

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΑΝΑΓΟΥΛΑΣ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 27 ΜΑΡΤΙΟΥ 2026**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $y = \ell$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

**β)** Αν  $0 < a < 1$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ .

**γ)** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι πάντα διάστημα.

**δ)** Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$ , ώστε  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**ε)** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$ , παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  και  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$ , τότε  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $K, \Lambda$  με τύπους  $K(x) = \frac{2x}{x+1}$  και  $\Lambda(x) = e^x$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η σύνθεση  $g = K \circ \Lambda$  έχει τύπο  $g(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 4**

Έστω η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = x + 1 - g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της  $f$ .

**Μονάδες 6**

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

**Μονάδες 5**

**B4.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $y = x + 1$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$  και η ευθεία  $y = x - 1$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

**Μονάδες 5**

**B5.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .  
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό).

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \alpha x(\beta \ln x - 1) + 1$ ,  $x > 0$  η οποία έχει τοπικό ακρότατο για  $x = 1$  το 0.

**G1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x(\ln x - 1) + 1$ ,  $x > 0$ .

**Μονάδες 4**

**G2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

**G3. i.** Να εξετάσετε αν υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με παράλληλες εφαπτόμενες.

**Μονάδες 3**

- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $\Lambda(1, -1)$ .

Μονάδες 6

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση:  $f^{2026}(x) + x - 1 = \ln x$ .

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω μία συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) < (2-x)f''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η ευθεία  $\varepsilon: y = -3x + 7$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  και τέμνει την  $C_f$  στα σημεία με τετμημένες  $x_1 = 2$  και  $x_2 = 3$ .

Δ1. i. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης  $g(x) = (x-2)f'(x)$ .

Μονάδες 2

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Μονάδες 4

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + \eta\mu(e^x + x) + 2026x^2}{x^2f(x) + 3x^3 - 6x^2}$$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$ .

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$  με  $\xi_1 \neq \xi_2$ , ώστε να ισχύει:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = -1.$$

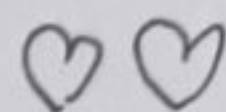
Μονάδες 7

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα.  
Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή.  
Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**



### Θέμα Β

(B1)  $K(x) = \frac{2x}{x+1}, x \neq -1, \Lambda(x) = e^x, x \in \mathbb{R}.$

Η  $g = K \circ \Lambda$  ορίζεται όταν

$$\begin{cases} x \in D_\Lambda \\ \Lambda(x) \in D_K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

με τύπο  $g(x) = (K \circ \Lambda)(x) = K(\Lambda(x)) = K(e^x) = \frac{2e^x}{e^x+1}.$

Άρα  $g(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}, x \in \mathbb{R}.$

(B2) Είναι  $f(x) = x+1 - g(x) = x+1 - \frac{2e^x}{e^x+1}, x \in \mathbb{R}.$

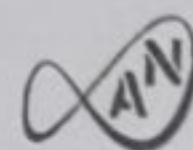
Τότε:  $f'(x) = \left(x+1 - \frac{2e^x}{e^x+1}\right)' = 1 - \frac{2e^x(e^x+1) - 2e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} =$

$$= 1 - \frac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x}}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} =$$

$$= \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x+1)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα  $f \uparrow \mathbb{R}$ , άρα 1-1 και αντιστρέψιμη.

Το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το σύνολο τιμών της  $f$ .



$$f(\mathbb{R}) = f(-\infty, +\infty) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right). \text{ Έχουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} = \frac{2 \cdot 0}{0 + 1} = 0$$

άρα  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1 - g(x)) = \underline{\underline{(-\infty) + 1 - 0}} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x + 1} \stackrel{u=e^x}{u \rightarrow +\infty} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2u}{u+1} = 2$$

άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - g(x)) = \underline{\underline{(+\infty) + 1 - 2}} = +\infty$

Συνεπώς:  $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ , άρα  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ .

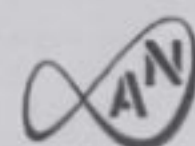
$$\textcircled{B3} f''(x) = \left( 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \right)' = - \frac{2e^x(e^x+1)^2 - 2e^x \cdot 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4} =$$

$$= \frac{-2e^x(e^x+1) + 4e^{2x}}{(e^x+1)^3} = \frac{-2e^{2x} - 2e^x + 4e^{2x}}{(e^x+1)^3} =$$

$$= \frac{2e^{2x} - 2e^x}{(e^x+1)^3} = \frac{2e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Άρα  $f \cap (-\infty, 0]$ ,  $f \cup [0, +\infty)$   
 και  $f(0) = 0$  άρα η  $f$  έχει  
 σημείο αφής το  $(0, 0)$ .



