ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ
ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΗΣ
ΗΜΕΡΙΔΑΣ

Γλώσσα και Μαθηματικά

Ζητήματα κατανόησης κειμένου

Άννα Αναστασιάδη-Συμεωνίδη
Ελευθερία Ζάγκα
Γιάννης Θωμαΐδης
Κατερίνα Καλφοπούλου
Νίκος Καστάνης
Ανδρέας Λύκος
Σωτήρης Μαρκάδας
Τεύκρος Μιχαηλίδης
Μαρία Μητσιάκη
Κυριακίτσα Παιδαράκη
Ιωάννης Παπαδόπουλος
Νίκος Τερψιάδης
Κοσμάς Τουλούμης
Πολυξένη Τσίτσα
Ασημάκης Φλιάτουρας

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Γλώσσα και Μαθηματικά

Γλώσσα και Μαθηματικά
Ζητήματα Κατανόησης Κειμένου

ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ-ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΗΣ ΗΜΕΡΙΔΑΣ
Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, 8 Νοεμβρίου 2025

Άννα Αναστασιάδη-Συμεωνίδη
Ελευθερία Ζάγκα
Γιάννης Θωμαΐδης
Κατερίνα Καλφοπούλου
Νίκος Καστάνης
Ανδρέας Λύκος
Σωτήρης Μαρκάδας
Τεύκρος Μιχαηλίδης
Μαρία Μητσιάκη
Κυριακίτσα Παιδαράκη
Ιωάννης Παπαδόπουλος
Νικόλαος Τερψιάδης
Κοσμάς Τουλούμης
Πολυξένη Τσίτσα
Ασημάκης Φλιάτουρας

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

Θεσσαλονίκη 2026

Επιμέλεια έκδοσης: Νικόλαος Τερψιάδης, Ανδρέας Γαλανός, Βασιλική Καλέα, Νικόλαος Μανάρας, Ροδή Λύκου

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
Πρ. Στρατόπεδο Στρεμπενιώτη
56701, Νεάπολη, Θεσσαλονίκη
Τ 2310 587149
E mail@lyk-peir-uom.thess.sch.gr
W http://ppl.pplpamak.eu/ppl/

ISBN: 978-618-87464-1-1

Τα άρθρα των συγγραφέων που περιέχονται σε αυτό τον τόμο, ανακοινώθηκαν στην ομώνυμη Ημερίδα "Γλώσσα και Μαθηματικά, Ζητήματα Κατανόησης Κειμένου" (https://sites.google.com/view/langmath2) που συνδιοργανώθηκε από το **Πειραματικό Λύκειο του Πανεπιστημίου Μακεδονίας**, τις **Διευθύνσεις Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Δυτικής Θεσσαλονίκης**, την **Περιφερειακή Διεύθυνση Εκπαίδευσης Κεντρικής Μακεδονίας** και την **Ομάδα Θαλής+Φίλοι** και πραγματοποιήθηκε με την υποστήριξη του **Πανεπιστημίου Μακεδονίας** και της **Διοικούσας Επιτροπής Πρότυπων και Πειραματικών Σχολείων**, στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας το Σάββατο 8, Νοεμβρίου 2025.

ΟΡΓΑΝΩΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Νικόλαος Σαμαράς, *Καθηγητής Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Αλέξανδρος Κόπτσης, *Περιφερειακός Διευθυντής Εκπαίδευσης Κεντρικής Μακεδονίας*
Χρήστος Ρουμπίδης, *Διευθυντής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Δυτικής Θεσσαλονίκης*
Ευαγγελία Μπούτσκου, *Διευθύντρια Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Δυτικής Θεσσαλονίκης*
Νικόλαος Σταμπολίδης, *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Φυσικών Επιστημών Δυτικής Θεσσαλονίκης, Μέλος του ΕΠ.Ε.Σ του Πειραματικού Λυκείου του Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Χριστίνα Αραμπατζή, *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Φιλολόγων Δυτικής Θεσσαλονίκης*
Πετρούλα Τσαμπούκα, *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Δυτικής Θεσσαλονίκης*
Παντελής Βενάρδος, *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Δυτικής Θεσσαλονίκης*
Τεύκρος Μιχαηλίδης, *Μαθηματικός-Συγγραφέας, Ομάδα «Θαλής + Φίλοι»*
Ιωάννης Θωμαΐδης, *τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*
Ελένη Χειμαριού, *Σύμβουλος Εκπαίδευσης Φιλολόγων Ν. Σερρών*
Ελένη Μούζουρα, *Φιλόλογος-Ψυχολόγος, Διευθύντρια Πειραματικού Λυκείου Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Κατερίνα Καλφοπούλου, *Μαθηματικός-Συγγραφέας, Εσπερινό ΓΕΛ Αμπελοκήπων, Ομάδα «Θαλής + Φίλοι»*
Ανδρέας Λύκος, *Μαθηματικός-Συγγραφέας, 3ο Πειραματικό ΓΕΛ Κομοτηνής, Ομάδα «Θαλής + Φίλοι»*
Παύλος Μαραντίδης, *Μαθηματικός, Λύκειο Κάτω Ποροΐων*
Ανδρέας Γαλανός, *Φιλόλογος, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Βασιλική Καλέα, *Φιλόλογος, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Χριστίνα Αλεξάνδρου, *Φιλόλογος, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Δημήτριος Σταυρούσης, Φιλόλογος, *Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Κατερίνα Λεούδη, Φιλόλογος, *Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Ευάγγελος Δάκας, Θεολόγος, *Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Κωνσταντίνος Κανάκης, Φυσικός, *Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Νικόλαος Δίντσιος, Φυσικός, *Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Αναστάσιος Βαφειάδης, *Χημικός, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Πασχάλης Ακριτίδης, *Βιολόγος, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Κυριακή Βασιλού, *Αγγλικής Φιλολογίας, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Γεώργιος Κατσάνης, *Φυσικής Αγωγής, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Άννα Ματσιώρη, *Οικονομικών, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Γεώργιος Αραμπατζής, Πληροφορικής, *Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Ροδή Λύκου, Μαθηματικός, *Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Νικόλαος Μανάρας, *Μαθηματικός, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*
Νικόλαος Τερψιάδης, *Μαθηματικός, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Βασιλική Γιαννούλη, *Επίκουρη Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Μακεδονίας, Τμήμα Εκπαιδευτικής & Κοινωνικής Πολιτικής*

Ιωάννης Θωμαΐδης, *Δρ. Μαθηματικών, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*

Τεύκρος Μιχαηλίδης, *Δρ. Μαθηματικών, Συγγραφέας, Ομάδα «Θαλής + Φίλοι»*

Ελένη Χειμαριού, *Δρ. Παιδαγωγικής, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Φιλολόγων Ν. Σερρών*

Ανδρέας Γαλανός, *Φιλόλογος, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας*

Ευχαριστίες

- στις Διευθύνσεις Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Δυτικής Θεσσαλονίκης και ιδιαίτερα στον Διευθυντή Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Δυτικής Θεσσαλονίκης Χρήστο Ρουμπίδη και στην Διευθύντρια Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Δυτικής Θεσσαλονίκης Ευαγγελία Μπούτσκου, στην Περιφερειακή Διεύθυνση Εκπαίδευσης Κεντρικής Μακεδονίας και ιδιαίτερα στον Περιφερειακό Διευθυντή Εκπαίδευσης Κεντρικής Μακεδονίας Αλέξανδρο Κόπτση και στην Ομάδα Θαλής+Φίλοι και ιδιαίτερα στον Μαθηματικό και Συγγραφέα Τεύκρο Μιχαηλίδη για την συνδιοργάνωση της Ημερίδας.
- στην Διοικούσα Επιτροπή Πρότυπων και Πειραματικών Σχολείων για την υποστήριξη.
- στον τ. Σύμβουλο Μαθηματικών Ιωάννη Θωμαΐδη, για την ουσιαστική βοήθεια και υποστήριξη.
- στους συναδέλφους του Σχολείου μας και στην Διευθύντρια Ελένη Μούζουρα για την σημαντική βοήθεια και υποστήριξη.
- στο Πανεπιστήμιο Μακεδονίας για την φιλοξενία της Ημερίδας και ιδιαίτερα στον Καθηγητή Νικόλαο Σαμαρά, για την άμεση ανταπόκριση και την αμέριστη βοήθεια και υποστήριξη.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η θεματική Γλώσσα και Μαθηματικά αποτελεί ένα πεδίο που απασχολεί διαχρονικά τόσο την εκπαιδευτική έρευνα όσο και την εκπαιδευτική πρακτική. Στην σημερινή εκπαιδευτική συγκυρία το θέμα της διαθεματικής διασύνδεσης των πεδίων των Μαθηματικών και της Γλώσσας καθίσταται ιδιαίτερα επίκαιρο. Ιδέες που προωθούνται από την φιλοσοφία των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών, όπως η διασύνδεση των γνωστικών αντικειμένων με τον πραγματικό κόσμο, η πολιτισμική διάσταση της γνώσης, η υποστήριξη σύγχρονων εκπαιδευτικών μεθόδων και πρακτικών και η ανάπτυξη κοινοτήτων μάθησης, καθώς και προβλήματα που εντοπίζονται στην εκπαιδευτική πρακτική και συνδέονται με αδυναμίες και ελλείψεις στην γλώσσα, συνηγορούν στην ανάγκη διερεύνησης των σχετικών διασυνδέσεων και αλληλεπιδράσεων των γνωστικών πεδίων της Γλώσσας και των Μαθηματικών.

