

**Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά
Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου από το Askisopolis
2025 - 2026**

ΑΣΚΗΣΟ ΠΟΛΙΣ



www.askisopolis.gr

Ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

est. 2014

Αντώνης Βαλέργας	Γαβριήλ Ελευθερίου	
Αποστόλης Κακαβάς	Νίκος Κουμάντος	
Στέλιος Μιχαήλογλου	Άγγελος Μπλιάς	
Θανάσης Νικολόπουλος	Βαγγέλης Ραμαντάνης	
Δημήτρης Πατσιμάς	Νίκος Σαμπάνης	
Βαγγέλης Τόλης	Νίκος Τούντας	Ισαάκ Χιονίδης

11ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου
από την ομάδα του Ασκησόπολις
Διάρκεια: 3 ώρες
Ύλη: 7ο Γενικό Επαναληπτικό

Θέμα Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
7 μονάδες
- A2.** Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων της f ;
4 μονάδες
- A3.** Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f
4 μονάδες
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$.
- β)** Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- γ)** Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x / \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$
- δ)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- ε)** Αν μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.
10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{x+1}$.

- B1.** Να την εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
7 μονάδες
- B2.** Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της.
4 μονάδες
- B3.** Να βρείτε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' , την ευθεία $x = -1$ και την ευθεία $x = 0$.
6 μονάδες
- B4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{\ln 3}^{3 \ln 2} e^x f(e^x) dx$.
8 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{\alpha + x - 1}{2 - x}$, με $\alpha \neq -1$ $\alpha \neq 0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και έχει σημείο καμπής για $x_0 = 1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της αντίστροφής της f^{-1} .

8 μονάδες

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων

$$f(x) = \kappa \quad \text{και} \quad (x-1) \cdot f(x) = \lambda$$

για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

6 μονάδες

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

5 μονάδες

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(x) + 2 < 2x$ για $x \in (0,1)$ και $\frac{f(x)}{2} > x - 1$ για $x \in (1,2)$.

6 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \eta \mu(x^2)$ και η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$.

Δ1. Να βρείτε τη συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$.

4 μονάδες

$$\text{Αν } h(x) = \sqrt{x} \eta \mu x, \quad x \in [0, \pi]$$

Δ2. α) Εξετάστε αν υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ ώστε η εφαπτομένη της h στο ξ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) Εξετάστε αν η συνάρτηση h εφάπτεται του $x'x$.

γ) Εξετάστε αν υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ ώστε $\text{εφ}(x_0) = -2x_0$.

δ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 h(x) dx < \frac{2}{5}$.

12 μονάδες

Δ3. Αν $b(x) = h(x)$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right]$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση b αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της b^{-1} .

β) Αν επιπλέον η b^{-1} παραγωγίζεται να δείξετε ότι: $\eta \mu b^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{b^{-1}(x)}}$, $x \in \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{24}}\right]$ και

$$(b^{-1})'(x) = \frac{2b^{-1}(x)}{x + 2b^{-1}(x)\sqrt{b^{-1}(x) - x^2}}, \quad x \in \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{24}}\right].$$

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της συνάρτησης b^{-1} στο $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{24}}$ και να δείξετε ότι είναι

$$\text{η ευθεία } y - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{\frac{\pi}{24}} + \pi\sqrt{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}}}(x - \sqrt{\frac{\pi}{24}}).$$

9 μονάδες

Κάθε επιτυχία!

Λύσεις

Θέμα Α

A1. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ (1).

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2).

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

A2. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

A3. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

A4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

Θέμα Β

B1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = [-1, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2x+2+x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}.$$

Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow 3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$. Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού

της οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{2}{3}, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, -\frac{2}{3}]$ και παρουσιάζει

ελάχιστο στο $-\frac{2}{3}$, το $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}+1} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ και τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 0$.

B2. Είναι $f''(x) = \frac{3x+4}{4(\sqrt{x+1})^3} > 0$ για $x > -1$ και η f συνεχής στο $[-1, +\infty)$.

Άρα η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

B3. Για $x \in [-1, 0]$: $f(x) \leq 0$ αφού $x \leq 0$ και $\sqrt{x+1} \geq 0$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:

$E(\Omega) = -\int_{-1}^0 f(x) dx = -\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1} dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = u^2 - 1$ οπότε $dx = 2udu$. Για $x = -1$ έχουμε $u = 0$ και για $x = 0$ έχουμε $u = 1$, οπότε:

$$E(\Omega) = -\int_0^1 2u^2(u^2 - 1) dx = -\int_0^1 (2u^4 - 2u^2) dx = -\left[\frac{2u^5}{5} - 2\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