**B4**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1 - \frac{2e^x}{e^{x+1}} - x-1) =$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^{x+1}} = \frac{2 \cdot 0}{0+1} = 0$ , άρα

η ευθεία  $y=x+1$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

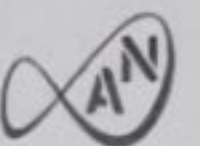
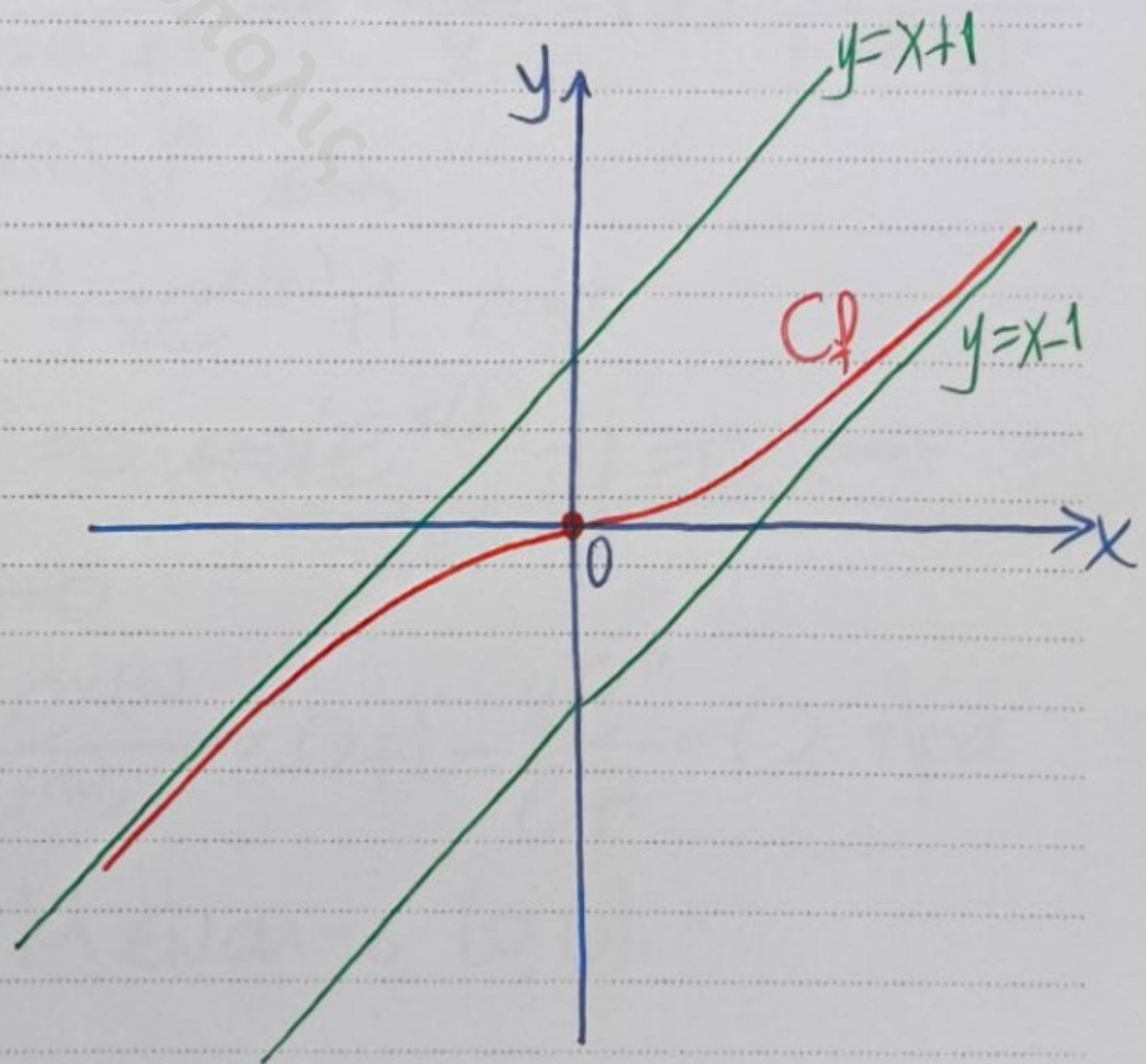
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - \frac{2e^x}{e^{x+1}} - x+1) =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \frac{2e^x}{e^{x+1}}) = 2 - 2 = 0$ , άρα

η ευθεία  $y=x-1$  είναι ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ .

