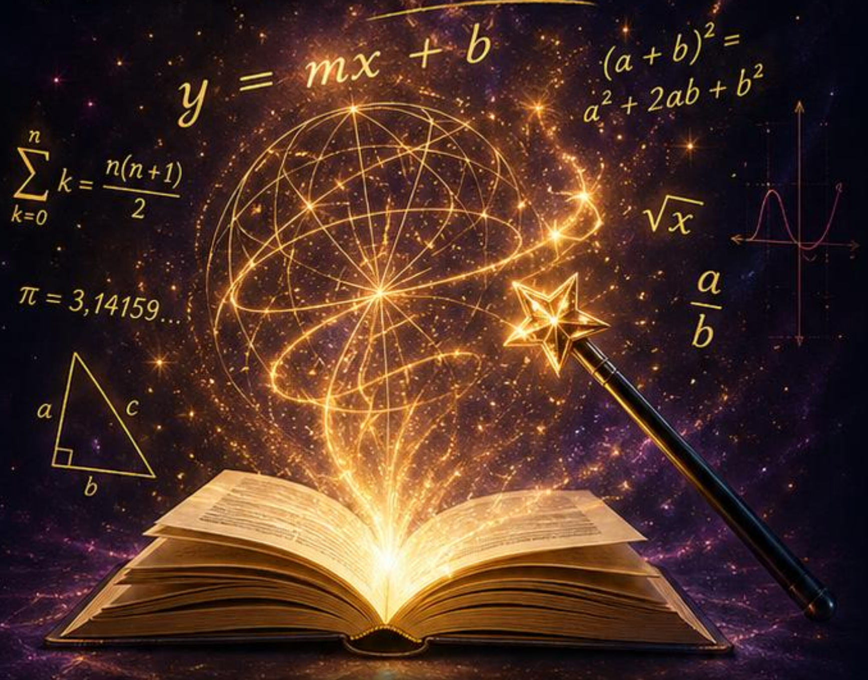
lisari team

μαζί... μοιραζόμαστε, δημιουργούμε, στηρίζουμε!



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2026

για το ΓΕΛ

Πάμε να το κάνουμε ξανά δυνατά!

lisari.blogspot.com

ο μαθηματικός ιστότοπος

ΤΑΞΗ

Γ΄ ΓΕΛ

ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ

Προσανατολισμός

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026

1η έκδοση

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Νίκος Αντωνόπουλος

Γιάννης Βελαώρας

Πάνος Γκριμπαβιώτης

Χρήστος Κουστέρης

Θωμάς Ποδηματάς

Χρήστος Σίσκας

Μάκης Χατζόπουλος

lisari.blogspot.com

ο μαθηματικός ιστότοπος

Οι εκφωνήσεις - απαντήσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς των μελών της **lisari team** και κυρίως όσων αναφέρονται στο εξώφυλλο.

1η έκδοση: 15 – 5 – 2026 *(συνεχής ανανέωση)*

Το αρχείο διατίθεται **αποκλειστικά**

από τον μαθηματικό ιστότοπο

lisari.blogspot.com

Πρόλογος

Αγαπητέ υποψήφιε,

Στο παρόν φυλλάδιο παρουσιάζονται οι εκφωνήσεις και οι αναλυτικές απαντήσεις του Διαγωνίσματος Προσομοίωσης στο μάθημα μαθηματικών **Γ΄ Λυκείου Προσανατολισμού**. Τα θέματα που επιλέχθηκαν είναι ενδεικτικά και καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα της εξεταστέας ύλης. Σκοπός τους είναι να σε βοηθήσουν να προετοιμαστείς όσο το δυνατόν καλύτερα για τις επερχόμενες εξετάσεις.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το διαγώνισμα αυτό δεν φιλοδοξεί να «μαντέψει» ή να προβλέψει τα ακριβή θέματα των εξετάσεων. Αντίθετα, φιλοδοξεί να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο αξιολόγησης, ελέγχοντας την ετοιμότητά σου, εντοπίζοντας τυχόν κενά και προσομοιώνοντας τις συνθήκες του «επίσημου αγώνα». Σου προτείνουμε να αντιμετωπίσεις αυτή τη δοκιμασία με τη σοβαρότητα των τελικών εξετάσεων, τηρώντας αυστηρά τον προβλεπόμενο χρόνο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team** και διακινείται από τον ιστότοπο **lisari.blogspot.com,** με γνώμονα την αγάπη για το αντικείμενο και την υποστήριξη της προσπάθειάς σου.

