

8^η ΔΙΑΛΥΚΕΙΑΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ
«Θεόδωρος Φυλακτός»
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΔΥΤΙΚΗΣ
ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ

ΠΕΜΠΤΗ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ &
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μία συνάρτηση f οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 6

A2. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

(i) Να δώσετε τον ορισμό της αρχικής ή παράγουσας της συνάρτησης f στο διάστημα Δ . (μονάδες 2)

(ii) Να δώσετε τον ορισμό των κρίσιμων σημείων της συνάρτησης f στο διάστημα Δ . (μονάδες 3)

Μονάδες 5

A3. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή και **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(i) Κάθε συνάρτηση 1-1 με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.

(ii) Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει ότι $f \circ g = g \circ f$.

(iii) Για κάθε δύο συναρτήσεις f, g που ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 με $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, θα ισχύει και ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

(iv) Για κάθε συνάρτηση f η οποία έχει τοπικά ελάχιστα, ισχύει ότι το μικρότερο από τα τοπικά της ελάχιστα είναι ολικό.

ΑΡΧΗ 2ης ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- (v) Για οποιεσδήποτε συνεχείς συναρτήσεις f, g με συνεχή πρώτη παράγωγο σε ένα διάστημα $[α,β]$, ισχύει η ισότητα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι συναρτήσεις $\varphi(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

- B1.** Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $\varphi \circ g$. **Μονάδες 5**

Για τα επόμενα ερωτήματα, θεωρήστε την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και για την οποία ισχύει ότι $f(x) = (\varphi \circ g)(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

- B2.** (i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα (μονάδες 4)
(ii) Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . (μονάδες 5)

Μονάδες 9

- B3.** (i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} . (μονάδες 3)
(ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α η εξίσωση $f^{-1}(f(x) - \alpha) = 1$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$. (μονάδες 3)

Μονάδες 6

- B4.** Έστω η συνάρτηση $h(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και f έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha x + \beta & , x < 1 \\ \frac{2}{x^2} & , x \geq 1 \end{cases}$, όπου

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -5$ και $\beta = 6$.

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ3. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=3$. Να προσδιορίσετε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $x=k$ να χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα κινητό σημείο M ξεκινάει από το σημείο $A(1,2)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, με $x \geq 1$. Έστω K η προβολή του σημείου M στον άξονα x' και έστω το σημείο $B(1,0)$. Όταν το σημείο M διέρχεται από το σημείο $\Gamma(3,f(3))$, το εμβαδόν του τριγώνου BKM ελαττώνεται με ρυθμό $1 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$. Να προσδιορίσετε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από το σημείο Γ .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και δύο φορές παραγωγίσιμη. Επιπλέον, για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- $f(0) = 0$
- $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \leq e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ακόμη, δίνεται ότι F είναι μία παράγουσα της f στο \mathbb{R} , με $F(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

- (i) $f'(0) = 1$. (μονάδες 4)
- (ii) $f(x) \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

- (i) $f(x) \leq x \cdot f'(x) \leq f(2x) - f(x)$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
(μονάδες 4)
- (ii) $2F(x) < x \cdot f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
(μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ3. Να λύσετε στο \mathbb{R} την εξίσωση $f(|x|) - f(|\eta\mu x|) = |x| - |\eta\mu x|$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $F(x) = 1 - \int_0^1 f(t) dt$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 5ης ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε διορθωτικό (blanco), χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά την διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : ενενήντα (90΄) λεπτά μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