1_Διαγώνισμα_2026

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

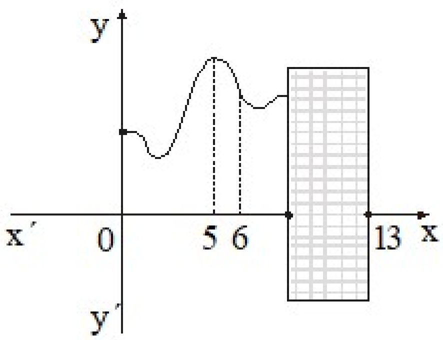
Α$_1$. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

Τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

(Μονάδες 7)

Α$_2$. Ένα μέρος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει καλυφθεί από μια αδιαφανή ετικέτα. Η f είναι ορισμένη στο $[0\ ,13]$ και είναι παραγωγίσιμη. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\int_5^{12} f'(x)dx$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.



(Μονάδες 4)

Α$_3$. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 4)

Α$_4$. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ΄ ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός.

Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=0$.

(Μονάδες 2)

β. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε και η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(Μονάδες 2)

γ. Κάθε πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ, είναι και κρίσιμο σημείο της f στο Δ.

(Μονάδες 2)

δ. Αν F , G είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης f, τότε αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά c.

(Μονάδες 2)

ε. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha\ ,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-\alpha+2}$ με πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{-1\}$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α. (Μονάδες 02)

Αν $\alpha=1$ τότε:

Β2. Να δείξετε ότι η f είναι «$1-1$» και να βρείτε την αντίστροφή της. (Μονάδες 05)

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

(Μονάδες 06)

Β4. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$. Να αποδείξετε ότι $E>1$. (Μονάδες 06)

Β5. Να λύσετε στο $A=\mathbb{R}-\{-1\}$ την εξίσωση:

$(x+1)^2\sigma\upsilon\nu^2 f(x)+(3x+1)^2=(x+1)^2$. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x)=(1-\lambda^2)x^2+\big(5-2\lambda f(x)\big)x+10$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ με $f(0)=\sqrt{10}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο:

$f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x,\ x\in\mathbb{R}.$ (Μονάδες 07)

Γ₂. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lambda<1 \\ \dfrac{5}{2}, & \text{αν } \lambda=1 \\ -\infty, & \text{αν } \lambda>1 \end{cases}$

(Μονάδες 06)

Γ₃. Αν $\lambda<1$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4f^2(x)+5f(x)+3}-2f(x)-\dfrac{5}{4}\right)=\kappa \quad (1)$

όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $\kappa=0$. (Μονάδες 03)

ii. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης (1);

(Μονάδες 03)

Γ₄. Να αποδείξετε ότι όταν το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός τότε η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $x-y+4=0$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $M(x_0,y_0)$ με $x_0\in(-1,0)$. (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί της σχέσεις:

- $e^{f(x)}+f(x)=\dfrac{x}{2026} \quad (1)$
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

Δ₁. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία , τα ακρότατα την κυρτότητα , και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 05)

Δ₂. **i.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}. (Μονάδες 02)

ii. Να αποδείξετε ότι ο $x = 2026$ είναι ρίζα της f και της (1).

(Μονάδες 03)

Δ₃. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu(2026x)+\sigma\upsilon\nu(2026x)}{f(x)}$ (Μονάδες 05)

Δ₄. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τυχαία επιλογή τριών διαφορετικών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ορίζεται πάντα τρίγωνο. (Μονάδες 05)

Δ₅. Αν F είναι μια παράγουσα της f με $F(1) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\varepsilon\varphi x} - e^{\eta\mu x}}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x}$ και το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 9$ είναι $E = 2027$ τετραγωνικές μονάδες, να υπολογίσετε το $F(9)$.

(Μονάδες 05)

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A₁. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

• Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A₂. $\int_5^{12} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_5^{12} = f(12) - f(5) < 0$,

αφού $f(5)$ η μέγιστη τιμή της f.

A₃. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .

A₄. α⟶Λ β⟶Λ, γ⟶Λ, δ⟶Σ, ε⟶Λ

ΘΕΜΑ Β

Β₁. Πρέπει $x-\alpha+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \alpha-2$ έχουμε από υπόθεση $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ δηλαδή $x\neq -1$ συνεπώς $\alpha-2=-1\Leftrightarrow \alpha=1$.