Ευχόμαστε καλή επιτυχία και **δύναμη** στην τελική ευθεία της προετοιμασίας σου!

Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και προτάσεις βελτίωσης επί των θεμάτων ή λύσεων είναι πάντα ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση: **lisari.blogspot@gmail.com**.

Με εκτίμηση

lisari team

Μάιος 2026

lisari team

1. Αντωνόπουλος Νίκος (2ο ΓΕΛ Ναυπλίου)

2. Αυγερινός Βασίλης (Φροντιστήριο "Διάταξη" - Ν. Σμύρνη)

3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "Βελαώρας" - Λιβαδειά Βοιωτίας)

4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)

5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή - Θεσσαλονίκη)

6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)

7. Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)

8. Ζαμπέλης Γιάννης (Ελληνογερμανική Αγωγή - Πουκαμισάς Άνω Γλυφάδα)

9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)

10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Κάκανος - Σέρρες)

11. Κανάβης Χρήστος (ΣΔΕ Αγίων Αναργύρων)

12. Κατζιώτη Χαρά (Δημόσια υπάλληλος - Πρέβεζα)

13. Κουλούρης Ανδρέας (Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Α΄ Αθήνας)

14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο «Στόχος» - Περιστέρι)

15. Κοπάδης Αθανάσιος (Φροντιστήριο 19+ στο Πολύγωνο και Ευρωπαϊκό Πρότυπο)

16. Κοσόγλου Ιορδάνης (ΓΕ.Λ Αριδαίας)

17. Λιγνός Ορέστης (φοιτητής στο ΕΚΠΑ – Τμήμα: Μαθηματικό)

18. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" και Φροντιστήριο 20' – Κοζάνη)

19. † Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)

20. Μπαδέμης Δημήτρης (Εκπαιδευτήρια Ν. Ζαγοριανάκου- Αθήνα)

21. Μπεληγιάννης Αθανάσιος (1ο Πρότυπο Γενικό Λύκειο Χαλκίδας)

22. Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)

23. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "εις τη ν" - Αγρίνιο)

24. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος" – Γλυφάδα και Ελληνογαλλική Σχολή Jeanne d'Arc)

25. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)

26. Πολύζος Γιώργος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)

27. Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)

28. Σίσκας Χρήστος (Αριστοτέλειο Κολλέγιο Θεσσαλονίκης)

29. Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – Συνταξιούχος - Χαλκίδα)

30. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστής – Ηράκλειο Κρήτης)

31. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)

32. Σταυρόπουλος Σταύρος (ΓΕΛ Ζευγολατιού)

33. Τάσος Νίκος (τ. Σύμβουλος Ι.Ε.Π. – Διευθυντής στο 2ο ΓΕΛ Πειραιά)

34. Τσακαλάκος Τάκης (Συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)

35. Τσιριόπουλος Μπάμπης (Συνταξιούχος , συγγραφέας)

36. Χαραλάμπους Σταύρος (Διευθυντής στο 3ο Γενικό Λύκειο Λαμίας)

37. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος - Ρόδος)

38. Χατζόπουλος Μάκης (Υποδιευθυντής στο Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής)

Επιμέλεια: lisari team

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2026

ΤΑΞΗ:	**Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ:	**ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**
ΜΑΘΗΜΑ:	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Παρασκευή 15 Μαΐου 2026

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$. **Μονάδες 7**

Α2. Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο διάστημα Δ; **Μονάδες 4**

Α3. Πότε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1; **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω η ένα προς ένα συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$.

β) Αν η f συνεχής στο x_0, τότε και η $|f|$ είναι συνεχής στο x_0, με την προϋπόθεση ότι ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

γ) Για f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο x_0, ισχύει $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ, τότε παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο Δ.