B4. $I = \int_{\ln 3}^{3 \ln 2} e^x f(e^x) dx = \int_{\ln 3}^{\ln 8} e^{2x} \sqrt{e^x + 1} dx$. Θέτουμε $h = \sqrt{e^x + 1} \Leftrightarrow e^x = h^2 - 1$ οπότε $2h dh = e^x dx$. Για $x = \ln 3$ έχουμε $h = 2$ και για $x = \ln 8$ έχουμε $h = 3$,

$$\text{οπότε : } I = \int_2^3 (h^2 - 1)h \cdot 2h dh \Leftrightarrow I = 2 \int_2^3 (h^4 - h^2) dh \Leftrightarrow I = 2 \left[\frac{h^5}{5} - \frac{h^3}{3} \right]_2^3 = \frac{1076}{15}.$$

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\ln \left(\frac{\alpha + x - 1}{2 - x} \right) \right]' = \frac{2 - x}{\alpha + x - 1} \cdot \left(\frac{\alpha + x - 1}{2 - x} \right)' = \frac{2 - x}{\alpha + x - 1} \cdot \frac{1 \cdot (2 - x) - (\alpha + x - 1) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \\ &= \frac{\cancel{(2 - x)} \cdot (2 - x + \alpha + x - 1)}{(\alpha + x - 1)(2 - x)^2} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + x - 1)(2 - x)}. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\alpha + 1) \cdot \left(\frac{1}{(\alpha + x - 1)(2 - x)} \right)' = (\alpha + 1) \cdot \left(-\frac{1 \cdot (2 - x) + (\alpha + x - 1) \cdot (-1)}{(\alpha + x - 1)^2 (2 - x)^2} \right) = \\ &= -(\alpha + 1) \frac{(2 - x - \alpha - x + 1)}{(\alpha + x - 1)^2 (2 - x)^2} = -\frac{(\alpha + 1)(-2x - \alpha + 3)}{(\alpha + x - 1)^2 (2 - x)^2} = \frac{(\alpha + 1)(2x + \alpha - 3)}{(\alpha + x - 1)^2 (2 - x)^2}. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής για $x_0 = 1$, όπου η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα

$$f''(1) = 0 \Rightarrow \frac{(\alpha + 1)(\alpha - 1)}{\alpha^2} = 0 \Rightarrow \alpha = 1.$$

Τότε $f(x) = \ln \frac{x}{2 - x}$, η οποία ορίζεται όταν $\frac{x}{2 - x} > 0 \Leftrightarrow x(2 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = D_f = (0, 2)$.

Επιπλέον $f'(x) = \frac{2}{x(2 - x)} > 0$ για $x \in (0, 2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$ και έχει σύνολο

τιμών το $f((0, 2)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \right)$. Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{2 - x} \right) \stackrel{u = \frac{x}{2 - x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln \left(\frac{x}{2 - x} \right) \stackrel{u = \frac{x}{2 - x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty,$

άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, 2)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέψιμη και η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $f((0, 2)) = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f , δηλαδή το $A = (0, 2)$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$, άρα και 1-1, με σύνολο τιμών το \mathbb{R} , άρα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική ρίζα.

Επιπλέον θέτουμε $\varphi(x) = (x - 1)f(x)$ που είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με παράγωγο

$$\varphi'(x) = f(x) + (x - 1)f'(x). \text{ Είναι } \varphi(1) = f(1) + (1 - 1)f'(1) = 0 \text{ και:}$$

- Για $0 < x < 1$: $f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και $x - 1 < 0 \Leftrightarrow (x - 1)f'(x) < 0$ άρα $\varphi'(x) = f(x) + (x - 1)f'(x) < 0$ συνεπώς η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$

$$\text{με σύνολο τιμών } \varphi((0, 1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \right) = (0, +\infty),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1)f(x) \stackrel{(-1)(-\infty)}{=} +\infty.$$

- Για $1 < x < 2$: $f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και $x - 1 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)f'(x) > 0$ άρα $\varphi'(x) = f(x) + (x - 1)f'(x) > 0$ συνεπώς η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, 2)$

$$\text{με σύνολο τιμών } \varphi((1, 2)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} \varphi(x) \right) = (0, +\infty),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 2^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1)f(x) \stackrel{1(+\infty)}{=} +\infty.$$

Άρα:

- Για $\lambda < 0$ η εξίσωση $\varphi(x) = \lambda \Leftrightarrow (x - 1)f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.
- Για $\lambda = 0$ η εξίσωση $\varphi(x) = \lambda \Leftrightarrow (x - 1)f(x) = \lambda$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.
- Για $\lambda > 0$ το $\lambda \in \varphi((0, 1)) = (0, +\infty)$ και $\lambda \in \varphi((1, 2)) = (0, +\infty)$ άρα η εξίσωση $\varphi(x) = \lambda \Leftrightarrow (x - 1)f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία στο $(0, 1)$ και μία στο $(1, 2)$.

$$\Gamma 3. \text{ Είναι } f''(x) = \left(\frac{2}{-x^2 + 2x} \right)' = 2 \cdot \frac{-(-x^2 + 2x)'}{(-x^2 + 2x)^2} = 2 \cdot \frac{-(-2x + 2)}{(-x^2 + 2x)^2} = \frac{4(x - 1)}{(-x^2 + 2x)^2}, \text{ άρα}$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Η f είναι συνεχής στο $(0, 2)$ άρα είναι κοίλη στο $(0, 1]$, κυρτή στο $[1, 2)$ και έχει σημείο καμπής το σημείο $(1, f(1))$ ή $(1, 0)$.