Μετά την επιτυχημένη διεξαγωγή της πρώτης Ημερίδας “Γλώσσα και Μαθηματικά, Διασυνδέσεις και Αλληλεπιδράσεις”, τον Νοέμβριο του 2024 και την ευρεία αποδοχή που είχε η έκδοση των Πρακτικών, προχωρήσαμε στην διοργάνωση της δεύτερης Ημερίδας “Γλώσσα και Μαθηματικά, Ζητήματα κατανόησης κειμένου” ανοίγοντας την θεματολογία της Ημερίδας και στον χώρο της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης και προχωρούμε τώρα στην έκδοση των Πρακτικών της δεύτερης Ημερίδας. Η πρόθεσή μας είναι να συνεχιστεί και να διευρυνθεί η συζήτηση που ξεκίνησε με την υλοποίηση της πρώτης Ημερίδας ώστε να εμπλουτιστεί το θεωρητικό πλαίσιο, να προταθούν καλές εκπαιδευτικές πρακτικές και διδακτικές προτάσεις καθώς και ιδέες για εκπαιδευτικές προσεγγίσεις και εκπαιδευτική έρευνα που θα διασυνδέουν την Γλώσσα με τα Μαθηματικά και θα αποτελέσουν χρήσιμο υλικό για τους εκπαιδευτικούς της Πρωτοβάθμιας και της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.

Σκοπός μας παραμένει να αναπτυχθεί η συζήτηση στην ακαδημαϊκή και εκπαιδευτική κοινότητα για τις αλληλεπιδράσεις των γνωστικών πεδίων της Γλώσσας και των Μαθηματικών, να αναδειχθούν προβλήματα και ιδέες και να δημιουργηθεί μία κοινότητα διαλόγου και μάθησης που θα συμβάλει στην διεύρυνση της έρευνας στο πεδίο, στην ανάπτυξη και διάχυση καλών εκπαιδευτικών πρακτικών και στην επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Από τα μαθηματικά προς τις άλλες επιστήμες: το διαχρονικό ταξίδι των μαθηματικών όρων στην ελληνική γλώσσα

Ασημάκης Φλιάτουρας[1], Άννα Αναστασιάδη-Συμεωνίδη[2]

[1] Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Ελληνικής Φιλολογίας, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
afliatouras@yahoo.com
[2] Ομότιμη Καθηγήτρια, Τμήμα Φιλολογίας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
ansym@lit.auth.gr

Περίληψη

Οι μαθηματικοί όροι είναι συχνά διεπιστημονικοί. Παράλληλα, είναι σύνηθες το φαινόμενο του *διατομεακού* ή *εσωτερικού ορολογικού δανεισμού* επιστημονικών όρων από τη μαθηματική επιστήμη προς άλλες θετικές αλλά και ανθρωπιστικές επιστήμες, λ.χ. αστρονομία, φυσική, φιλολογία/γλωσσολογία, βοτανολογία, ιατρική, συχνά μέσω γνωσιακών/σημασιολογικών μηχανισμών, με βάση τις επιστημολογικές ανάγκες της (κατα)μέτρησης, της ταξινόμησης κτλ. Αυτό αποδεικνύεται με έρευνα στα διαχρονικά σώματα σε λέξεις, όπως *όγκος* και *πλευρά* στην ιατρική/ανατομία, *αναλογία* στη φιλοσοφία/γλωσσολογία και τη βοτανολογία κτλ. Ο δανεισμός αυτός συμβαίνει συχνά στη διαχρονία της ελληνικής γλώσσας και όχι ως σημασιολογικός δανεισμός από ξένη γλώσσα, όπως συνήθως παρουσιάζεται στις ετυμολογίες των λεξικών.

1. Σκοπός της εργασίας

Η ενασχόληση με την ΑΕ μαθηματική ορολογία είναι διαχρονική (βλ. μεταξύ άλλων Bulmer-Thomas, 1960˙ Seidenberg, 1984). Παράλληλα, είναι συχνό το φαινόμενο του *διατομεακού* ή *εσωτερικού ορολογικού δανεισμού*, δηλαδή η μεταφορά ειδικών όρων από τη μια επιστήμη στην άλλη (βλ. σχετικά Ευθυμίου & Κατσογιάννου, 2004 ˙ και ειδικά για την ΑΕ Schironi, 2010), συχνά μέσω γνωσιακών μηχανισμών, όπως της μεταφοράς (βλ. μεταξύ άλλων English, 1998˙ Finatto, 2010 και τις εκεί αναφορές˙ και ειδικά για την ελληνική Αναστασιάδη-Συμεωνίδη, 2017), λ.χ. *γέφυρα* (αρχιτεκτονική) → *γέφυρα* (γυμναστική, οδοντιατρική). Στην παρούσα εργασία –και με την ευκαιρία του αφιερώματος του συνεδρίου στην Υπατία– θα ερευνήσουμε σε μια πρώτη προσέγγιση τις διαχρονικές (σε διάφορες φάσεις της ελληνικής γλώσσας) μετακινήσεις επιστημονικών όρων από τη μαθηματική επιστήμη είτε προς περισσότερο συναφείς επιστήμες, λ.χ. αστρονομία, φυσική κτλ., είτε προς λιγότερο παρεμφερείς επιστήμες, όπως τη φιλολογία/γλωσσολογία, τη βοτανολογία και την ιατρική. Συγκεκριμένα, αφού παρουσιάσουμε το σχετικό υλικό από το *ΛΚΝ*, ταξινομημένο ανά εννοιολογική ομάδα και ανά λήπτρια επιστήμη, στη συνέχεια θα εστιάσουμε σε συγκεκριμένες μελέτες περίπτωσης με ιδιαίτερο ενδιαφέρον με βάση χωρία από τη διαχρονική γραμματεία που παρέχει το TLG (Αριστοτέλης, Γαληνός κτλ.), λ.χ. *όγκος* στην ιατρική. Η έρευνά μας θα φωτίσει τον ρόλο και τη διεπιστημονική επίδραση των μαθηματικών στον αρχαίο επιστημονικό κόσμο αλλά και θα αναθεωρήσει σε μεγάλο βαθμό ετυμολογίες που θεωρούν ότι η μεταπήδηση όρων από τη μαθηματική επιστήμη προς άλλες είναι αποτέλεσμα σημασιολογικού δανεισμού από ξένες γλώσσες.

2. Διεπιστημονικοί μαθηματικοί όροι

Με βάση το υλικό του *ΛΚΝ* τουλάχιστον 75 όροι των μαθηματικών εντοπίζονται και σε άλλες επιστήμες, παρέχοντας ενδείξεις για εσωτερικό δανεισμό ή για παράλληλο δανεισμό από το γενικό λεξιλόγιο προς διάφορα ειδικά λεξιλόγια, συμπεριλαμβανομένου αυτού των μαθηματικών (βλ. και Schironi, 2010˙ Netz, 2012˙ Sattler 2020): *αίτημα* (φιλοσοφία), *ανάγνωση* (χημεία), *αναλογία* (βιολογία, νομική, γλωσσολογία, φιλοσοφία), *ανάλυση* (φιλοσοφία, πληροφορική), *ανιών* (μουσική, νομική), *αόριστος* (γραμματική), *αριθμός* (χημεία, γραμματική), *άρτιος* (οικονομία ως ουδέτερο ουσιαστικό), *ασύμμετρος* (αθλητισμός, γεωλογία, ηλεκτρολογία, βοτανολογία), *άτοπο* (λογική), *άτρακτος* (μηχανολογία, αστρονομία), *βαθμός* (γραμματική), *βάση* (κοινωνιολογία, πολιτική, στρατιωτική, χημεία), *διαίρεση* (βιολογία, μετρική), *διαιρετός* (νομική, αστρονομία, ιατρική, χημεία, νομική, φυσική), *διαφορά* (λογική, φυσική), *δύναμη* (οικονομία, φυσική, εκκλησιαστική), *έβδομος* (μουσική), *εγγραφή* (λογιστική), *έδρα* (επιστημολογία, ιατρική), *έκτος* (μουσική), *έλικα* (γεωμετρία, ανατομία, αρχιτεκτονική, βιολογία), *εξαρτώ* (γραμματική, ψυχολογία), *εξωτερικός* (γραμματική), *επίπεδο* (ανατομία, βιολογία, φυσική, στατιστική, γλωσσολογία), *επίπεδος* (φυσική), *εστία* (τεχνολογία, φυσική, γεωλογία), *εσωτερικός* (φιλολογία, γραμματική, μηχανική, ανατομία/ιατρική), *εταιρεία* (νομική, οικονομία), *ευθύγραμμος* (φυσική), *εύρος* (αστρονομία), *θετικός* (γραμματική, νομική, φυσική, φωτογραφία, οικονομία), *κατιών* (φυσική, νομική), *κλειστός* (οικονομία), *κοινός* (γραμματική, γλωσσολογία), *κύκλος* (γεωλογία), *μέγεθος* (αστρονομία), *μέσος* (γραμματική), *μέτρο* (μετρική, μουσική), *μήκος* (φυσική), *μηνίσκος* (ανατομία), *μοίρα* (στρατιωτική), *μονάδα* (ιατρική, στρατιωτική), *όγκος* (φυσική), *ομόλογος* (βιολογία), *ομώνυμος* (γραμματική, φυσική), *όριο* (μηχανική), *όρος* (γραμματική), *παράμετρος* (στατιστική), *περιφέρεια* (ανατομία), *πλευρά* (ανατομία), *πόδας* (μετρική), *πόλος* (φυσική, ηλεκτρολογία), *πρόταση* (γραμματική), *πυραμίδα* (αρχαιολογία), *ρίζα* (χημεία, ανατομία, βοτανολογία), *ρόμβος* (γεωμετρία, ναυτική), *σειρά* (ηλεκτρολογία), *σημείο* (γλωσσολογία), *στερεός* (φυσική, γεωμετρία), *στεφάνη* (αστρονομία, γεωμετρία, βοτανολογία, ανατομία), *συμμετρία* (γεωμετρία, βιολογία), *συνισταμένη* (χημεία), *σύνολο* (γραμματική), *συντελεστής* (φυσική/τεχνολογία), *σχέση* (φυσική), *σχήμα* (γραμματική), *τιμή* (οικονομία), *τομή* (ιατρική, μετρική, γεωμετρία), *τόξο* (γεωμετρία, αρχιτεκτονική, ανατομία, φυσική, μετεωρολογία, μουσική), *τρίγωνο* (αστρονομία), *υπόθεση* (φυσική, γραμματική), *υπόλοιπο* (λογιστική), *ύψος* (μουσική), *χορδή* (γεωμετρία, ανατομία), *χώρος* (γεωμετρία, φυσική).