ε) Αν $f(x)g(x)=0$ για κάθε $x \in A$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in A$ ή $g(x)=0$ για κάθε $x \in A$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}$ και $g(x)=\frac{x-4}{x^2-3x+2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $f=g$. **Μονάδες 6**

Β2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **Μονάδες 6**

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)\cdot e^{-2026x} = -3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. **Μονάδες 7**

Β4. Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{0} g(x)dx$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+\alpha x+\beta, & 0\le x\le 1 \\ \ln x+(\alpha+2)x, & x>1 \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία

$$y=5x+2026.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$. **Μονάδες 5**

Γ2. Να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 6

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x-1)=5e^x-6,\ x\ge 0$. **Μονάδες 7**

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0\in(1,e)$ υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$ τέτοια, ώστε

$$(x_0-1)f'(\xi_1)+(e-x_0)f'(\xi_2)=4e-3.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $e^{f(0)}\le f(0)\cdot e$
- $x^4(x^2+2)f^2(x)=x^2(1-f^2(x))$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- F αρχική της f στο $(0,+\infty)$, με $F(1)=1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι i. $f(0)=1$ (μονάδες 3) ii. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1},x\in\mathbb{R}$. (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g όπου $g(x)=x^4-x^2+1$, στο κοινό τους σημείο. **Μονάδες 5**

Δ3. α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, αν $\displaystyle\int_{2026}^{\lambda^2+1}f(x)\,dx=\int_{\lambda^2+1}^{2026}\frac{x^2}{x^2+1}\,dx$. **Μονάδες 4**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $G(x)=F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right)$, είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 3

Δ4. Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{1}{\alpha},x=\alpha$, $\alpha>1$. Να βρείτε την ευθεία $x=\kappa$, που χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Μονάδες 7

lisari team / Σχολικό έτος 2025 – 26

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$G(x)=F(x)+c\ \ (1).$$

Από την (1) για $x=\alpha$ έχουμε:

$$G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)\,dt+c=c$$

οπότε έχουμε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$, οπότε για $x=\beta$ έχουμε:

$$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt+G(\alpha)$$

και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Α2. Λέμε ότι μια συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο διάστημα Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α3. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1\neq x_2,\ \text{τότε } f(x_1)\neq f(x_2)$$

Α4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει: $x-1\neq 0$ και $x-2\neq 0$ δηλαδή $x\neq 1$ και $x\neq 2$. Επομένως,

$$A_f=\mathbb{R}-\{1,2\}\ \text{ ή }\ A_f=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty).$$

Πρέπει: $x^2-3x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\neq 2$. Επομένως,

$$A_g=\mathbb{R}-\{1,2\}\ \text{ ή }\ A_g=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty).$$

Άρα $A_f=A_g=A$. Για κάθε $x\in A$ έχουμε:

$$f(x)=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}=\frac{3(x-2)-2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{3x-6-2x+2}{x^2-2x-x+2}=\frac{x-4}{x^2-3x+2}=g(x).$$

Άρα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$. Επομένως, $f=g$.

B2. Η f συνεχής στο A, επομένως θα αναζητήσουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες στα σημεία $x=1$ και $x=2$. Είναι:

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}\right)=-\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$ και $x-1<0$ όταν $x<1$ άρα $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3}{x-1}=-\infty$ ενώ $\lim\limits_{x\to1^-}\left(-\frac{2}{x-2}\right)=2$.

Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης,

- $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}\right)=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)=0$ και $x-2<0$ όταν $x<2$ άρα $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{-2}{x-2}=+\infty$ ενώ $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\frac{3}{x-1}\right)=3$.

Άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.
Τέλος,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Άρα η ευθεία $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και $-\infty$ (με ανάλογο τρόπο).

