



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 10

A2. Πότε η ευθεία $y = ax + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 5

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c dx$ εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c .



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

β) Αν η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε η f παίρνει

δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και το α είναι θέση

ελαχίστου τότε $f'(\alpha) = 0$.

δ) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} , αν τέμνονται τότε

τέμνονται πάνω στην ευθεία $y = x$.

ε) Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[\alpha, \beta]$

τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - \alpha}$, $\alpha > 0$

B1. Να βρείτε την σύνθεση της συνάρτησης h με την συνάρτηση g .

Μονάδες 5

Αν η συνάρτηση $f(x) = (g \circ h)(x) = \frac{2x+1}{x-\alpha}$, $x > 0$ με $x \neq \alpha$ έχει κατακόρυφη

ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.

B2. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την

αντίστροφη της.

Μονάδες 5



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Αν $f^{-1}(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

B4. α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $K(\lambda) = \int_3^\lambda f^{-1}(x) dx$, $\lambda > 3$.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης K τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 10$ σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $\lambda_0 \in (4, e^4 + 2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία $f^2(x) + e^{x-1} \ln x^2 = e^{2x-2} + \ln^2 x$ για κάθε $x > 0$ και $\int_\alpha^\beta f(x) dx > 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $x > 0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-1} = \ln(e^2 x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$

Μονάδες 5

Γ3. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο A της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f διέρχεται από το σημείο $B(0, 2)$.

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (x_1, x_2): e^{\xi_1-1} = \frac{1}{\xi_2}$

Μονάδες 5



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Γ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{f(x)f(\sqrt[3]{t}+1)}{\eta\mu^2 x} dt$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} e^{x^2} + \alpha, & x \geq 0 \\ xe^x + e^\alpha, & x < 0 \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha=0$

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της g .

Μονάδες 3

Δ3. Αν $\beta \in \mathbb{R}$ με $\beta > 0$, βρείτε αν υπάρχουν κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της g και της ευθείας $(\varepsilon): y = \ln \beta - \beta$.

Μονάδες 4

Δ4. α. Βρείτε το εμβαδό του χωρίου E , το οποίο περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τις ευθείες $x=0$, $x=1$ και την ευθεία με εξίσωση $(\eta): y = g(x_0)$ όπου $g(x_0) \in (1, e)$

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, ώστε το εμβαδό E να γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 4



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Δ5. Έστω $h(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και H μία αρχική της στο \mathbb{R} με $H(0)=0$. Δείξτε ότι:

α. Η συνάρτηση H είναι περιττή

Μονάδες 4

β. Να λύσετε την εξίσωση $H(x-1) + x = H(x) - H(1-x)$

Μονάδες 2

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Σελίδα 135 σχολικό βιβλίο.

A₂. Σελίδα 162 σχολικό βιβλίο.

A₃. Σελίδα 74 σχολικό βιβλίο.

A₄.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B₁. Για την σύνθεση της συνάρτησης h με την συνάρτηση g έχουμε

$$h(x) = \ln x, D_h = (0, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - \alpha}, \alpha > 0 \quad \text{πρέπει } e^x - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq \alpha \Leftrightarrow x \neq \ln \alpha \quad \text{έτσι } D_g = \mathbb{R} - \{\ln \alpha\}$$

$$D_{g \circ h} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } \ln x \in \mathbb{R} - \{\ln \alpha\}\} \\ = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } \ln x \neq \ln \alpha\} = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } x \neq \alpha\} = (0, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{2e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - \alpha} = \frac{2x + 1}{x - \alpha}, x \in (0, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

B2. Έχουμε $f(x) = \frac{2x+1}{x-\alpha}$ με $D_f = (0, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$

Αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες στα σημεία ασυνέχειας και στα ανοιχτά άκρα του πεδίου ορισμού της f ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ ή $+\infty$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών στο $D_f = (0, \alpha) \cup (\alpha, +\infty)$

Αν το $a \neq 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq -\infty$ ή $+\infty$ άτοπο αφού $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

από την υπόθεση. Άρα $\alpha = 1$ και επομένως $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