Β₂. Για $\alpha=1$ είναι $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$ για κάθε $x_1,x_2\in A$ έχουμε

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1+1}=\frac{3x_2+1}{x_2+1}\Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2+1)=(3x_2+1)(x_1+1)\Leftrightarrow$$

$3x_1x_2+3x_1+x_2+1=3x_1x_2+3x_2+x_1+1\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι «$1-1$» στο $A=\mathbb{R}-\{-1\}$.

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{3x+1}{x+1}\Leftrightarrow y(x+1)=3x+1\Leftrightarrow xy+y=3x+1\Leftrightarrow$$

$$yx-3x=1-y\Leftrightarrow (y-3)x=1-y \quad (1)$$

Αν $y-3=0\Leftrightarrow y=3$ τότε από την (1) προκύπτει $0x=-2$ αδύνατη

Άρα $y\neq 3$ και από την (1) έχουμε $x=\dfrac{1-y}{y-3}$

Συνεπώς $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{x-3}$, $x\neq 3$.

Β₃. <u>Για κατακόρυφες</u>

Επειδή $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\left[\dfrac{1}{x+1}(3x+1)\right]=-\infty(-2)=+\infty$

γιατί για $x<-1$ είναι $x+1<0$ και $\lim\limits_{x\to -1^-}(x+1)=0$

και $\lim\limits_{x\to -1^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^{+}}\dfrac{3x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^{+}}\left[\dfrac{1}{x+1}(3x+1)\right]=+\infty(-2)=-\infty$

γιατί για $x>-1$ είναι $x+1>0$ και $\lim\limits_{x\to -1^{+}}(x+1)=0$

άρα η $x=-1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

<u>Για Πλαγίες-οριζόντιες</u>

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x}{x}=3$, η $y=3$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x}{x}=3$, η $y=3$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β₄. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από την γραφική παράσταση της f τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$ είναι

$E=\int_0^1 |f(x)|dx$ και επειδή για $x\geq 0$ είναι προφανώς $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}>0$

έχουμε

$$\begin{array}{r|l} 3x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -3x-3 & 3 \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{3x+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(3-\frac{2}{x+1}\right)dx=\int_0^1 3dx-\int_0^1\frac{2}{x+1}dx$$

$$=3[x]_0^1-2\big[\ln|x+1|\big]_0^1=3-2\ln 2=\ln e^3-\ln 4=\ln\frac{e^3}{4}$$ τετραγωνικές μονάδες

Έχουμε $E>1\Leftrightarrow \ln\dfrac{e^3}{4}>\ln e\overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow}\dfrac{e^3}{4}>e\Leftrightarrow e^3>4e\Leftrightarrow e^3-4e>0\Leftrightarrow$

$e(e^2-4)>0\Leftrightarrow e(e-2)(e+2)>0$ που προφανώς ισχύει. $(e\approx 2,718)$

Β₅. Στο $A=\mathbb{R}-\{-1\}$ έχουμε

$$(x+1)^2\sigma\upsilon\nu^2 f(x)+(3x+1)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2[1-\eta\mu^2 f(x)]+(3x+1)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)^2-(x+1)^2\eta\mu^2 f(x)+(3x+1)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$-(x+1)^2\eta\mu^2 f(x)+(3x+1)^2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2\eta\mu^2 f(x)=(3x+1)^2 \overset{x\neq-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\eta\mu^2 f(x)=\frac{(3x+1)^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \eta\mu^2 f(x)=\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2 f(x)=f^2(x) \Leftrightarrow$$

$|\eta\mu f(x)|=|f(x)|$ (1) ξέρουμε ότι $|\eta\mu x|\leq|x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$ επομένως από την (1) προκύπτει

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x+1}=0 \Leftrightarrow 3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ₁. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)=(1-\lambda^2)x^2+\big(5-2\lambda f(x)\big)x+10 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)=x^2-\lambda^2x^2+5x-2\lambda x f(x)+10 \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)+2\lambda x f(x)+\lambda^2x^2=x^2+5x+10 \Leftrightarrow$$

$$\big(f(x)+\lambda x\big)^2=x^2+5x+10 \Leftrightarrow$$

$g^2(x)=x^2+5x+10$ (1) όπου $g(x)=f(x)+\lambda x$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $x^2+5x+10>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού το τριώνυμο $\varphi(x)=x^2+5x+10$ έχει $\Delta=25-40<0$.

