{x-1}-\ln x$, $x>0$.

Δ1. i) Να μελετηθούν οι συναρτήσεις f, g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να δείξετε ότι $\int_e^{2e} f(x)dx<\int_e^{2e} g(x)dx$

4+2 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή και να βρείτε το σύνολο τιμών της .

3 μονάδες

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x)-1)=1$ έχει ακριβώς δυο ρίζες $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

4 μονάδες

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)+g'(x)=2$ έχει μοναδική ρίζα στο (x_1,x_2).

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xg'(x_1)-g'(x_2)}{f(x)-1}$.

4+3 μονάδες

Δ5. Αν για τη συνεχή συνάρτηση $\varphi:[1,2]\to\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι $\int_1^2 \varphi(x)\dfrac{1}{x}dx=1$ για κάθε $x\in[1,2]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{\int_1^2 \varphi^2(t)\,dt-\frac{3}{2}}{\xi-2}=\frac{\int_e^{2e}\left(f(t)-g(t)\right)dt}{\xi-1}.$$

5 μονάδες

Κάθε επιτυχία!

Λύσεις

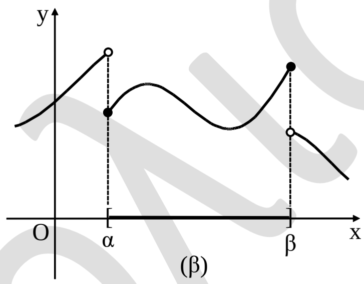
Θέμα Α

Α1. Αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, ενώ

Αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως $y'=(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

Α2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον:

$\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$



Α3. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0$.

Α4. α) Σ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$

Τα εσωτερικά σημεία $-1,1$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά οπότε ισχύει το θεώρημα Fermat άρα : $f'(-1)=0\Leftrightarrow 3\alpha-2\beta+\gamma=0(1)$ και $f'(1)=0\Leftrightarrow 3\alpha+2\beta+\gamma=0(2)$

Με αφαίρεση της σχέσης (1) από την (2) έχουμε $4\beta=0\Leftrightarrow\beta=0$.

Β2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με δεύτερη παράγωγο $f''(x)=6\alpha x+2\beta\overset{\beta=0}{=}6\alpha x$. Έχουμε:

$f(0)=2\Leftrightarrow\delta=2$, $f''(1)=6\Leftrightarrow 6\alpha=6\Leftrightarrow\alpha=1$.

Από τη σχέση (1) έχουμε $3+\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=-3$ οπότε : $f(x)=x^3-3x+2, x\in\mathbb{R}$.

Β3. Έχουμε $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 3x^2-3\geq 0\Leftrightarrow 3x^2\geq 3\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow x\geq 1$ ή $x\leq -1$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική. Όμως $f'(x)>0$ στα διαστήματα $(-\infty,-1),(1,+\infty)$, $f'(x)<0$ στο $(-1,1)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1][1,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ άρα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1)=4$ και τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1)=0$.

Β4. Έστω $A_1=(-\infty,-1), A_2=[-1,1]$ και $A_3=(1,+\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x+2),f(-1)\right)=$

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} x^3,4\right)=(-\infty,4)$, $f(A_2)=[f(1),f(-1)]=[0,4]$ και

$f(A_3)=\left(\lim\limits_{x\to1^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=\left(f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x+2)\right)=\left(0,\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\right)=(0,+\infty)$. Αν:

- $\alpha<0$, τότε το α ανήκει μόνο στο $f(A_1)$, οπότε υπάρχει μοναδικός (λόγω της μονοτονίας) $\eta\in(-\infty,-1)$ τέτοιος ώστε $f(\eta)=\alpha$.

- $0<\alpha<4$,τότε το α ανήκει και στα $f(A_1), f(A_2), f(A_3)$,οπότε υπάρχουν

μοναδικοί (λόγω της μονοτονίας) $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3$ τέτοιοι ώστε $f(x_1)=\alpha, f(x_2)=\alpha, f(x_3)=\alpha$.