B3. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 2 = 2x_2x_1 - 2x_2 + x_1 - 2 \Leftrightarrow -2x_1 - x_1 = -2x_2 - x_2 \Leftrightarrow -3x_1 = -3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι "1-1" άρα αντιστρέφεται

Έστω

$$f(x) = y \stackrel{x \in D_f}{\Leftrightarrow} \frac{2x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow 2x+1 = xy - y \Leftrightarrow 2x - xy = -y - 1 \Leftrightarrow x(2-y) = -(y+1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(y+1)}{2-y} \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \stackrel{x=f^{-1}(y)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$x \in D_f \Rightarrow \frac{y+1}{y-2} \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow \frac{y+1}{y-2} > 0 \text{ και } \frac{y+1}{y-2} \neq 1$$

$$\Rightarrow y \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \text{ και } y+1 \neq y-2$$

$$\Rightarrow y \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \text{ και } 1 \neq -2 \text{ Ισχύει } \Rightarrow y \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$ με $D_{f^{-1}} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η εύρεση του πεδίου ορισμού της αντίστροφης θα μπορούσε να είχε προηγηθεί της εύρεσης του τύπου της, με χρήση της μονοτονίας και της εύρεσης του συνόλου τιμών της συνάρτησης f .

B4. Έχουμε για την συνεχή συνάρτηση (πηλίκο συνεχών) f^{-1} :

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2+3}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}, x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

α)

$$\begin{aligned} K(\lambda) &= \int_3^\lambda f^{-1}(x) dx = \int_3^\lambda \left(1 + \frac{3}{x-2}\right) dx = [x + 3\ln|x-2|]_3^\lambda \\ &= \lambda + 3\ln|\lambda-2| - 3 - 3\ln|3-2| \stackrel{\lambda > 3}{=} \lambda - 3 + 3\ln(\lambda-2) \end{aligned}$$

$$\text{άρα } K(\lambda) = \lambda - 3 + 3\ln(\lambda-2)$$

β) σημεία τομής C_κ με $(\varepsilon): y = 1$

$$K(\lambda) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 3 + 3\ln(\lambda-2) = 1 \Leftrightarrow 3\ln(\lambda-2) + \lambda - 4 = 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $t(x) = 3\ln(x-2) + x - 4$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση t στο $[3, e+2]$

Η t είναι συνεχής στο $[3, e+2]$ ως πράξη συνεχών

$$t(3) = 3\ln(3-2) + 3 - 4 = -1 < 0$$

$$t(e+2) = 3\ln(e+2-2) + e+2 - 4 = 3\ln e + e - 2 = e+1 > 0$$

Έτσι $t(3) \cdot t(e+2) < 0$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Συνεπώς από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_0 \in (3, e+2)$ τέτοιο ώστε $t(\lambda_0) = 0$ δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης κ τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\lambda_0 \in (3, e+2)$.

Ακόμα η συνάρτηση $t(x) = 3\ln(x-2) + x - 4$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη

παραγωγίσιμων στο $(3, e+2)$ με $t'(x) = \frac{3}{x-2} + 1 > 0$ για κάθε $x \in (3, e+2)$ έτσι η

συνάρτηση t είναι γνησίως αύξουσα άρα το σημείο $\lambda_0 \in (3, e+2)$ είναι μοναδικό.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε

$$f^2(x) + e^{x-1} \ln x^2 = e^{2x-2} + \ln^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = (e^{x-1})^2 - 2e^{x-1} \ln x + \ln^2 x \\ \Leftrightarrow f^2(x) = (e^{x-1} - \ln x)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |e^{x-1} - \ln x|$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = e^{x-1} - \ln x$, $D_h = (0, +\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων άρα και συνεχής με

$$h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \text{ η οποία είναι παραγωγίσιμη με } h''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$$

Έτσι η συνάρτηση h' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με προφανή ρίζα το

$$x = 1 \text{ διότι } h'(1) = e^{1-1} - \frac{1}{1} = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$x > 1 \stackrel{h'}{\Rightarrow} h'(x) > h'(1) \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \stackrel{h'}{\Rightarrow} h'(x) < h'(1) \Leftrightarrow h'(x) < 0$$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Προκύπτει λοιπόν ο εξής πίνακας μονοτονίας