Οι παραπάνω μαθηματικοί όροι αφορούν κυρίως μονάδες μέτρησης, λ.χ. *έκτος*, (χωροταξικές) διαστάσεις, λ.χ. *ύψος*, πράξεις, λ.χ. *διαίρεση*, σχήματα, λ.χ. *τρίγωνο*, σχέσεις/συσχετίσεις, λ.χ. *αναλογία*, έννοιες μέτρησης/τοποθέτησης, λ.χ. *μέσος* κτλ. Το ενδιαφέρον είναι ότι οι όροι αυτοί δεν εντοπίζονται μόνο στις παρεμφερείς και προβλεπτές αριθμοκεντρικές και χωροκεντρικές επιστήμες, λ.χ. φυσική, αστρονομία, οικονομία κτλ., αλλά και σε πολλές μη αναμενόμενες ανθρωπιστικές επιστήμες, λ.χ.

γλωσσολογία, ή ακόμη και στην ιατρική, βιολογία κτλ. Κοινή συνισταμένη των διατομεακών αυτών όρων που εξηγεί τη διεπιστημονική λειτουργία τους είναι οι έννοιες του μεγέθους, του σχήματος, της συνύπαρξης, της ταξινόμησης, της διαιρετότητας/εσωτερικής δομής, της καταμέτρησης κτλ., οι οποίες πρωτογενώς είναι μαθηματικές αλλά δευτερογενώς και ενίοτε μεταφορικώς αφορούν πλήθος ετερόκλητων επιστημών. Συγκεκριμένα, με βάση το υλικό που παραθέσαμε παραπάνω οι μαθηματικοί όροι χρησιμοποιούνται παράλληλα σε τουλάχιστον 36 επιστήμες σχεδόν όλων των κατηγοριών, όπως θετικές, (βιο)ιατρικές, ανθρωπιστικές, οικονομικές και κοινωνικές, οι οποίες κατά φθίνουσα κλίμακα διεπιστημονικής συνύπαρξης ανά ευρύτερο τομέα του επιστητού είναι οι εξής: (α) Θετικές/Φυσικές επιστήμες: Χημεία, Πληροφορική, Γεωλογία, Ηλεκτρολογία, Μηχανολογία, Αστρονομία, Φυσική, Λογιστική, Γεωμετρία, Αρχιτεκτονική, Τεχνολογία, Μετεωρολογία, Στατιστική, Μηχανική, (β) (Βιο)ιατρικές επιστήμες: Βιολογία, Βοτανολογία, Ιατρική/Ανατομία, (γ) Ανθρωπιστικές/Κοινωνικές επιστήμες: Φιλοσοφία, Νομική, Γλωσσολογία, Γραμματική, Αθλητισμός, Λογική, Κοινωνιολογία, Πολιτική, Στρατιωτική, Μετρική, Εκκλησιαστική, Επιστημολογία, Ψυχολογία, Φιλολογία, Αρχαιολογία, (δ) Οικονομικές: Οικονομία, Ναυτική, (ε) Τέχνη: Μουσική, Φωτογραφία.

3. Το ταξίδι των μαθηματικών όρων στις επιστήμες

Ένα μεγάλο μέρος των μαθηματικών όρων που παρουσιάσαμε στο 2 εκκίνησαν από τη μαθηματική επιστήμη και στη συνέχεια υιοθετήθηκαν από άλλες επιστήμες, αποτελώντας σε μεγάλο βαθμό τη βάση της ορολογίας τους. Συχνά η γνωσιακή/σημασιολογική διαδικασία που βοήθησε τη μετάβαση είναι η μεταφορά. Κάποιες από αυτές είναι προβλέψιμες, αφού αφορούν την κυριολεκτική ή μεταφορική (κατα)μέτρηση, λ.χ. χώρου, διαστημάτων, διαστάσεων κτλ., όπως η μετρική, η μουσική, η φιλοσοφία και η αστρονομία (για την επίδραση των μαθηματικών στη μουσική βλ. Tomasello, 2012˙ και στη φιλοσοφία βλ. Sattler, 2020˙ για τη μεταφορά στη μουσική βλ. Αποστολοπούλου, 2017). Άλλες όμως, κυρίως ανθρωπιστικές, είναι λιγότερο προβλέψιμες, όπως η γραμματική και η γλωσσολογία.

Στον πίνακα 1 παρουσιάζουμε με βάση το σχετικό υλικό του *ΛΚΝ* ένα δείγμα τέτοιων όρων με εσωτερικό ορολογικό δανεισμό από τα μαθηματικά προς άλλες επιστήμες, είτε διαχρονικό εντός της ελληνικής είτε με συγχρονική διαμεσολάβηση ξένων γλωσσών ως σημασιολογικά (αντι)δάνεια, ανά θεματικό πεδίο, φάση δανεισμού και επιστημονικό τομέα. Σημειώνουμε ότι οι ορισμοί και οι ετυμολογίες που παρέχουμε είναι συνοπτικές εκδοχές από το *ΛΚΝ* με διασταυρωτική έρευνα στο *TLG* για τις ετυμολογίες.

	Μαθηματικά/Γεωμετρία		**Άλλες Επιστήμες**
άβακας	ΑΕ ‘πίνακας για εύκολους υπολογισμούς’	→	ΕΚ ‘πλάκα στο επάνω μέρος του κιονοκράνου’ (αρχιτ. - αρχαιολ.)

αριθμός	ΑΕ ‘αφηρημένη έννοια με ψηφία για υπολογισμούς και πράξεις’	→	ΕΚ ‘διαίρεση των κλιτών μερών του λόγου ανάλογα με το πλήθος των πραγμάτων ή των προσώπων’ (γραμμ.)
διαίρεση	ΑΕ ‘ο χωρισμός σε τμήματα’	→	ΕΚ ‘τομή στο τέλος λέξης και πόδα (στο δακτυλικό εξάμετρο)’ (μετρ.)
ευθύ-γραμμος	ΑΕ ‘σε ευθεία γραμμή’	→	ΑΕ ‘που σχηματίζει ευθεία γραμμή’ (φυσ.)
θετικός	ΑΕ ‘μεγαλύτερος από το μηδέν και φέρει το σύμβολο +’	→	ΑΕ ‘που χαρακτηρίζει το ουσιαστικό χωρίς να το συγκρίνει με άλλο’ (γραμμ.) - ΝΕ ‘διαπίστωση ύπαρξης στην έρευνα’ (ιατρ.), ‘συναίσθημα χαράς’ (ψυχ.), ‘κανόνες δικαίου σε μια ιστορική στιγμή’ (νομ.), ‘που έχει ο πυρήνας των ατόμων’ (φυσ.), ‘φωτογραφικό είδωλο’ (φωτ.), ‘πραγματικό κέρδος’ (οικον.) [σημασ. δάν. από γαλλ. positif/αγγλ. positive]
κατιών	ΑΕ ‘που οι όροι μειώνονται’	→	ΜΕ ‘οι κατευθείαν απόγονοι κάποιου, όπως οι γιοι, οι εγγονοί κτλ.’ (νομ.)
μέγεθος	ΑΕ ‘σύνολο υπολογισμένο με ορισμένο σύστημα μονάδων’	→	ΑΕ ‘σχήμα και ένταση λάμψης αστέρα’ (αστρον.)
μέσος	ΑΕ ‘το πηλίκο από τη διαίρεση του αθροίσματος με τον αριθμό του πλήθους’	→	ΕΚ ‘που δείχνει ότι κάποιος/κάτι ενεργεί και η ενέργεια επιστρέφει σε αυτό(ν)’ (γραμμ.)
μέτρο	ΑΕ ‘απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού’	→	ΝΕ ‘σύνολο από άρσεις και θέσεις για σχηματισμό στίχου’ (μετρ.), ‘η ρυθμική μονάδα και το ισόχρονο τμήμα μουσικού κομματιού ανάμεσα σε δύο διαστολές’ (μουσ.) [σημασ. αντιδάν. από γαλλ. mètre]
μηνίσκος	ΕΚ ‘σώμα σε σχήμα μισοφέγγαρου’	→	ΝΕ ‘σχηματισμός από ίνες και χόνδρο, που παρεμβάλλεται στις αρθρώσεις για να διευκολύνει τις κινήσεις των οστών’ (ανατ.) [σημασ. αντιδάν. από γαλλ. ménisque].
μονάδα	ΕΚ ‘ο μικρότερος ακέραιος αριθμός με την επανάληψη του οποίου	→	ΝΕ ‘οικονομική, στρατιωτική, ιατρική μονάδα (τμήμα)’ (οικον., στρατ., ιατρ.)