- $\alpha>4$, τότε το α ανήκει μόνο στο $f(A_3)$,οπότε υπάρχει μοναδικός (λόγω της μονοτονίας) $\theta\in(1,+\infty)$ τέτοιος ώστε $f(\theta)=\alpha$.
- $\alpha=0$,τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα την $f(1)=0$ και μία ακόμη ρίζα <-1 αφού το α ανήκει και στο $f(A_1)$.

$\alpha=4$,τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα την $f(-1)=4$ και μία ακόμη ρίζα >1

Θέμα Γ

Γ1. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, θα είναι και συνεχής στο 2, οπότε

- $$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha+3=7 \\ 4-2\beta+\gamma=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha=4 \\ \gamma=2\beta+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \gamma=2\beta+3 \end{cases}.$$

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ είναι $\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

Όμως $\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{\alpha=1}{=} \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x-1-7}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x-8}{x-2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 2^-}\frac{2x+2}{1}=6$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \overset{\gamma=2\beta+3}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-\beta x+2\beta+3-7}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-\beta x+2\beta-4}{x-2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 2^+}\frac{2x-\beta}{1}=4-\beta.$$

Επομένως $4-\beta=6 \Leftrightarrow \beta=-2$ και $\gamma=-4+3=-1$.

Για $\alpha=1$, $\beta=-2$ και $\gamma=-1$ είναι: $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 & ,x<2 \\ 7 & ,x=2 \\ x^2+2x-1 & ,x>2 \end{cases} = x^2+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$

Γ2. α) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{f(x)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x-1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{2}{2}=1$$

β) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{\eta\mu x-x}=\lim_{x\to 0}\left(\left(x^2+2x-1\right)\frac{1}{\eta\mu x-x}\right)$ **δεν υπάρχει γιατί:**

- $\lim_{x\to 0}\left(x^2+2x-1\right)=-1<0$
- $\lim_{x\to 0}(\eta\mu x-x)=0$ και είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με το ίσον να ισχύει μόνον για $x=0$

- Για $x<0$ είναι $|\eta\mu x|<-x \Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x$ άρα $\eta\mu x - x>0$ επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\eta\mu x - x}=+\infty$ άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\left(x^2+2x-1\right)\frac{1}{\eta\mu x - x}\right)=-\infty$$

- Για $x>0$ είναι $|\eta\mu x|<x \Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x$ άρα $\eta\mu x - x<0$ επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x - x}=-\infty$ άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\left(x^2+2x-1\right)\frac{1}{\eta\mu x - x}\right)=+\infty$$

Γ3. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x+2=2(x+1)$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\varphi'(x)=2(\ln x+1)+2\cancel{x}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}}=2\ln x+4=2(\ln x+2)$

Για να δέχονται κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0 πρέπει $\begin{cases} f(x_0)=\varphi(x_0) \\ f'(x_0)=\varphi'(x_0) \end{cases}$

1^{ος} τρόπος: Είναι $\varphi'(x)=f'(x)\Leftrightarrow 2(\ln x+2)=2(x+1)\Leftrightarrow \ln x+2=x+1\Leftrightarrow \ln x=x-1\Leftrightarrow x=1$ αφού είναι $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$.
Επίσης είναι $f(1)=2=\varphi(1)$ άρα δέχονται μοναδική κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο με τετμημένη ίση με 1.
Η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2$.

2^{ος} τρόπος: Είναι $\varphi(x)=f(x)\Leftrightarrow 2x(\ln x+1)=x^2+2x-1\Leftrightarrow 2x\ln x+\cancel{2x}=x^2+\cancel{2x}-1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x\ln x-x^2+1=0\Leftrightarrow h(x)=0$ με $h(x)=2x\ln x-x^2+1$, $x>0$.