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	○	+
$h(x)$	↘		↗

Η συνάρτηση h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ το $h(1)=e^{1-1}-\ln 1=e^0=1$

έτσι $h(x) \geq h(1) \Leftrightarrow h(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - \ln x \geq 0$ άρα $|e^{x-1} - \ln x| = e^{x-1} - \ln x$

Επομένως είναι $f(x) \neq 0$ και ως συνεχής διατηρεί πρόσημο.

Ακόμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ και $\alpha < \beta$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,

αφού αν ήταν

$f(x) < 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$ με την f συνεχή

τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$

άτοπο από την υπόθεση.

Επομένως έχουμε $f(x) = e^{x-1} - \ln x, x \in (0, +\infty)$

Γ2. Έχουμε $e^{x-1} = \ln(e^2 x) \Leftrightarrow e^{x-1} = \ln e^2 + \ln x \Leftrightarrow e^{x-1} - \ln x = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f :

Από το ερώτημα Γ1 έχουμε

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘		↗



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Για $A_1 = (0,1)$ η f είναι συνεχής στο A_1 και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x-1} - \ln x) = e^{0-1} - (-\infty) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} - \ln x) = e^{1-1} - \ln 1 = e^0 = 1$

$2 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο A_1 είναι μοναδικό.

Για $A_2 = [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής στο A_2 και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$$

- $f(1) = e^{1-1} - \ln 1 = e^0 = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} \left(1 - \frac{\ln x}{e^{x-1}} \right) = +\infty(1-0) = +\infty$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{x-1}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot e^{x-1}} = 0 \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot e^{x-1}) = +\infty$$

$2 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in A_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο A_2 είναι μοναδικό. Όμως $f(1) = 1 \neq 2$ άρα $x_2 \in (1, +\infty)$.

Επομένως η εξίσωση $e^{x-1} = \ln(e^2 x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(x_0, f(x_0))$ είναι $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$B(0,2) \in \varepsilon \Leftrightarrow 2 - e^{x_0-1} + \ln x_0 = \left(e^{x_0-1} - \frac{1}{x_0} \right) (-x_0) \Leftrightarrow 2 - e^{x_0-1} + \ln x_0 = -x_0 e^{x_0-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow x_0 e^{x_0-1} - e^{x_0-1} + \ln x_0 + 1 = 0$$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Θεωρούμε την συνάρτηση $\kappa(x) = xe^{x-1} - e^{x-1} + \ln x + 1$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \kappa(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^{x-1} - e^{x-1} + \ln x + 1) = 0 \cdot e^{0-1} - e^{0-1} + (-\infty) + 1 = -\infty$

Άρα υπάρχει ένα ρ "κοντά" στο 0^+ τέτοιο ώστε $\kappa(\rho) < 0$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση κ στο $[\rho, 1]$

- Η κ είναι συνεχής στο $[\rho, 1]$ ως πράξη συνεχών
- $\kappa(\rho) < 0$

$$\kappa(1) = 1 \cdot e^{1-1} - e^{1-1} + \ln 1 + 1 = 1 > 0$$

Άρα $\kappa(\rho) \cdot \kappa(1) < 0$

Συνεπώς από θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $\kappa(x) = 0$ στο $(\rho, 1)$ δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο A της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f διέρχεται από το $B(0, 2)$.

Ακόμα η συνάρτηση κ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων με

$$\kappa'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} - e^{x-1} + \frac{1}{x} = xe^{x-1} + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Άρα η συνάρτηση κ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ έτσι το σημείο αυτό είναι μοναδικό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κάποια άλλη προσέγγιση στη λύση του ερωτήματος:

$$B \in (\varepsilon) : 2 - f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) + f(x_0) - 2 = 0$$

Εφαρμογή θεωρήματος Bolzano στο $[x_1, x_2]$ για τη συνάρτηση

$m(x) = x \cdot f'(x) + f(x) - 2$ και χρήση θεωρήματος Rolle και ατόπου για την εξασφάλιση της μοναδικότητας.