	σχηματίζονται όλοι οι άλλοι ακέραιοι αριθμοί' (ΑΕ 'ενότητα')		
πλευρά	ΑΕ 'οι ευθείες που ορίζουν το σχήμα'	→	ΑΕ 'καθένα από τα επιμήκη και πεπλατυσμένα οστά στο πλάγιο τμήμα του θώρακα, παΐδι' (ανατ.)
πυραμίδα	ΑΕ 'γεωμετρικό σώμα με βάση και τριγωνικές πλευρές που καταλήγουν σε μία κοινή κορυφή'	→	ΑΕ 'οικοδόμημα σε σχήμα πυραμίδας' (αρχαιολ.)
ρόμβος	ΑΕ 'παραλληλόγραμμο σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές και δύο γωνίες οξείες και δύο αμβλείες'	→	ΑΕ 'καθεμία από τις τριάντα δύο υποδιαιρέσεις του ανεμολογίου' (ναυτ.)
τόξο	ΑΕ 'τμήμα καμπύλης γραμμής που ορίζεται από δύο σημεία' (< 'κυνηγητικό εργαλείο')	→	ΕΚ 'ημικυκλική κατασκευή που καλύπτει ανοίγματα, δέχεται τα βάρη της τοιχοποιίας και μεταφέρει τις πιέσεις στα πλάγια' (αρχιτ.), 'ουράνιο τόξο, ίριδα (μετεωρ.)', ΝΕ 'ονομασία οργάνων ή οστών του σώματος' (ανατ.) [σημασ. δάν. από γαλλ. arc], 'δοξάρι' (μουσ.) [σημασ. δάν. από ιταλ. arco ή γαλλ. archet]
τρίγωνο	ΑΕ 'σχήμα με τρεις πλευρές και γωνίες'	→	ΕΚ 'όνομα μικρών αστερισμών του βόρειου και του νότιου ημισφαιρίου αντίστοιχα' (αστρον.)
ύψος	ΑΕ 'απόσταση από τη βάση ως την κορυφή'	→	ΝΕ 'βαθμός οξύτητας φθόγγου που εξαρτάται από τη συχνότητα των παλμικών κινήσεων' (μουσ.) [σημασ. δάν. από γαλλ. hauteur].

Πίνακας 1: Παραδείγματα εσωτερικού ορολογικού δανεισμού[1]

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε δειγματοληπτικά σε ορισμένες ενδιαφέρουσες περιπτώσεις εσωτερικού δανεισμού όρων από τα μαθηματικά σε άλλες επιστήμες εντός της ελληνικής γλώσσας με βάση χωρία από σχετική διαχρονική έρευνα στο *TLG*. Παράλληλα, με την έρευνα αυτή αναθεωρούνται σε κάποιον βαθμό ορισμένες παραδεδομένες ετυμολογίες των σύγχρονων νεοελληνικών λεξικών (*ΛΚΝ*, *ΛΝΕΓ*, *Χρηστικό Λεξικό* Ακαδημίας Αθηνών), που θεωρούν πολλούς όρους ως σημασιολογικά δάνεια, ενώ μαρτυρούνται στην ελληνική γραμματεία νωρίτερα

[1] ΑΕ: Αρχαία Ελληνική, ΕΚ: Ελληνιστική Κοινή, ΜΕ: Μεσαιωνική Ελληνική, ΝΕ: Νέα Ελληνική, αγγλ.: αγγλική, ανατ.: ανατομία, αρχ.: αρχιτεκτονική, αρχαιολ.: αρχαιολογία, αστρον.: αστρονομία, γαλλ.: γαλλική, γραμμ.: γραμματική, μετρ.: μετρική, μουσ.: μουσική, ναυτ.: ναυτική, νομ.: νομική, σημασ. δάν./ αντιδάν.: σημασιολογικό δάνειο/αντιδάνειο, στρατ.: στρατιωτική, φυσ.: φυσική, φωτ.: φωτογραφία, ψυχ.: ψυχολογία.

(ΑΕ/ΕΚ/ΜΕ), δημιουργώντας ενδείξεις για διαχρονική επιβίωση (βλ. σχετικά Μανωλέσσου, 2016), ή, έστω, για σημασιολογικό αντιδανεισμό:

- Από τα παρατιθέμενα χωρία φαίνεται ξεκάθαρα ότι η λέξη *αναλογία* ξεκινάει από την ΑΕ στα μαθηματικά (βλ. Stein, 1990) και στη συνέχεια μεταπηδάει στη φιλοσοφία/γλωσσολογία, λ.χ. στον Αριστοτέλη (1α, β), και αργότερα κατά την ΕΚ στη φυσική/βοτανολογία, λ.χ. στον Θεόφραστο (4ος - 3ος π.Χ.) (1γ), τον Νεμέσιο (3ος μ.Χ.) (1δ) και τον Διογένη Λαέρτιο (3ος μ.Χ.) (1ε), ως μια έννοια που συσχετίζει ομοιότητες μεταξύ τους. Σύμφωνα με τις ετυμολογίες των λεξικών η λέξη είναι αρχαιοελληνικής προέλευσης και ταυτόχρονα σημασιολογικό αντιδάνειο στη σημερινή σημασία από τα γαλλικά analogie και proportion, όμως ήδη σχεδόν όλες οι επιστημονικές σημασίες μαρτυρούνται στη διαχρονία:

(1α) Αριστοτέλης, *Ηθικά Νικομάχεια*, σελίδα 1131a, γραμμή 31
τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον, ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ· ἡ γὰρ ἀνα-
λογία ἰσότης ἐστὶ λόγων, καὶ ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις. ἡ μὲν οὖν διῃρημένη ὅτι ἐν τέτταρσι, δῆλον. ἀλλὰ καὶ ἡ συνεχής· τῷ γὰρ ἑνὶ ὡς δυσὶ χρῆται καὶ δὶς λέγει, οἷον ὡς ἡ οὕτως ἡ τοῦ α πρὸς τὴν τοῦ β, τοῦ β πρὸς τὴν τοῦ γ. δὶς οὖν ἡ τοῦ β εἴρηται· ὥστ' ἐὰν ἡ τοῦ β τεθῇ δίς, τέτταρα ἔσται τὰ ἀνάλογα.