Έτσι από την (1) έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g^2(x)=x^2+5x+10>0 \Rightarrow g^2(x)\neq 0 \Rightarrow g(x)\neq 0$$

Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+\lambda x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)\neq 0$, οπότε η $g(x)$ διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο και επειδή είναι

$g(0)=f(0)+\lambda\cdot 0=\sqrt{10}>0$

συμπεραίνουμε ότι είναι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $g^2(x)=x^2+5x+10 \Leftrightarrow |g(x)|=\sqrt{x^2+5x+10} \overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}$

$$g(x)=\sqrt{x^2+5x+10} \Leftrightarrow f(x)+\lambda x=\sqrt{x^2+5x+10} \Leftrightarrow$$

$f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ₂. $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}-\lambda x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda x\right)\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\lambda\right)=(+\infty)(1-\lambda)=\begin{cases}+\infty\ , \text{αν } \lambda<1\\ -\infty\ , \text{αν } \lambda>1\end{cases}$$

Για $\lambda=1$ Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x+10}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5x+10}+x\right)}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+10-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+10}{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+x}$$

$$\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5+\frac{10}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{10}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1}=\frac{5+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{5}{2}$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases}+\infty\ , \text{αν } \lambda<1\\ \frac{5}{2}\ , \text{αν } \lambda=1\\ -\infty\ , \text{αν } \lambda>1\end{cases}$

Γ₃. i. Για $\lambda<1$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ οπότε έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4f^2(x)+5f(x)+3}-2f(x)-\frac{5}{4}\right)\underset{\substack{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ u\to+\infty}}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim_{u\to+\infty}\left(\sqrt{4u^2+5u+3}-2u-\frac{5}{4}\right)$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4u^2+5u+3}-2u\right)\left(\sqrt{4u^2+5u+3}+2u\right)}{\sqrt{4u^2+5u+3}+2u}-\frac{5}{4}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{4u^2+5u+3-4u^2}{\sqrt{u^2\left(4+\frac{5}{u}+\frac{3}{u^2}\right)}+2u}-\frac{5}{4}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{5u+3}{|u|\sqrt{4+\frac{5}{u}+\frac{3}{u^2}}+2u}-\frac{5}{4}\overset{u>0}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{u\left(5+\frac{3}{u}\right)}{u\sqrt{4+\frac{5}{u}+\frac{3}{u^2}}+2u}-\frac{5}{4}$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{u\left(5+\frac{3}{u}\right)}{u\left(\sqrt{4+\frac{5}{u}+\frac{3}{u^2}}+2\right)}-\frac{5}{4}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\left(5+\frac{3}{u}\right)}{\left(\sqrt{4+\frac{5}{u}+\frac{3}{u^2}}+2\right)}-\frac{5}{4}$$

$=\frac{5+0}{\sqrt{4+0+0}+2}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=0$ Συνεπώς $\kappa=0$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4f^2(x)+5f(x)+3}-2f(x)-\dfrac{5}{4}\right)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4f^2(x)+5f(x)+3}-\left(2f(x)+\dfrac{5}{4}\right)\right]=0$ (Για $\lambda<1$ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$)

οπότε $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\sqrt{4u^2+5u+3}-(2u+\dfrac{5}{4})\right)=0$

($f(x)=u$ όταν $x\to+\infty$ τότε $u\to+\infty$)

Επομένως η γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης είναι ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\sqrt{4x^2+5x+3}$ έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x+\dfrac{5}{4}$.

Γ₄. Από το **Γ₂** ξέρουμε ότι το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\in\mathbb{R}$ όταν $\lambda=1$ άρα σε αυτή τη περίπτωση ο τύπος της f είναι $f(x)=\sqrt{x^2+5x+10}-x$, με $x\in\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $x-y+4=0\Leftrightarrow y=x+4$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $M(x_0,y_0)$ με $x_0\in(-1,0)$ θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει σημείο $M(x_0,y_0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0+4$ και στην συνέχεια θα δείξουμε την μοναδικότητα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x-4$

Η h είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$h(-1)=f(-1)-(-1)-4=\sqrt{6}+1+1-4=\sqrt{6}-2=\sqrt{6}-\sqrt{4}>0$

$h(0)=f(0)-0-4=\sqrt{10}-4=\sqrt{10}-\sqrt{16}<0$

Είναι $h(-1)\cdot h(0)<0$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0+4$.