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Γ4. Από το ερώτημα Γ2 έχουμε $f(x_1) = 2 \Leftrightarrow e^{x_1-1} - \ln x_1 = 2$ και

$$f(x_2) = 2 \Leftrightarrow e^{x_2-1} - \ln x_2 = 2$$

Για $\xi_1 \neq \xi_2$

Θεωρούμε την συνάρτηση $t(x) = e^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση t στο $[x_1, x_2]$

- Η συνάρτηση t είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως εκθετική.
- Η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως εκθετική.

Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$t'(\xi_1) = \frac{t(x_2) - t(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow e^{\xi_1-1} = \frac{e^{x_2-1} - e^{x_1-1}}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $r(x) = \ln x$, $x > 0$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση r στο $[x_1, x_2]$

- Η συνάρτηση r είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως λογαριθμική.
- Η συνάρτηση r είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως λογαριθμική.

Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$r'(\xi_2) = \frac{r(x_2) - r(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_2} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) έχουμε

$$\begin{aligned} e^{\xi_1-1} = \frac{1}{\xi_2} &\Leftrightarrow \frac{e^{x_2-1} - e^{x_1-1}}{x_2 - x_1} = \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow e^{x_2-1} - e^{x_1-1} = \ln x_2 - \ln x_1 \\ &\Leftrightarrow e^{x_1-1} - \ln x_1 = e^{x_2-1} - \ln x_2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ Ισχύει} \end{aligned}$$

Για $\xi_1 = \xi_2$

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$e^{\xi_1-1} = \frac{1}{\xi_1} \Leftrightarrow e^{\xi_1-1} - \frac{1}{\xi_1} = 0 \quad (I)$$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο $[x_1, x_2]$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξη συνεχών.
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ως πράξη παραγωγίσιμων.

Συνεπώς υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow e^{\xi_1 - 1} - \frac{1}{\xi_1} = \frac{2 - 2}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow e^{\xi_1 - 1} - \frac{1}{\xi_1} = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κάποια άλλη προσέγγιση στη λύση του ερωτήματος για την περίπτωση που $\xi_1 = \xi_2$. Η $(I) \Rightarrow f'(\xi_1) = 0$, η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την $\xi_1 = 1$ με $f''(x) > 0$ άρα f' γνησίως αύξουσα έτσι η $\xi_1 = 1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης

Γ5. Έχουμε

$$0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt[3]{t} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt[3]{t} + 1 \leq 2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow}_{[1,2]} f(1) \leq f(\sqrt[3]{t} + 1) \leq f(2)$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq f(\sqrt[3]{t} + 1) \leq e - \ln 2 \quad (A)$$

Η $f(\sqrt[3]{t} + 1)$ συνεχής στο $[0, 1]$ χωρίς να ισχύει παντού το = στην (A) επομένως

$$(A) \Rightarrow \int_0^1 1 dt < \int_0^1 f(\sqrt[3]{t} + 1) dt < \int_0^1 (e - \ln 2) dt$$

$$\stackrel{f(x) > 0}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} \int_0^1 1 dt < \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} \int_0^1 f(\sqrt[3]{t} + 1) dt < \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} \int_0^1 (e - \ln 2) dt \quad (1)$$

$$\bullet \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

$$\bullet \int_0^1 (e - \ln 2) dt = [(e - \ln 2)t]_0^1 = (e - \ln 2)(1 - 0) = e - \ln 2$$

$$\text{Η σχέση (1) γίνεται } \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} < \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} \int_0^1 f(\sqrt[3]{t} + 1) dt < \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} (e - \ln 2)$$

$$\text{Ισχύει ότι } |\eta\mu x| \leq |x| \Rightarrow \eta\mu^2 x \leq x^2 \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu^2 x} > \frac{1}{x^2} \stackrel{f(x) > 0}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} > \frac{f(x)}{x^2} \quad (B)$$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1} - \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{x-1}}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty - 0 = +\infty$$