(1β) Αριστοτέλης, *Ηθικά Νικομάχεια*, σελίδα 1131b, γραμμή 15
τὸ ἐν διανομῇ δίκαιόν ἐστι, καὶ μέσον τὸ δίκαιον τοῦτ' ἐστί, τὸ δ' ἄδικον τὸ γὰρ ἀνάλογον μέσον, τὸ δὲ δίκαιον ἀνάλογον. καλοῦσι δὲ τὴν τοιαύτην ἀναλογίαν γεωμετρικὴν οἱ μαθηματικοί· ἐν γὰρ τῇ γεωμετρικῇ συμβαίνει καὶ τὸ ὅλον πρὸς τὸ ὅλον ὅπερ ἑκάτερον πρὸς ἑκάτερον. ἔ στι δ' οὐ συνεχὴς αὕτη ἡ ἀναλογία·

(1γ) Θεόφραστος, *Περί Φυτών Ιστορίαι*, βιβλίο 1, κεφάλαιο 1, τομέας 11, γραμμή 1
τὰ δ' ἔχει μὲν οὐκ ἀεὶ δὲ ἀλλ' ἐπέτειον, καὶ ὅσα χρονιώτερα ταῖς ῥίζαις. ὅλως δὲ πολύχουν τὸ φυτὸν καὶ ποικίλον καὶ χαλεπὸν εἰπεῖν καθόλου· σημεῖον δὲ τὸ μηδὲν εἶναι κοινὸν λαβεῖν ὃ πᾶσιν ὑπάρχει, καθάπερ τοῖς ζώοις στόμα καὶ κοιλία. τὰ δὲ ἀναλογίᾳ ταὐτὰ τὰ δ' ἄλλον τρόπον. οὔτε γὰρ ῥίζαν πάντ' ἔχει οὔτε καυλὸν οὔτε ἀκρεμόνα οὔτε κλάδον οὔτε φύλλον οὔτε ἄνθος οὔτε καρπὸν οὔτ' αὖ φλοιὸν ἢ μήτραν ἢ ἶνας ἢ φλέβας, οἷον μύκης ὕδνον·

(1δ) Νεμέσιος, *Περί φύσεως ανθρώπου*, τομέας 5, γραμμή 203
στερεὸν δὲ οὐκ ἄνευ γῆς· ὅθεν ἐκ πυρὸς καὶ γῆς τὸ τοῦ παντὸς συνιστάναι σῶμα ὁ θεὸς ἀρχόμενος ἐποίει. δύο δὲ μόνα καλῶς συνίστασθαι τρίτου χωρὶς οὐ δυνατὸν δεσμὸν γὰρ ἐν μέσῳ δεῖ ἀμφοῖν συναγωγὸν γίνεσθαι· δεσμῶν δὲ κάλλιστος ὃς ἂν ἑαυτόν τε καὶ τὰ ξυνδούμενα ὅτι μάλιστα ἓν ποιῇ· τοῦτο δὲ πέφυκεν ἀναλογία κάλλιστα ἀποτελεῖν.

(1ε) Διογένης Λαέρτιος, *Βίοι φιλοσόφων*, βιβλίο 10, τομέας 59, γραμμή 3
ταῦτα ἀπὸ τοῦ πρώτου καταρχόμενοι καὶ οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ, οὐδὲ μέρεσι μερῶν ἁπτόμενα, ἀλλ' ἢ ἐν τῇ ἰδιότητι τῇ ἑαυτῶν τὰ μεγέθη καταμετροῦντα, τὰ πλείω πλεῖον καὶ τὰ ἐλάττω ἔλαττον. Ταύτῃ τῇ ἀναλογίᾳ νομιστέον καὶ τὸ ἐν τῇ ἀτόμῳ ἐλάχιστον κεχρῆσθαι· μικρότητι γὰρ ἐκεῖνο δῆλον ὡς διαφέρει τοῦ κατὰ τὴν

αἴσθησιν θεωρουμένου, ἀναλογίᾳ δὲ τῇ αὐτῇ κέχρηται. ἐπείπερ καὶ ὅτι μέγεθος ἔχει ἡ ἄτομος κατὰ τὴν ἐνταῦθα ἀναλογίαν κατηγορήσαμεν, μικρόν τι μόνον μακρὰν ἐκβαλόντες.

- Από τα παρατιθέμενα χωρία διαφαίνεται ότι η λέξη όγκος με τη σημασία 'χώρος που κατέχει κάθε υλικό σώμα' εκκινεί από την ΑΕ στα μαθηματικά και τη φυσική και στη συνέχεια μεταπηδά στην ΕΚ στην ιατρική για να δηλώσει την 'παθολογική μάζα ιστών', λ.χ. στον Γαληνό (2ος μ.Χ.) (2α, β) και στον Κάσσιο τον Ιατροσοφιστή (2ος μ.Χ.) (2γ) (πιθανόν όμως ήδη στον Ιπποκράτη), με βάση τη μαθηματική έννοια της κατάληψης του χώρου και της προσαύξησης/συγκέντρωσης. Επομένως, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η ιατρική σημασία δεν είναι σημασιολογικό δάνειο από το γαλλικό tumeur, όπως αναφέρουν τα λεξικά, αλλά ελληνική δημιουργία ή τουλάχιστον σημασιολογικό αντιδάνειο:

(2α) Γαληνός, *Των Ιπποκράτους Γλωσσών Εξήγησις*, τόμος 19, σελίδα 136, γραμμή 11
σατυρισμοί: οἱ περὶ τὰ ὦτα προμήκεις ὄγκοι τῶν ἀδένων. ἔνιοι δὲ τὰς τῶν αἰδοίων ἐντάσεις ἤκουσαν.

(2β) Γαληνός, *Των Ιπποκράτους Γλωσσών Εξήγησις*, τόμος 19, σελίδα 145, γραμμή 12
τέρμινθοι: οἱ τῷ τοῦ τερμίνθου καρπῷ παραπλήσιοι, κατὰ τὸ δέρμα συνιστάμενοι παρὰ φύσιν ὄγκοι.

(2γ) Κάσσιος ο Ιατροσοφιστής, *Ιατρικά Ζητήματα και Φυσικά Προβλήματα*, τομέας 1, γραμμή 42
ἐπὶ γὰρ τούτων μάλιστά εἰσιν ὀξυκίνητοι οἱ ὄγκοι καὶ πολλοὶ τῷ πλήθει, ἐπὶ δὲ τῶν γεγηρακότων ὀλίγοι τέ εἰσι καὶ νωχελεῖ τῇ κινήσει χρῶνται […] ῥητέον οὖν, ὅτι ἐπὶ μὲν τῶν κατὰ οἱονεὶ ἐγγώνιον σχῆμα συνισταμένων ἑλκῶν συμβαίνει τὴν ἐπούλωσιν θᾶττον γίνεσθαι […].

- Από τα παρατιθέμενα χωρία διαπιστώνεται ότι οι ΑΕ γεωμετρικοί όροι *έλικα* 'η καμπύλη γραμμή από ένα σημείο που κινείται, ισοταχώς και σε ευθεία γραμμή, επάνω στην επιφάνεια κυλίνδρου ο οποίος περιστρέφεται επίσης ισοταχώς', και *πλευρά* 'επιφάνεια που βρίσκεται στα δεξιά ή αριστερά, μπρος ή πίσω, πάνω ή κάτω, οι ευθείες που ορίζουν ένα σχήμα', μεταπηδούν στη συνέχεια στην ιατρική/ανατομία και τη βοτανολογία. Συγκεκριμένα, η λέξη *έλικα* εντοπίζεται στην ΑΕ/ΕΚ στον Γαληνό (2ος μ.Χ. - ανατομία) (3α) και στον Θεόφραστο (4ος/3ος π.Χ. - βοτανολογία) (3β) και η λέξη *πλευρά*[2] στην ΑΕ στον Αριστοτέλη (4ος π.Χ. - ανατομία) (4α):

(3α) Γαληνός, *Των Ιπποκράτους Γλωσσών Εξήγησις*, τόμος 19, σελίδα 127, γραμμή 5
ὀσχίῳ: τῇ περὶ τὸ στόμα τῆς μήτρας ἑλικοειδεῖ ἐπαναστάσει· ὄσχος γὰρ καὶ μόσχος τὰ κλήματα καὶ αἱ ἕλι κες· τὸ δὲ αὐτὸ καὶ ἀμφίδεον ὀνομάζει καὶ λέγνα.
(3β) Θεόφραστος, *Περί Φυτών Ιστορίαι*, βιβλίο 3, κεφάλαιο 7, τομέας 3, γραμμή 3
[…] ἑαυτῶν καὶ τὰ κατ' ἐνιαυτὸν ἐπιγινόμενα ταῦτα, φύλλον ἄνθος βλαστόν· τὰ δὲ καὶ βρύον ἢ ἕλικα·

[2] Κατά την Schironi (2010) η λέξη *πλευρά* ήταν αντικείμενο δανεισμού από την ιατρική στα μαθηματικά, όμως με βάση τη δική μας διαχρονική έρευνα στο TLG φαίνεται να συμβαίνει το αντίθετο.

(4α) Αριστοτέλης, *Περί Ζώων Ιστορίας*, Bekker σελίδα 496b, γραμμή 12
[…] τὸ διάζωμα τὸ τοῦ θώρακος, αἱ καλούμεναι φρένες, πρὸς μὲν τὰ πλευρὰ καὶ τὰ ὑποχόνδρια καὶ τὴν ῥάχιν συνηρτημέναι, ἐν μέσῳ δ᾽ ἔχει τὰ λεπτὰ καὶ ὑμενώδη.