B3. Η εξίσωση $f(x)\cdot e^{-2026x}=-3$ ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x)=-3e^{2026x}\Leftrightarrow\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}=-3e^{2026x}\Leftrightarrow\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}+3e^{2026x}=0$$
$$\Leftrightarrow 3(x-2)-2(x-1)+3e^{2026x}(x-1)(x-2)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=3(x-2)-2(x-1)+3e^{2026x}(x-1)(x-2),x\in\mathbb{R}.$$

- h συνεχής στο κλειστό $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $h(0)=2$ και $h(1)=-3$,δηλαδή $h(0)\cdot h(1)<0$,

άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0\overset{x\neq1,2}{\Leftrightarrow}f(x)\cdot e^{-2026x}=-3$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

B4. Έχουμε,

$$\int_{-1}^{0}g(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx=\int_{-1}^{0}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-2}\right)dx=3\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}-2\left[\ln|x-2|\right]_{-1}^{0}=-5\ln2+2\ln3$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=5x+2026$ άρα $f'(1)=5$ καθώς και η f είναι συνεχής στο $x_0=1$. Επομένως,

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1) \ (1).$$

- $\lim_{x\to1^-} f(x)=1+\alpha+\beta=f(1)$
- $\lim_{x\to1^+} f(x)=\alpha+2$

Από την (1) έχουμε: $1+\alpha+\beta=\alpha+2 \Leftrightarrow \beta=1$. Επιπλέον,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3+\alpha x+1-\alpha-1-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3+\alpha x-1-\alpha}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DHL}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{3x^2+\alpha}{1}=3+\alpha.$$

Είναι, $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)\Leftrightarrow 3+\alpha=5\Leftrightarrow \alpha=2.$

Γ2. Είναι $f(x)=\begin{cases} x^3+2x+1, & 0\le x\le 1 \\ \ln x+4x, & x>1 \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1)$ ως πολυωνυμική καθώς και στο διάστημα $(1,+\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον η f είναι συνεχής στο 1 άρα είναι συνεχής στο $D_f=[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)=3x^2+2>0$. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι

$$f'(x)=\frac{1}{x}+4>0.$$

Επιπλέον, $f'(1)=5>0$.

Αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_1=0$ με τιμή $f(0)=1$.

- Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)=6x>0$.
- Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$.

Ο πίνακας μεταβολών της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−
f	∪		∩

Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,1]$, κοίλη στο διάστημα $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο $A(1,4)$

Γ3. Στην εξίσωση $f\left(e^x-1\right)=5e^x-6$ (2) για $x\geq 0$ θέτουμε $\theta=e^x-1\Leftrightarrow e^x=\theta+1$.
Αφού $x\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow e^x-1\geq 0\Leftrightarrow \theta\geq 0$. Η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$f(\theta)=5(\theta+1)-6\Leftrightarrow f(\theta)=5\theta-1 \text{ (3).}$$

Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,4)$.

$$\varepsilon_A: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-4=5x-5\Leftrightarrow y=5x-1.$$

- Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,1]$ άρα η C_f είναι πάνω από την ε_A με εξαίρεση το A.
  Οπότε $f(x)\geq 5x-1$ για κάθε $x\in[0,1]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.
- Η f είναι κοίλη στο διάστημα $[1,+\infty)$ άρα η C_f είναι κάτω από την ε_A με εξαίρεση το A.
  Οπότε $f(x)\leq 5x-1$ για κάθε $x\in[0,1]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Τελικά, $f(x)=5x-1\Leftrightarrow x=1$ οπότε η μοναδική λύση της εξίσωσης (3) είναι η

$$\theta=1\Leftrightarrow e^x-1=1\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2.$$

Γ4.
- Η f είναι συνεχής σε καθένα εκ των διαστημάτων $[1,x_0]$ και $[x_0,e]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα εκ των διαστημάτων $(1,x_0)$ και (x_0,e).