$$\text{Διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{x^2} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{2x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{2} \stackrel{DLH}{=} +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} (e - \ln 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1} - \ln x}{x^2} (e - \ln 2) = +\infty (e - \ln 2) = +\infty$$

$$\text{Συνεπώς από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} \int_0^1 f(\sqrt[3]{t} + 1) dt = +\infty$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Προφανώς η εύρεση του ορίου στο τελευταίο της στάδιο θα μπορούσε να προκύψει και με εφαρμογή γνωστής πρότασης συμφωνα με την οποία:

$$\text{Αν } m(x) > k(x) \text{ σε περιοχή του } x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} k(x) = +\infty \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} m(x) = +\infty$$

σε συνέχεια της λύσης από τη σχέση (B) για την

$$\frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} < \frac{f(x)}{\eta\mu^2 x} \int_0^1 f(\sqrt[3]{t} + 1) dt.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ έτσι πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 1 \Leftrightarrow e^\alpha - \alpha - 1 = 0$$

Γνωρίζουμε ότι είναι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με το '=' να ισχύει μόνο για $x = 0$ άρα $\alpha = 0$.



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το παραπάνω προκύπτει και εάν ορίσουμε $t(x) = e^x - x - 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $t'(x) = e^x - 1$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$t'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$t'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$t'(x)$	$-$	\circ	$+$
$t(x)$	\searrow		\nearrow

Άρα η συνάρτηση t παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ δηλαδή

$$t(x) \geq t(0) \Leftrightarrow t(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με το ''='' να ισχύει μόνο για } x = 0$$

Επομένως $\alpha = 0$.

$$\text{Έχουμε λοιπόν } g(x) = \begin{cases} e^{x^2}, & x \geq 0 \\ xe^x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

Δ2. Θα αναζητήσω εσωτερικά στα οποία είτε μηδενίζεται είτε δεν υπάρχει η παράγωγος της f .

Εσωτερικά σημεία της συνάρτησης g στα οποία η παράγωγος της μηδενίζεται:

Για κάθε $x > 0$ η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2xe^{x^2} > 0$ έτσι δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία.

Για κάθε $x < 0$ η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Έτσι το $x = -1$ είναι κρίσιμο σημείο της g

Εσωτερικά σημεία της συνάρτησης g στα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος:

Στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2} - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (2xe^{x^2}) = 0$$

Άρα η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ έτσι $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο.

Τελικά τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης g είναι τα $x = -1$ και $x = 0$.

Δ3. Για $\beta > 0$ αναζητώ το πλήθος των ριζών της $g(x) = \ln \beta - \beta$

Θεωρούμε την συνάρτηση $w(x) = \ln x - x$ η οποία είναι συνεχής στο

$D_w = (0, +\infty)$ ως πράξη συνεχών με $w'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$$w'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$w'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$



$$w'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} < 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Προκύπτει επομένως ο εξής πίνακας μονοτονίας

x	0	1	$+\infty$
$w'(x)$	+	○	-
$w(x)$			

Η συνάρτηση w παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=1$ το $w(1)=\ln 1-1=-1$ έτσι

$$w(x) \leq w(1) \Leftrightarrow w(x) \leq -1$$

Συνεπώς $\ln \beta - \beta \leq -1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η παραπάνω προκύπτει και άμεσα από τη γνωστή βασική ανισοτική

$$\ln x \leq x-1 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της g

$$\text{Έχουμε } g'(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2}, & x > 0 \\ e^x + xe^x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Για } x > 0 \quad g'(x) = 2xe^{x^2} > 0$$

$$\text{Για } x < 0 \quad g'(x) = e^x + xe^x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) > 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) < 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$$



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Προκύπτει επομένως ο εξής πίνακας μονοτονίας

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	\circ	$+$	$+$
$g(x)$	\searrow		\nearrow	\nearrow

Για $A_1 = (-\infty, -1]$ η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$g(A_1) = \left[g(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right) = \left[1 - \frac{1}{e}, 1 \right)$$

- $g(-1) = 1 - \frac{1}{e}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1$ διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$