- Υπάρχουν ενδείξεις ότι σε μεγάλο βαθμό οι Αλεξανδρινοί γραμματικοί βασίστηκαν σε όρους των μαθηματικών για να αναπτύξουν τη σχετική ορολογία, λ.χ. *αόριστος*, *αριθμός*, *βαθμός* κτλ., ακριβώς επειδή η γραμματική προβλέπει ταξινόμηση και διαβάθμιση (για τη γέννηση της γραμματικής ορολογίας στην ελληνική και τη σχέση της με άλλες επιστήμες, βλ. Schmidhauser, 2010˙ Porter, 2010˙ Lallot, 2012).[3] Για παράδειγμα, η λέξη αριθμός είναι πολύ συχνή στη μαθηματική ορολογία της ΑΕ, αλλά απαντά ως γραμματικός όρος σε γραμματικές περιγραφές, λ.χ. στον Απολλώνιο Δύσκολο (2ος μ.Χ.) (5α):

(5α) Απολλώνιος ο Δύσκολος, *Περί Συντάξεως*, μέρος 2, τόμος 2, σελίδα 362, γραμμή 3
Ἀπὸ δὴ τοῦ τοιούτου ἑνικοῦ μετῄει καὶ πληθυντικὸς ἀριθμός, ἐπισπώμενος τὴν ἐκ δευτέρων καὶ τρίτων προσώπων σύλληψιν, πέμψω μεν, ἀριθμήσωμεν· ὃν μάλιστα καὶ εὔχρηστον ὑπολαμβάνω καθίστασθαι […].

4. Συμπεράσματα

Η ορολογία της μαθηματικής επιστήμης επηρέασε σε σημαντικό βαθμό την ορολογία άλλων επιστημών, όχι μόνο θετικών αλλά και κοινωνικών/ανθρωπιστικών, και μάλιστα ήδη από την ΑΕ, με αποτέλεσμα τον εσωτερικό/διατομεακό δανεισμό όρων. Αυτό οφείλεται στη φύση και τη μεθοδολογία της μαθηματικής σκέψης που προτάσσει την (κατα)μέτρηση και την ταξινόμηση, έννοιες βαθύτερα επιστημολογικές. Παράλληλα, υπάρχουν ενδείξεις ότι η μεταπήδηση είναι ελληνογενής και όχι πάντοτε (συν)αποτέλεσμα σημασιολογικού δανεισμού από ξένες γλώσσες, όπως είθισται να παρουσιάζεται στην ετυμολογική έρευνα των σύγχρονων γενικών ερμηνευτικών λεξικών.

Βιβλιογραφία

Αναστασιάδη-Συμεωνίδη, Α. (2017). Το σχήμα της μεταφοράς στον επιστημονικό λόγο: εφαρμογή στο λεξιλόγιο της ανατομίας. Στο Κ. Βαλεοντής (Επιμ.), *11ο Συνέδριο «Ελληνική Γλώσσα και Ορολογία», Αθήνα, ΕΛΕΤΟ*, 77-87. http://www.eleto.gr.

Αποστολοπούλου, Ε. (2017). Η εννοιοποίηση της «νότας». Στο *Πρακτικά του 9ου Συνεδρίου Μεταπτυχιακών και Υποψήφιων Διδακτόρων*. ΕΚΠΑ. Αθήνα 4-8/10/2017.

Bulmer-Thomas, I. (1960). Greek Mathematical Terminology-Charles Mugler: *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des grecs*. (Études et Commentaires, xxviii,

[3] Σημειώνουμε ότι αυτό δεν αποτελεί επιχείρημα για την ψευδή και παραγλωσσολογική άποψη ότι η ΑΕ είχε μαθηματική δομή, καθώς αφορά την έννοια του γραμματικού συστήματος της γλώσσας εν συνόλω και σε όλες τις γλώσσες.

xxix.) 2 vols. Pp. 456. Paris: Klincksieck, 1958. Paper, 22 fr. *The Classical Review*, *10*(2), 121-123.

English, K. (1998). Understanding science: when metaphors become terms. *ASp. la revue du GERAS*, (19-22), 151-163.

Ευθυμίου, Ε. & Μ. Κατσογιάννου. (2004). *Ελληνική ορολογία: έρευνα και εφαρμογές*. Αθήνα: Καστανιώτης.

Finatto, M. J. B. (2010). Metaphors in scientific and technical languages: challenges and perspective. *Delta: documentação de estudos em lingüística teórica e aplicada 26*, 645-656.

Lallot, J. (2012). *Études sur la grammaire alexandrine*. Paris, Vrin.

Μανωλέσσου, Ι. (2016). Ο νέος τόμος *του Ιστορικού Λεξικού της Νέας Ελληνικής* της Ακαδημίας Αθηνών: διαχρονικές προοπτικές. *Μελέτες για την ελληνική γλώσσα* 36, 239-250. http://ins.web.auth.gr/images/MEG_PLIRI/MEG_36_17% 20MANOLESSOU.pdf.

Netz, R. (2012). The more it changes… Reflections on the world historical role of Greek mathematics. Στο Olmos, P. (Επιμ.) (2012), *Greek Science in the Long Run: Essays on the Greek Scientific Tradition (4th C. BCE-17th C. CE)* (σ. 152-168). Cambridge Scholars Publishing.

Porter, J. (2010). Language as a system in ancient rhetoric and grammar. Στο Bakker, E. J. (Επιμ.) (2010), *A companion to the Ancient Greek language* (σ. 512-524). John Wiley & Sons.

Sattler, B. M. (2020). *The concept of motion in ancient Greek thought: Foundations in logic, method, and mathematics*. Cambridge University Press.

Schmidhauser, A. (2010). The birth of grammar in Greece. Στο Bakker, E. J. (Επιμ.). (2010), *A companion to the Ancient Greek language* (σ. 499-511). John Wiley & Sons.

Seidenberg, A. (1984). On ancient mathematical terminology. *Archive for History of Exact Sciences*, 1-13.

Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese*, 163-211.

Schironi, F. (2010). Technical languages: science and medicine. Στο Bakker, E. J. (Επιμ.). (2010), *A companion to the Ancient Greek language* (σ. 338-354). John Wiley & Sons.

Tomasello, M. (2012). Musical Terminology in Plato’s Dialogues: The image of Concord in the *Republic* and in the *Timaeus*. Στο Olmos, P. (Επιμ.) (2012), *Greek Science in the Long Run: Essays on the Greek Scientific Tradition (4th C. BCE-17th C. CE)* (σ. 169-190). Cambridge Scholars Publishing.

Το παρόν άρθρο αποτελεί αναδημοσίευση από τα πρακτικά του 14ου Συνεδρίου «Ελληνική Γλώσσα και Ορολογία» της ΕΛΕΤΟ (Νοέμβριος 2023).

Οι "γλώσσες" των Μαθηματικών: Διδακτικές εφαρμογές

Μαρία Μητσιάκη[1], Ελευθερία Ζάγκα[2]

[1]Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Ανθρωπιστικών Σπουδών, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

mmitsiaki@hs.duth.gr

[2]Σύμβουλος Εκπαίδευσης Φιλολόγων Ανατολικής Θεσσαλονίκης

zagaeleuth@yahoo.gr

Περίληψη

Η μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί μια κατεξοχήν γλωσσική δραστηριότητα, όπου η φυσική και η συμβολική γλώσσα αλληλεπιδρούν στη διαμόρφωση της μαθησιακής εμπειρίας. Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να κατανοήσουν, να εκφράσουν και να εντάξουν τα μαθηματικά σύμβολα σε πλαίσια λόγου που συγκροτούνται μέσω της φυσικής γλώσσας. Επομένως, η γλωσσική διάσταση της διδασκαλίας καθίσταται κρίσιμη για την κατανόηση εννοιών, τη διατύπωση ορισμών, την ερμηνεία προβλημάτων και την αιτιολόγηση λύσεων. Με βάση τη θεωρητική αυτή αφετηρία η εισήγηση εξετάζει θεωρητικές και διδακτικές προσεγγίσεις που αναδεικνύουν τη δυναμική σχέση μαθηματικής και φυσικής γλώσσας, εστιάζοντας στον τρόπο με τον οποίο η συνειδητή αξιοποίησή τους ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση, τις επικοινωνιακές δεξιότητες και τον μαθηματικό γραμματισμό. Μέσα από παραδείγματα διδακτικών πρακτικών καταδεικνύεται ότι η εναλλαγή και η μετάβαση σε διαφορετικές μορφές λόγου λειτουργεί ως εργαλείο νοηματοδότησης, προάγοντας τόσο τη μαθηματική σκέψη όσο και τις γλωσσικές ακαδημαϊκές δεξιότητες των μαθητών/τριών.

Λέξεις κλειδιά: μαθηματικός γραμματισμός, διδακτικές πρακτικές, εννοιολογική κατανόηση, γλωσσικές δεξιότητες.

Εισαγωγή

Τα μαθηματικά συνιστούν μία από τις πιο αφηρημένες μορφές ανθρώπινης σκέψης, ωστόσο η διδασκαλία και η μάθησή τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με τη φυσική γλώσσα, η οποία λειτουργεί ως βασικό μέσο κατανόησης και επικοινωνίας (Pimm, 1987· Morgan, 1998). Υπό την έννοια αυτή η «γλώσσα των μαθηματικών» δεν περιορίζεται στα σύμβολα, τις εξισώσεις ή τις αποδείξεις, αλλά περιλαμβάνει το σύνολο των σημειωτικών πόρων που χρησιμοποιούνται για τη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών, τη φυσική γλώσσα, τις μεταφορές, τα διαγράμματα, τις απεικονίσεις και τις αναπαραστάσεις (Halliday, 1978· Lemke, 1990). Με άλλα λόγια ο μαθηματικός λόγος είναι αποτέλεσμα της συνέργειας τριών σημειωτικών συστημάτων: της φυσικής γλώσσας, των μαθηματικών συμβόλων και της οπτικής αναπαράστασης.