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=2\ln x+2\cancel{x}\cdot\dfrac{1}{\cancel{x}}-2x=$

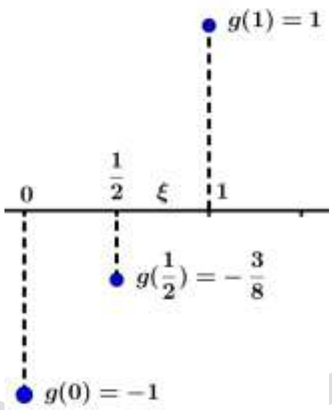
$=2\ln x-2x+2=2(\ln x-x+1)\le 0$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$ αφού είναι $\ln x\le x-1\Leftrightarrow \ln x-x+1\le 0$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$.
Επομένως αφού η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ τότε $h\searrow(0,+\infty)$ άρα είναι και 1-1.

Άρα $h(x)=0\Leftrightarrow h(x)=h(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$. Επίσης είναι $f'(1)=4=\varphi'(1)$ άρα δέχονται μοναδική κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο με τετμημένη ίση με 1.
Η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2$.

Γ4. Έχουμε την εξίσωση $f(x)=-x^3+x^2+x\Leftrightarrow \cancel{x^2}+2x-1=-x^3+\cancel{x^2}+x\Leftrightarrow x^3+x-1=0$
Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x^3+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.
Είναι $g(0)=-1<0$, $g(1)=1>0$ άρα $g(0)g(1)<0$ και η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=-\xi^3+\xi^2+\xi$.
Άρα επιλέγουμε $\kappa=0$ και τότε θα είναι $\kappa+1=1$.

Γ5. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $g\nearrow\mathbb{R}$ και είναι 1-1. Επομένως το ξ του προηγούμενου ερωτήματος είναι μοναδικό.

Είναι $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-1=\frac{1+4-8}{8}=-\frac{3}{8}<0$ άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)g(1)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ τότε από το Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Επειδή το ξ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης τότε $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ και τελικά το ξ είναι πιο κοντά στο 1, δηλαδή στο $\kappa+1$.



Θέμα Δ

Δ1. i) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2}=\dfrac{-\ln x}{x^2}$ είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow\ln x<0\Leftrightarrow x\in(0,1)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)=1$.

Η συνάρτηση $g(x)=e^{x-1}-\ln x$ f είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$ (παρατηρούμε $g'(1)=0$) και $g''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}$.

Είναι $g''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Για $0<x<1\Leftrightarrow g'(x)<g'(1)=0$ οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και

Για $x>1\Leftrightarrow g'(x)>g'(1)=0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ το $g(1)=1$.

ii) Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\le1$ και $g(x)\ge1$, άρα $f(x)\le g(x)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε για κάθε $x\in[e,2e]$ είναι $f(x)<g(x)$ συνεπώς $\int_e^{2e}f(x)dx\le\int_e^{2e}g(x)dx$.

Δ2. Είναι $g''(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ οπότε η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x-1}-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(1-\frac{\ln x}{e^{x-1}}\right)\right]=+\infty \text{ γιατί } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^{x-1}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{x-1}}=+\infty$$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,1]$ με $g(A_1)=\left[g(1),\lim\limits_{x\to0^+}g(x)\right)=[1,+\infty)$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[1,+\infty)$ με $g(A_2)=\left[g(1),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=[1,+\infty)$.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι $g(A)=g(A_1)\cup g(A_2)=[1,+\infty)$.

Δ3. Η f έχει μέγιστο για $x=1$ την τιμή 1 άρα η εξίσωση $f(g(x)-1)=1$ αληθεύει μόνο αν $g(x)-1=1\Leftrightarrow g(x)=2$.

Επειδή $2\in g(A_1)$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,1]$, τότε υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=2$.

Επίσης $2\in g(A_2)$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2=[1,+\infty)$, τότε υπάρχει μοναδικό $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $g(x_2)=2$.

Άρα η εξίσωση $f(g(x)-1)=1$ έχει ακριβώς δυο ρίζες $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$.