$\ln \beta - \beta \notin g(A_1)$ άρα η $g(x) = \ln \beta - \beta$ είναι αδύνατη στο A_1

Για $A_2 = [-1, +\infty)$ η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$g(A_2) = \left[g(-1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = \left[1 - \frac{1}{e}, +\infty \right)$$

- $g(-1) = 1 - \frac{1}{e}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

$\ln \beta - \beta \notin g(A_2)$ άρα η $g(x) = \ln \beta - \beta$ είναι αδύνατη στο A_2

Δ4. α) Το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου δίνεται από τον τύπο

$$E = \int_0^1 |g(x) - g(x_0)| dx$$

Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ άρα και $x \in [0, 1]$ η g είναι γνησίως αύξουσα



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

$$\text{Τότε } g(x) - g(x_0) = 0 \Rightarrow g(x) = g(x_0) \xrightarrow{g'} x = x_0$$

$$g(x) - g(x_0) < 0 \Rightarrow g(x) < g(x_0) \xrightarrow{g'} x < x_0$$

$$g(x) - g(x_0) > 0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) \xrightarrow{g'} x > x_0$$

$$\text{Επομένως } E = \int_0^{x_0} g(x_0) - g(x) dx + \int_{x_0}^1 g(x) - g(x_0) dx$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και έστω G μία αρχική της στο $[0,1]$

τότε

$$\begin{aligned} E(x_0) &= \int_0^{x_0} g(x_0) - g(x) dx + \int_{x_0}^1 g(x) - g(x_0) dx = [g(x_0)x - G(x)]_0^{x_0} + [G(x) - g(x_0)x]_{x_0}^1 = \\ &= g(x_0)(x_0 - 0) - G(x_0) + G(0) + G(1) - G(x_0) - g(x_0)(1 - x_0) = \\ &= G(0) + G(1) - 2G(x_0) + g(x_0)(2x_0 - 1), \quad x_0 \in [0,1] \end{aligned}$$

β) Η $E(x) = G(0) + G(1) - 2G(x) + g(x)(2x - 1)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμων αντίστοιχα με

$$E'(x) = -2g(x) + g'(x)(2x - 1) + 2g(x) = g'(x)(2x - 1)$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x)(2x - 1) = 0 \underset{x \in (0,1)}{\overset{g'(x) > 0}{\Leftrightarrow}} 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x)(2x - 1) > 0 \underset{x \in (0,1)}{\overset{g'(x) > 0}{\Leftrightarrow}} 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$E'(x)$		○	
$E(x)$			



ΓΕΝΝΑΔΕΙΟΣ ΣΧΟΛΗ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

Επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 = \frac{1}{2}$ ώστε το εμβαδόν να δίνεται ελάχιστο.

Δ5. α) Αρκεί να δείξουμε ότι $H(-x) = -H(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή $H(-x) + H(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω $v(x) = H(-x) + H(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , άρα και συνεχής με

$$v'(x) = h(x) - h(-x) = e^{x^2} - e^{x^2} = 0 \text{ άρα η συνάρτηση } v \text{ είναι σταθερή στο } \mathbb{R}$$

δηλαδή $v(x) = c, c \in \mathbb{R}$ τότε $H(-x) + H(x) = c$

$$\text{Για } x=0 \text{ έχω } H(0) + H(0) = c \Rightarrow c = 0$$

Οπότε $v(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $H(-x) = -H(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\beta) H(x-1) + x = H(x) - H(1-x) \stackrel{\text{Η περιττή}}{\Leftrightarrow_{H(x-1) = -H(1-x)}} H(x-1) + x = H(x) + H(x-1) \Leftrightarrow H(x) - x = 0$$

θεωρούμε την συνάρτηση $r(x) = H(x) - x$ η οποία είναι συνεχής και έχει

προφανή ρίζα το $x = 0$ διότι $r(0) = H(0) - 0 = H(0) = 0$

Ακόμα $r'(x) = e^{x^2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow r'(x) \geq 0$ με το ίσο μόνο στο 0, άρα

$r'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, όπου r συνεχής στο 0, άρα r γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

άρα έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.