Με βάση την παραπάνω παραδοχή στο πλαίσιο της παρούσας εισήγησης επιχειρείται: α. η διερεύνηση του περιεχομένου και των διαστάσεων του όρου «γλώσσα/γλώσσες των μαθηματικών» (Schleppegrell, 2007), β. η παρουσίαση του θεωρητικού πλαισίου που εξετάζει τη σχέση γλώσσας και μαθηματικής σκέψης υπό το πρίσμα κοινωνικο-σημειωτικών και γνωστικών προσεγγίσεων (Vygotsky, 1986· Moschkovich, 2010), γ. ο εντοπισμός των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες εξαιτίας της μη κατανόησης της μαθηματικής γλώσσας, ιδίως σε πολυγλωσσικά ή πολυπολιτισμικά μαθησιακά περιβάλλοντα (Setati & Adler, 2000), και δ. η παρουσίαση διδακτικών εφαρμογών που αξιοποιούν τη γλώσσα ως εργαλείο μάθησης και οικοδόμησης νοήματος, ενισχύοντας τη διδασκαλία με επίκεντρο τη γλωσσική διάσταση των μαθηματικών (Sfard, 2008). Σε όλες τις παραπάνω προσεγγίσεις, ως βασικός άξονας θεωρείται η ενσυνείδητη καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας, η οποία αναδεικνύεται ως κρίσιμος παράγοντας για την ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού και της εννοιολογικής κατανόησης των μαθητών/τριών.

Γλώσσα ή γλώσσες των Μαθηματικών;

Η «γλώσσα των μαθηματικών» συνιστά ένα σύνθετο και πολυεπίπεδο σημειωτικό σύστημα, το οποίο υπερβαίνει την παραδοσιακή διάκριση ανάμεσα στη φυσική και τη συμβολική γλώσσα. Δεν πρόκειται απλώς για ένα σύνολο όρων, συμβόλων ή κανόνων, αλλά για ένα ολόκληρο σύστημα αναπαράστασης και επικοινωνίας, μέσα από το οποίο οι μαθητές και οι μαθήτριες κατασκευάζουν, εκφράζουν και διαπραγματεύονται μαθηματικά νοήματα (Halliday, 1978· Lemke, 1990· Pimm, 1987). Υπό την έννοια αυτή η γλώσσα, με την ευρεία της έννοια, λειτουργεί ως εργαλείο σκέψης και ως φορέας κοινωνικοπολιτισμικών νοημάτων (Vygotsky, 1986· Σακονίδης, 1999), ενώ η κατανόηση της μαθηματικής γλώσσας αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για την ανάπτυξη του μαθηματικού γραμματισμού (Schleppegrell, 2007· Sfard, 2008). Πιο συγκεκριμένα, στη μαθησιακή διαδικασία κατά τη διδασκαλία του μαθήματος των Μαθηματικών στη σχολική τάξη εμπλέκονται πολλές και διαφορετικές μορφές λόγου, οι οποίες συναρθρώνονται με τρόπο ώστε η επεξεργασία και η αποκωδικοποίησή τους από τους μαθητές και τις μαθήτριες να συνιστά μια σύνθετη γλωσσική και γνωστική διαδικασία, ιδιαίτερα μάλιστα εάν πρόκειται για μαθητές και μαθήτριες οι οποίοι/ες δεν είναι φυσικοί ομιλητές και ομιλήτριες της γλώσσας (αναλυτικότερα σε: Setati & Adler, 2000· Ζάγκα, 2014· Μητσιάκη & Συμεωνίδου, 2019).

Πρώτα από όλα, κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών αξιοποιείται η φυσική γλώσσα, η οποία ως προφορικός και γραπτός λόγος, αποτελεί το βασικότερο όχημα επικοινωνίας στη σχολική τάξη, δεδομένου ότι αποτελεί για τα Μαθηματικά, όπως και για κάθε γνωστικό αντικείμενο στο σχολείο, το μέσο της διδασκαλίας. Κατά συνέπεια, μέσω της φυσικής γλώσσας οι μαθητές και οι μαθήτριες αποκωδικοποιούν εκφωνήσεις ασκήσεων και προβλημάτων, περιγράφουν διαδικασίες, αιτιολογούν επιλογές και εκφράζουν λογικά επιχειρήματα (Morgan, 1998). Οι λειτουργίες αυτές προϋποθέτουν υψηλές γνωστικές και γλωσσικές δεξιότητες, με άλλα λόγια απαιτούν ανάπτυξη της ακαδημαϊκής γλωσσικής ικανότητας (Cognitive Academic Language Proficiency (CALP) (Cummins, 2021), δηλαδή του ακαδημαϊκού λόγου. Μάλιστα, η CALP δεν αποτελεί μόνο μια ψυχογλωσσολογική κατασκευή με τα γλωσσικά και γνωστικά της χαρακτηριστικά αλλά κρίκο στην αλυσίδα που συνδέει τις κοινωνικές σχέσεις εξουσίας με τα μαθησιακά αποτελέσματα. Τέλος, η φυσική γλώσσα επιτρέπει την κοινωνική διαπραγμάτευση των μαθηματικών εννοιών στη σχολική τάξη, καθιστώντας τη μάθηση μια κοινωνικά διαμεσολαβημένη διαδικασία (Moschkovich, 2010).

Ωστόσο, με τη φυσική γλώσσα συνυπάρχει και η μαθηματική συμβολική γλώσσα, η οποία συνιστά μια ιδιαίτερη μορφή γραφής, όπου τα σύμβολα, οι τύποι, οι εξισώσεις ή τα διαγράμματα, λειτουργούν πολύ συχνά ως φορείς αφηρημένων εννοιών. Σύμφωνα μάλιστα με τον Duval (2006), η κατανόηση των μαθηματικών απαιτεί τη μετάβαση ανάμεσα σε διαφορετικά σημειωτικά συστήματα, όπως από λεκτικό στο αλγεβρικό, από το αλγεβρικό στο γραφικό και από το γραφικό στο γεωμετρικό, στοιχεία τα οποία ταυτόχρονα με την ικανότητα της «μετα-αναπαράστασης» είναι καθοριστικά για τη βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση του περιεχομένου των Μαθηματικών σε συνθήκες σχολικής τάξης. Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις, τα διαγράμματα και οι κάθε είδους οπτικές απεικονίσεις, καθώς αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της μαθηματικής επικοινωνίας λειτουργούν ως εργαλεία σκέψης που βοηθούν τους μαθητές και τις μαθήτριες να αντιληφθούν αφηρημένες σχέσεις μέσω χωρικών και γεωμετρικών προτύπων. Αυτού του είδους η πολυτροπικότητα υποστηρίζει την οικοδόμηση μαθηματικών εννοιών μέσα από πολλαπλές μορφές νοηματοδότησης.

Τέλος, ο λόγος των μαθηματικών, συνιστά ένα ιδιαίτερο είδος λόγου με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά. Πρόκειται στην ουσία για σημασιολογικά, δομικά (σύνταξη, δομή των προτάσεων), πραγματολογικά χαρακτηριστικά και χαρακτηριστικά του λόγου που καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο η μαθηματική γνώση διαμεσολαβείται από τον γλωσσικό κώδικα (Halliday, 1978). Για παράδειγμα, το λεξιλόγιο περιλαμβάνει ειδικές λέξεις, όπως *αριθμητής, παρονομαστής, διάνυσμα, εξίσωση* καθώς και ονοματικές φράσεις, όπως *μέγιστος κοινός διαιρέτης, ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, τετραγωνική ρίζα, κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις, δευτεροβάθμια εξίσωση, εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες, εντός εναλλάξ γωνίες*. Αντίστοιχα, παρατηρείται μεγάλη συχνότητα χρήσης γλωσσικών δομών όπως είναι η παθητική φωνή: *το 10 διαιρείται από το 2, το χ θεωρείται ίσο με το 0, προστίθεται, αφαιρείται, ισούται* καθώς και πληθώρα μαθηματικών ορισμών, οι οποίοι αποτελούν νοητικές κατασκευές που εισάγονται για την κατανόηση στοιχείων της πραγματικότητας. Οι ορισμοί, σύμφωνα με τους Καμηλάκη και Κοτσαλίδη (2017), αξιοποιούνται κυρίως για την κατανόηση και απόδοση εννοιών, διακρίνονται από σαφήνεια, ακρίβεια, αφαίρεση, πύκνωση και γενίκευση, ενώ παρατηρείται κυριαρχία του περιγραφικού νοήματος. Τέλος, ο μαθηματικός λόγος αξιοποιεί λογικές συνδέσεις (logical connectors) (Ζάγκα, 2014), που αποτελούν μια γλωσσική επινόηση η οποία στα μαθηματικά κείμενα χρησιμοποιείται για να αναπτύξει και να συνδέσει αφηρημένες έννοιες και ιδέες, όπως: *Εάν, τότε και μόνο τότε, εφόσον, συνεπακόλουθα, συνεπάγεται, Εάν είχαμε, και επειδή, Τότε, Εάν, τότε, Επομένως* κ.ά. Στην ουσία πρόκειται για λέξεις και φράσεις που επισημαίνουν τη λογική σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες γλωσσικές δομές, οι οποίες πρωταρχικά υπηρετούν μια σημασιολογική λειτουργία που συνδέει και καταδεικνύει τη φύση της σχέσης ανάμεσα στα τμήματα ενός κειμένου, ώστε οι μαθητές, όταν διαβάζουν μαθηματικά κείμενα, να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τη λογική ακολουθία, να αντιλαμβάνονται δηλαδή εάν τονίζεται η ομοιότητα, η αντίθεση, η αιτία ή το αποτέλεσμα. Οι λογικές αυτές συνδέσεις μπορεί να είναι ταυτόχρονα λέξεις ή σύμβολα (Dale & Cuevas, 1987). Γενικά, η σύνταξη, η σημασιολογία και η πραγματολογία του μαθηματικού λόγου επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οικοδομείται το νόημα στο πλαίσιο της διδασκαλίας των Μαθηματικών (Halliday, 1978).