**B5**

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$
$f$			



## Θέμα Γ

Γ1) Είναι  $f(1) = 0 \Rightarrow a \cdot (b \cdot \ln 1 - 1) + 1 = 0 \Rightarrow -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

και από θ. Fermat  $f'(1) = 0$ , βρούμε για  $a = 1$ :

$$f(x) = x(b \ln x - 1) + 1 \Rightarrow f'(x) = b \ln x - 1 + x \cdot \frac{b}{x} = b \ln x - 1 + b$$

άρα η  $f'(1) = 0 \Rightarrow b \cdot \ln 1 - 1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$ .

Συνεπώς  $f(x) = x \cdot (\ln x - 1) + 1, x > 0$ .

Γ2) Για  $x > 0$  είναι:  $f'(x) = [x(\ln x - 1) + 1]' = 1 \cdot (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f'(x) = \ln x - 1 + 1 \Rightarrow f'(x) = \ln x$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'(x)	///	-	0	+
f	///		min	

Άρα  $f \downarrow (0, 1]$ ,  $f \uparrow [1, +\infty)$  και η  $f$  έχει ολικό ελάχιστο για  $x = 1$  με  $f(1) = 0$ . Επικρίβου:

•  $f \downarrow (0, 1]$  άρα  $f(0, 1] = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [0, 1)$

αφού  $f(x) = x \ln x - x + 1$  και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{D'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - x + 1) = 0 - 0 + 1 = 1$$

•  $f \uparrow (1, +\infty)$  άρα  $f(1, +\infty) = (\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (0, +\infty)$



αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln x - 1) + 1] \stackrel{(+\infty)(+\infty)}{=} +\infty$ .

Συνεπώς, το σύνολο τιμών της  $f$  είναι:

$$f([0, +\infty)) = f([0, 1]) \cup f((1, +\infty)) = [0, 1) \cup (0, +\infty) = [0, +\infty).$$

**β3**: Αν  $K(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$  με  $x_1 \neq x_2$  δύο σημεία της  $C_f$  με παράλληλες εφαπτόμενες, τότε

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2).$$

Όμως  $f''(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$  για κάθε  $x > 0$ .

Άρα η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, άρα δεν υπάρχουν τέτοια σημεία.

**ii.** Έστω  $\varepsilon$  εφαπτομένη της  $C_f$  σε σημείο της  $M(x_0, y_0)$ .

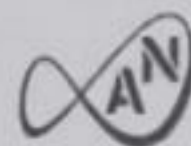
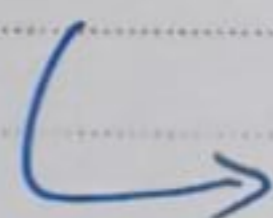
Τότε  $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y - x_0(\ln x_0 - 1) - 1 = \ln x_0 \cdot (x - x_0)$$

Αν η  $\varepsilon$  διέρχεται από το  $\Lambda(1, -1)$  τότε ισχύει:

$$-1 - x_0(\ln x_0 - 1) - 1 = \ln x_0 \cdot (1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$-1 - \cancel{x_0 \ln x_0} + x_0 - 1 = \ln x_0 - \cancel{x_0 \ln x_0} \Leftrightarrow \ln x_0 - x_0 + 2 = 0$$



Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = \ln x - x + 2, x > 0$ .

Είναι  $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ , άρα

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Άρα  $g \uparrow (0, 1], g \downarrow [1, +\infty)$  και έχει μέγιστο το  $g(1) = 1$ .

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	/ / / /		+ 0 -	
g	/ / / /			

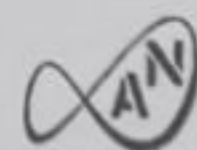
Επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 2) = -\infty$

και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{2}{x} \right) \right] =$   
 $\frac{(+\infty)(0-1+0)}{-\infty}$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{D'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

Τότε:

- $g(0, 1] \stackrel{g \uparrow}{=} (\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), g(1)] = (-\infty, 1]$
- $g(1, +\infty) \stackrel{g \downarrow}{=} (\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 1} g(x)) = (-\infty, 1)$ .

Το  $0 \in g(0, 1], 0 \in g(1, +\infty)$  άρα υπάρχουν από ένα αριθμός  $p \in (0, 1], p \in (1, +\infty), p$  τέτοις ώστε  $g(x) = 0$ . Άρα υπάρχουν αριθμούς δύο επαγόμενες της Cf, οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $\Lambda(1, -1)$ .



$$\textcircled{\Gamma 4} \quad f^{2026}(x) + x - 1 = \ln x \iff f^{2026}(x) = \ln x - x + 1.$$

• Η  $f$  έχει ελάχιστο το 0 για  $x=1$ , άρα

$f(x) \geq 0 \implies f^{2026}(x) \geq 0$  με το "=" να ισχύει μόνο για  $x=1$ .