Δ4. i) Έστω $\alpha(x)=g(x)+g'(x)-2$ η οποία είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ με

$\alpha(x_1)=g(x_1)+g'(x_1)-2=2+g'(x_1)-2=g'(x_1)<0$ και

$\alpha(x_2)=g(x_2)+g'(x_2)-2=2+g'(x_2)-2=g'(x_2)>0$, γιατί είναι

$$x_1<1<x_2 \overset{g'(x)\uparrow}{\Rightarrow} g'(x_1)<g'(1)<g'(x_2)\Leftrightarrow g'(x_1)<0<g'(x_2)$$

Άρα $\alpha(x_1)\cdot\alpha(x_2)<0$, οπότε από θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(x_1,x_2):\alpha(\rho)=0$.

Είναι $\alpha'(x)=g'(x)+g''(x)$

Αν $x\in(0,1)$ έχουμε $\alpha'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}+e^{x-1}+\frac{1}{x^2}=2e^{x-1}+\frac{1-x}{x^2}>0$.

Αν $x\in(1,+\infty)$ έχουμε $\alpha'(x)=g'(x)+g''(x)>0$ αφού για $x>1$ είναι $g'(x)>0$.

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση $\alpha'(x)>0$ οπότε η συνάρτηση $\alpha(x)$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα ρ είναι μοναδική .

ii) Είναι από **Δ1** $f(x)\le f(1)=1\Leftrightarrow f(x)-1\le 0$ και $\lim\limits_{x\to1}(f(x)-1)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{f(x)-1}=-\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to1}(xg'(x_1)-g'(x_2))=g'(x_1)-g'(x_2)<0$ από **Δ4 (i)**

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to1}\frac{xg'(x_1)-g'(x_2)}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{1}{f(x)-1}(xg'(x_1)-g'(x_2)\right]=+\infty$

Δ5. Για κάθε $x\in(1,2)$ η εξίσωση $\frac{\int_1^2\varphi^2(t)dt-\frac{3}{2}}{x-2}=\frac{\int_e^{2e}(f(t)-g(t))dt}{x-1}$ ισοδύναμα γίνεται

$$(x-1)\left(\int_1^2\varphi^2(t)dt-\frac{3}{2}\right)=(x-2)\int_e^{2e}(f(t)-g(t))dt$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\beta(x)=(x-1)\left(\int_1^2\varphi^2(t)dt-\frac{3}{2}\right)-(x-2)\int_e^{2e}(f(t)-g(t))dt$ συνεχής στο $[1,2]$

ως πολυωνυμική με $\beta(1)=\int_e^{2e}(f(t)-g(t))dt<0$ γιατί $f(x)<g(x)$ στο $[e,2e]$ και

$\beta(2)=\int_1^2\varphi^2(t)dt-\frac{3}{2}<0$ γιατί :

- Αν $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ τότε $\int_1^2\varphi(x)\frac{1}{x}dx=1\Leftrightarrow\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=1\Leftrightarrow\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=1\Leftrightarrow-\frac{1}{2}+1=1$ άτοπο

- Άρα $\varphi(x) \neq \frac{1}{x}$ και $\left(\varphi(x)-\frac{1}{x}\right)^2 > 0$ οπότε

$$\int_1^2 \left(\varphi(t)-\frac{1}{t}\right)^2 dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \left(\varphi^2(t)-2\varphi(t)\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right) dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \varphi^2(t)dt - 2\cdot 1 - \left[\frac{1}{t}\right]_1^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 \varphi^2(t)dt - 2 + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \varphi^2(t)dt - \frac{3}{2} > 0$$

Οπότε $\beta(1)\beta(2) < 0$ και από το θ. Bolzano θα υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $\beta(\xi) = 0$ και επειδή η $\beta(x)$ είναι πολυωνυμική 1ου βαθμού θα έχει το πολύ μια ρίζα, άρα η ρίζα θα είναι μοναδική.