Έστω ότι η h έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ τότε έχουμε:

Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+10}} - 1 - 1 = \frac{2x+5-4\sqrt{x^2+5x+10}}{2\sqrt{x^2+5x+10}}$$

$$h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$

τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\xi+5-4\sqrt{\xi^2+5\xi+10}}{2\sqrt{\xi^2+5\xi+10}} = 0 \Leftrightarrow 2\xi+5-4\sqrt{\xi^2+5\xi+10} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\xi+5 = 4\sqrt{\xi^2+5\xi+10} \quad (2)$$

Αν $2\xi+5<0$ η (2) είναι αδύνατη

Αν $2\xi+5 \geq 0$ από την (2) έχουμε : $(2\xi+5)^2 = 16(\xi^2+5\xi+10) \Leftrightarrow$

$4\xi^2+20\xi+25 = 16\xi^2+80\xi+160 \Leftrightarrow 12\xi^2+60\xi+135 = 0$ η οποία είναι αδύνατη αφού έχει $\Delta < 0$.

Συνεπώς με την υπόθεση ότι η h έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 καταλήξαμε σε άτοπο .

Άρα η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $x-y+4=0$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (-1, 0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα η $e^{f(x)}+f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε

$$e^{f(x)}f'(x)+f'(x)=\frac{1}{2026}\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}+1\right)f'(x)=\frac{1}{2026}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2026\left(e^{f(x)}+1\right)}>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Η $f'(x)=\dfrac{1}{2026\left(e^{f(x)}+1\right)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πηλίκο

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=-\dfrac{e^{f(x)}f'(x)}{2026\left(e^{f(x)}+1\right)^2}<0$, για κάθε

$x\in\mathbb{R}$, επομένως η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Δ₂. i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και "$1-1$" οπότε αντιστρέφεται.

Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ η f^{-1} θα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, με $x,y\in\mathbb{R}$ συνεπώς η (1) γράφεται

$$e^{y}+y=\frac{f^{-1}(y)}{2026}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=2026(e^{y}+y)\ \text{ με }\ y\in\mathbb{R}.$$

Επομένως $f^{-1}(x)=2026(e^{x}+x)$ με $x\in\mathbb{R}$.

ii. Είναι $f^{-1}(0)=2026(e^{0}+0)=2026$,

$$f^{-1}(0)=2026\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(0)\right)=f(2026)\Leftrightarrow f(2026)=0$$

Η (1) για $x=2026$ γίνεται

$e^{f(2026)}+f(2026)=\dfrac{2026}{2026}\Leftrightarrow e^{0}+0=1\Leftrightarrow e^{0}=1$ ισχύει άρα ο $x=2026$ είναι ρίζα της (1).

Δ₃. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$ και το σύνολο τιμών είναι το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Έχουμε $\begin{array}{l}-1\le ημ(2026x)\le 1\\ -1\le συν(2026x)\le 1\end{array}$

Προσθέτοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη και διαιρώντας με $f(x)>0$ σε μία περιοχή «κοντά» στο $+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ έχουμε

$$-2\le ημ(2026x)+συν(2026x)\le 2\Rightarrow \frac{-2}{f(x)}\le\frac{ημ(2026x)+συν(2026x)}{f(x)}\le\frac{2}{f(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{f(x)}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{f(x)}$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ημ(2026x)+συν(2026x)}{f(x)}=0$$

Δ₄. Αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $Γ(x_3,f(x_3))$ με $x_1<x_2<x_3$ δεν είναι συνευθειακά.

Έστω τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $Γ(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά τότε θα ισχύει:

$$\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \qquad (3)$$

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1,x_2]$ και $[x_2,x_3]$ οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi_1\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και ένα τουλάχιστον

$\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

Η (3) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ που είναι άτοπο γιατί $f''(x)<0$, άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνεπώς είναι και "$1-1$". Επομένως τα σημεία θα ορίζουν πάντα τρίγωνο.

Δ5. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x}-e^{\eta\mu x}}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\eta\mu x}\left(\dfrac{e^{\varepsilon\varphi x}}{e^{\eta\mu x}}-1\right)}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\eta\mu x}\left(e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}-1\right)}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=$$

$\lim\limits_{x\to 0} e^{\eta\mu x}\dfrac{e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}-1}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=1.1=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0} e^{\eta\mu x}=e^0=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}-1}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}\underset{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}{\overset{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{u\to 0}e^u=1$ επομένως $F(1)=1$.

Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=9$ είναι

$E=\int_1^9|f(x)|dx$ για $x<2026\overset{f\ \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi}{\Leftrightarrow}f(x)<f(2026)\Leftrightarrow f(x)<0$.

$E=2027\Leftrightarrow -\int_1^9 f(x)dx=2027\Leftrightarrow -[F(x)]_1^9=2027\Leftrightarrow F(9)-F(1)=-2027\Leftrightarrow$

$F(9)-1=-2027\Leftrightarrow F(9)=-2026$.