• Για κάθε  $x > 0$  ισχύει  $\ln x \leq x - 1 \iff \ln x - x + 1 \leq 0$  με το "=" να ισχύει μόνο για  $x=1$ .

Τότε:  $f^{2026}(x) = \ln x - x + 1 \iff \begin{cases} f^{2026}(x) = 0 \\ \ln x - x + 1 = 0 \end{cases} \iff x=1.$

Άρα η  $f^{2026}(x) + x - 1 = \ln x$  έχει μοναδική ρίζα την  $x=1$ .



## Θέμα 1

Ⓜ i. Είναι  $g(x) = (x - \varepsilon)f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  άρα

$$g'(x) = [(x - \varepsilon)f'(x)]' = f'(x) + (x - \varepsilon)f''(x) < 0$$

από υπόθεση:

$$f'(x) < (\varepsilon - x)f''(x) \Leftrightarrow f'(x) - (\varepsilon - x)f''(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) + (x - \varepsilon)f''(x) < 0$$

Συνεπώς  $g \downarrow \mathbb{R}$ .

ii. Είναι  $g(\varepsilon) = 0$  και  $g \downarrow \mathbb{R}$ , άρα:

$$\bullet \text{ Για } x > \varepsilon \Leftrightarrow g(x) < g(\varepsilon) \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - \varepsilon)f'(x) < 0 \xrightarrow{x - \varepsilon > 0} f'(x) < 0, \text{ άρα } f \downarrow [\varepsilon, +\infty).$$

$$\bullet \text{ Για } x < \varepsilon \Leftrightarrow g(x) > g(\varepsilon) \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - \varepsilon)f'(x) > 0 \xrightarrow{x - \varepsilon < 0} f'(x) < 0, \text{ άρα } f \downarrow (-\infty, \varepsilon].$$

Επιπλέον  $f$ : συνεχής στο  $\varepsilon$ , άρα  $f \downarrow (-\infty, \varepsilon] \cup [\varepsilon, +\infty) = \mathbb{R}$ .

τελικά  $f \downarrow \mathbb{R}$ .

ⓂⓈ Από υπόθεση έχουμε:

•  $y = -3x + 7$  ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ , άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 3x) = 7.$$

$\hookrightarrow \infty$   $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$

•  $(2, f(2)) \in \varepsilon$  άρα  $f(2) = -3 \cdot 2 + 7 \Leftrightarrow f(2) = 1$

•  $(3, f(3)) \in \varepsilon$  άρα  $f(3) = -3 \cdot 3 + 7 \Leftrightarrow f(3) = -2$

Το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x f(x)}{x^2} + \frac{n \mu(e^x + x)}{x^2} + \frac{2026 x^2}{x^2}}{\frac{x^2 f(x)}{x^2} + \frac{3x^3}{x^2} - \frac{6x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} + \frac{n \mu(e^x + x)}{x^2} + 2026}{f(x) + 3x - 6} =$$

$$= \frac{-3 + 0 + 2026}{7 - 6} = 2023$$

αφού:  $\left| \frac{n \mu(e^x + x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{n \mu(e^x + x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

με  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , άρα από υπ. παρ. έχουμε.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n \mu(e^x + x)}{x^2} = 0$$

Συνεπώς, το ζητούμενο όριο είναι ίδιο με 2023.

**Δ3**  $f$ : συνεχής στο  $[2, 3]$  με  $f(2) \cdot f(3) = 1 \cdot (-2) = -2 < 0$

άρα από Θ. Bolzano υπάρχει  $x_0 \in (2, 3) \subseteq \mathbb{R}$ :  $f(x_0) = 0$ .

Επιπλέον  $f \downarrow \mathbb{R}$ , άρα το  $x_0$  είναι μοναδικό.



Δ4)  $f$ : παρλημ στο  $\mathbb{R}$  άρα συνεχής στα  $[2, x_0], [x_0, 3]$   
 και παρλημ στα  $(2, x_0), (x_0, 3)$  άρα από Θ.Μ.Τ.  
 υπάρχουν  $\xi_1 \in (2, x_0)$  και  $\xi_2 \in (x_0, 3)$  ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(2)}{x_0 - 2} = \frac{0 - 1}{x_0 - 2} = -\frac{1}{x_0 - 2} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(3) - f(x_0)}{3 - x_0} = \frac{-2 - 0}{3 - x_0} = \frac{-2}{3 - x_0}$$

Τότε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = -\frac{x_0 - 2}{1} - \cancel{2} \cdot \frac{3 - x_0}{\cancel{2}} = -x_0 + 2 - 3 + x_0 = -1.$$

( A4 :  
 α : Σ  
 β : Σ  
 γ : Λ  
 δ : Λ  
 ε : Σ )