Γ4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(1, 0)$ έχει εξίσωση:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2.$$

- Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, 1]$ άρα η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την $y = 2x - 2$, εκτός του σημείου επαφής τους $(1, 0)$.

Συνεπώς, για $x \in (0, 1)$: $f(x) < 2x - 2 \Leftrightarrow f(x) + 2 < 2x$.

- Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[1, 2)$ άρα η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την $y = 2x - 2$, εκτός του σημείου επαφής τους $(1, 0)$.

Συνεπώς, για $x \in (1, 2)$: $f(x) > 2x - 2 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{2} > x - 1$.

Θέμα Δ

Δ1. $A_h = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 / \sqrt{x} \in A_f\} = [0, \pi]$ και $h(x) = \sqrt{x}\eta\mu x$.

Δ2. α) Η h συνεχής στο $[0, \pi]$ πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με

$h'(x) = \frac{\eta\mu x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\sigma\upsilon\nu x$ με $h(0)=h(\pi)$ οπότε από Θ.Rolle υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ ώστε $h'(\xi) = 0$ δηλαδή, η εφαπτομένη της h στο ξ είναι παράλληλη στον $x'x$ άξονα.

β) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{x} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 = h'(0)$ και επειδή $h(0)=0$ η συνάρτηση θα εφάπτεται στον $x'x$ στο σημείο $(0, 0)$.

γ) από α) $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu \xi}{2\sqrt{\xi}} + \sqrt{\xi}\sigma\upsilon\nu \xi = 0$ (1).

Αν το $\xi = \frac{\pi}{2}$ η (1) αδύνατη άρα $\xi \neq \frac{\pi}{2}$ οπότε (1) $\Leftrightarrow \epsilon\phi \xi = -2\xi$ άρα για ξ το $x_0 \in (0, \pi)$ προκύπτει $\epsilon\phi x_0 = -2x_0$.

δ) $\int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \eta\mu x dx < \int_0^1 \sqrt{x} \cdot x dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{5}$. Αφού στο $[0, 1]$ το $0 \leq \eta\mu x < x$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Δ3. α) $b'(x) = h'(x) = \frac{\eta\mu x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\sigma\upsilon\nu x > 0$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα άρα αντιστρέψιμη και επειδή είναι

συνεχής το σύνολο τιμών της h είναι το $\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), h\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{24}} \right] = A_{b^{-1}}$.

β) $\sqrt{b^{-1}(x)} \eta\mu b^{-1}(x) = b(b^{-1}(x)) = x$ άρα $\eta\mu b^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{b^{-1}(x)}}$ (2) και $1 = x' = [b(b^{-1})]'(x) = b'(b^{-1}(x)) \cdot (b^{-1})'(x)$

(3).

$b'(b^{-1}(x)) = \frac{\eta\mu b^{-1}(x)}{2\sqrt{b^{-1}(x)}} + \sqrt{b^{-1}(x)}\sigma\upsilon\nu b^{-1}(x) \stackrel{(2)}{=} \frac{x}{2b^{-1}(x)} + \sqrt{b^{-1}(x)}\sqrt{1 - \eta\mu^2 b^{-1}(x)} = \frac{x}{2b^{-1}(x)} + \sqrt{b^{-1}(x)}\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^{-1}(x)}}$

$= \frac{x}{2b^{-1}(x)} + \sqrt{b^{-1}(x) - x^2} = \frac{x + 2b^{-1}(x)\sqrt{b^{-1}(x) - x^2}}{2b^{-1}(x)}$ οπότε από (3)

$(b^{-1})'(x) = \frac{1}{b'(b^{-1}(x))} = \frac{2b^{-1}(x)}{x + 2b^{-1}(x)\sqrt{b^{-1}(x) - x^2}}$.

γ) Η εφαπτομένη της $C_{b^{-1}}$ στο $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{24}}$ είναι $y - b^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{24}}\right) = (b^{-1})'\left(\sqrt{\frac{\pi}{24}}\right)(x - b^{-1}\sqrt{\frac{\pi}{24}})$

$$\begin{aligned} \text{Με } b^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{24}}\right) &= b^{-1}\left(b\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6} \text{ και } (b^{-1})'\left(\sqrt{\frac{\pi}{24}}\right) = \frac{2b^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{24}}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{24}} + 2b^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{24}}\right)\sqrt{b^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{24}}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{24}}^2}} = \frac{2\frac{\pi}{6}}{\sqrt{\frac{\pi}{24}} + 2\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24}}} \\ &= \frac{\pi}{3\sqrt{\frac{\pi}{24}} + \pi\sqrt{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}}} \text{ άρα } y - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{\frac{\pi}{24}} + \pi\sqrt{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}}}\left(x - \sqrt{\frac{\pi}{24}}\right). \end{aligned}$$