Άρα, για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε καθένα εκ των διαστημάτων $[1,x_0]$ και $[x_0,e]$.
Οπότε υπάρχει $\xi_1\in(1,x_0)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}\Leftrightarrow (x_0-1)f'(\xi_1)=f(x_0)-f(1) \text{ (4)}$$

και υπάρχει $\xi_2\in(x_0,e)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(e)-f(x_0)}{e-x_0}\Leftrightarrow (e-x_0)f'(\xi_2)=f(e)-f(x_0) \text{ (5).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε:

$$(x_0-1)f'(\xi_1)+(e-x_0)f'(\xi_2)=f(e)-f(1)=4e-3.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x\geq x+1$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$. Βάζοντας όπου x το $f(0)-1$ ισχύει:

$$e^{f(0)-1}\geq f(0)-1+1\Leftrightarrow \frac{e^{f(0)}}{e}\geq f(0)\Leftrightarrow e^{f(0)}\geq ef(0),$$

άρα η ισότητα ισχύει μόνο όταν $f(0)-1=0\Leftrightarrow f(0)=1$.

ii. Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$x^4\left(x^2+2\right)f^2(x)=x^2\left(1-f^2(x)\right)\Leftrightarrow x^2\left(x^2+2\right)f^2(x)=1-f^2(x)$$
$$\Leftrightarrow\left(x^4+2x^2+1\right)f^2(x)=1$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2f^2(x)=1$$
$$\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow\left|f(x)\right|=\frac{1}{x^2+1}$$

Είναι,

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left|f(x)\right|=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+1}=0,\ \text{άτοπο.}$$

Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και f συνεχής, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1>0$, τότε $f(x)>0$, κοντά στο 0.

Άρα $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$. Επομένως,

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty),\ \text{και}\ f(0)=1$$

δηλαδή $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Τα κοινά σημεία των C_f και C_h έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης

$$f(x)=h(x)\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+1}=x^4-x^2+1\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)=1\Leftrightarrow x^6+1=1\Leftrightarrow x=0$$

Οι C_f και C_h, έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $(0,1)$. Είναι $f'(0)=h'(0)$ άρα οι C_f και C_h, έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη με εξίσωση $y=1$.

Δ3. α) Είναι,

$$\int_{2026}^{\lambda^2+1}f(x)dx=\int_{\lambda^2+1}^{2026}\frac{x^2}{x^2+1}dx\Leftrightarrow\int_{2026}^{\lambda^2+1}f(x)dx-\int_{\lambda^2+1}^{2026}\frac{x^2}{x^2+1}dx=0$$
$$\Leftrightarrow\int_{2026}^{\lambda^2+1}\frac{1}{x^2+1}dx+\int_{2026}^{\lambda^2+1}\frac{x^2}{x^2+1}dx=0$$
$$\Leftrightarrow\int_{2026}^{\lambda^2+1}\frac{x^2+1}{x^2+1}dx=0$$
$$\Leftrightarrow\int_{2026}^{\lambda^2+1}1dx=0$$
$$\Leftrightarrow\lambda^2+1-2026=0$$
$$\Leftrightarrow\lambda^2=2025\Leftrightarrow\lambda=45\ \text{ή}\ \lambda=-45.$$

β) Είναι,

$$G'(x)=f(x)-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}=0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Άρα η G είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$, αφού G συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $G'(x)=0$, στο $(0,+\infty)$. Και επειδή $G(1)=F(1)+F(1)=2$, ισχύει

$$G(x)=2, \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Δ4. Ισχύει $\alpha>1\Rightarrow\frac{1}{\alpha}<1$ και $f(x)>0$, στο $\mathbb{R}$. Η ευθεία $x=\kappa$ χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία αν και μόνο αν:

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\kappa}f(x)dx=\int_{\kappa}^{\alpha}f(x)dx\Leftrightarrow\left[F(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{\kappa}=\left[F(x)\right]_{\kappa}^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow F(\kappa)-F\left(\frac{1}{\alpha}\right)=F(\alpha)-F(\kappa)$$

$$\Leftrightarrow 2F(\kappa)=F(\alpha)+F\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2F(\kappa)=g(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2F(\kappa)=2$$

$$\Leftrightarrow F(\kappa)=F(1)\Leftrightarrow\kappa=1$$

διότι $F'(x)=f(x)>0$, άρα $F\nearrow(0,+\infty)$, οπότε η F είναι «1 – 1».