Τέλος, τα εξωγλωσσικά και παραγλωσσικά στοιχεία (κινήσεις του σώματος, χειρονομίες, επιτονισμός), όπως σε κάθε είδους επικοινωνιακή δραστηριότητα διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση και την πρόσληψη των μαθηματικών εννοιών. Οι Arzarello et al. (2009) και Radford (2014) υποστηρίζουν ότι οι κινήσεις αυτές λειτουργούν ως επιπλέον σημειωτικοί πόροι που επιτρέπουν στους μαθητές και στις μαθήτριες να εξωτερικεύσουν την αφηρημένη σκέψη και να αναπτύξουν χωρική κατανόηση των εννοιών. Η κινησιογνωσία, επομένως, δεν αποτελεί απλή συνοδευτική συμπεριφορά, αλλά ουσιαστικό μέρος της μαθηματικής έκφρασης.

Συνολικά, η «γλώσσα» των μαθηματικών συγκροτείται ως ένα πολυτροπικό πλέγμα φυσικών, συμβολικών, οπτικών, σωματικών και μεταφορικών στοιχείων. Η διδασκαλία που αναγνωρίζει και αξιοποιεί αυτή την πολυδιάστατη φύση της γλώσσας μπορεί να ενισχύσει ουσιαστικά την κατανόηση, την επικοινωνία και τον μαθηματικό γραμματισμό των μαθητών (Sfard, 2008· Moschkovich, 2010). Κι αυτή ακριβώς η αναγνώριση των ποικίλων διαστάσεων του μαθηματικού λόγου οδήγησε στην ανάπτυξη διαφορετικών θεωρητικών πλαισίων, τα οποία με τη σειρά τους οδηγούν σε διδακτικές εφαρμογές με τις οποίες επιχειρείται η ανάπτυξη γλωσσικών και γνωστικών δεξιοτήτων κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Στις θεωρητικές αυτές οπτικές θα αναφερθούμε στη συνέχεια.

Θεωρητικές προσεγγίσεις για τη διδασκαλία του μαθηματικού λόγου

Η μελέτη της γλώσσας ως θεμελιώδους διάστασης της μαθηματικής μάθησης έχει απασχολήσει ποικίλα θεωρητικά ρεύματα στη διδακτική των Μαθηματικών. Οι σύγχρονες αυτές προσεγγίσεις αναγνωρίζουν ότι η μαθηματική γνώση δεν είναι ανεξάρτητη από τη γλωσσική δραστηριότητα, αλλά συγκροτείται μέσα από λόγους (discourses), αναπαραστάσεις και σημειωτικά μέσα που επιτρέπουν τη νοηματοδότηση των εννοιών. Πιο αναλυτικά:

Μία από τις πλέον επιδραστικές προσεγγίσεις στη μελέτη του μαθηματικού λόγου είναι η Commognitive Theory (Sfard, 2008). Η θεωρία της commognition (communication + cognition) θεωρεί ότι η μαθηματική σκέψη συνιστά μορφή επικοινωνιακής δραστηριότητας, όπου τα Μαθηματικά νοούνται ως discourse, δηλαδή ως σύνολο γλωσσικών και σημειωτικών πρακτικών που δίνουν νόημα στην πραγματικότητα και συνδέονται στενά με την κοινωνική εξουσία και την κατασκευή της πραγματικότητας. Στη βάση αυτή, η μάθηση των Μαθηματικών δεν ταυτίζεται με την εσωτερίκευση έτοιμων εννοιών, αλλά με τη σταδιακή ένταξη του μαθητή και τις μαθήτριας σε έναν ειδικό μαθηματικό λόγο που περιλαμβάνει λέξεις, συμβολισμούς, ρουτίνες και γραφικά μέσα. Η διάκριση που εισάγει η Sfard (ό.π., 2008) μεταξύ primary objects (αντικείμενα που γίνονται αντιληπτά αισθητηριακά) και discursive objects (νοητικές κατασκευές) που δημιουργούνται μέσω του λόγου και των συμβόλων) αναδεικνύει τη γλώσσα ως βασικό παράγοντα δημιουργίας και κατασκευής της πραγματικότητας.

Αντίστοιχα, η Συστημική Λειτουργική Γλωσσολογία (Systemic Functional Linguistics) προσφέρει ένα διαφορετικό αλλά συμπληρωματικό πλαίσιο, σ’ αυτό που προαναφέρθηκε. Σύμφωνα λοιπόν με τους Halliday & Hasan, (1976) εισάγεται η έννοια του επιπέδου ύφους (register) το οποίο αναφέρεται σε μια εξειδικευμένη ποικιλία της φυσικής γλώσσας που για κάθε γνωστικό/ επιστημονικό πεδίο περιλαμβάνει ιδιαίτερες γραμματικές δομές, λεξιλόγιο και τρόπους συνδυασμού των προτάσεων. Ειδικότερα για τα Μαθηματικά (mathematics register) και τη διδασκαλία τους στο σχολείο αυτό μεταφράζεται στη διδασκαλία των απαιτούμενων γλωσσικών και γνωστικών δεξιοτήτων που χρειάζονται οι μαθητές και οι μαθήτριες, ώστε να αποκτήσουν ευχέρεια όχι μόνο στη χρήση όρων, αλλά και στις λεκτικές, συντακτικές και ρητορικές συμβάσεις του μαθηματικού λόγου (Schleppegrell, 2007), ώστε να μπορούν να «κατανοούν και να μιλούν Μαθηματικά».

Μία επιπλέον θεωρητική προσέγγιση είναι αυτή των Lakoff και Núñez (2000) οι οποίοι απορρίπτουν την παραδοσιακή αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι ένα καθαρά αφηρημένο και λογικό σύστημα ανεξάρτητο από την ανθρώπινη εμπειρία. Αντίθετα, υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά είναι προϊόν της *ενσώματης νόησης* (embodied cognition), αφού πηγάζουν από τον τρόπο που λειτουργεί ο ανθρώπινος νους και το σώμα. Αντίστοιχα, η σκέψη, σύμφωνα με τους συγγραφείς, είναι εγγενώς μεταφορική, δεδομένου ότι οι άνθρωποι κατανοούν αφηρημένες έννοιες μέσω αντιστοιχιών, κατά συνέπεια τα μαθηματικά θεωρούνται σύστημα μεταφορικών κατασκευών που έχουν τις ρίζες τους σε αισθητηριακές, χωρικές και κινητικές εμπειρίες. Εξαιρετικά σημαντικό ρόλο στην κατεύθυνση αυτή παίζει η λειτουργία της μεταφοράς από μια εννοιολογική οπτική (conceptual knowledge), αφού η μεταφορά δεν εκλαμβάνεται απλώς ως μια γλωσσική έκφραση, αλλά ως ένας γνωστικός μηχανισμός· με άλλα λόγια συνίσταται στην κατανόηση ή βίωση μιας κατάστασης ή ενός πράγματος σε σχέση με κάποια άλλη κατάσταση ή πράγμα, δηλαδή κατά βάση εμπεριέχει την κατανόηση ενός εννοιακού πεδίου μέσω ενός άλλου εννοιακού πεδίου (αναλυτικότερα για τη έννοια της μεταφοράς από την οπτική της γνωσιακής γλωσσολογίας βλ. Γεωργακόπουλος 2011). Τα δύο αυτά εννοιακά πεδία που συμμετέχουν στη μεταφορά είναι το πεδίο πηγή (source domain), από το οποίο αντλούμε μεταφορικές εκφράσεις για να κατανοήσουμε ένα άλλο εννοιακό πεδίο, και το πεδίο στόχος (target domain) το οποίο συνιστά το εννοιακό πεδίο που γίνεται αντιληπτό βάσει του πεδίου πηγής (ό.π., 2011). Στο μαθηματικό πλαίσιο, αυτό σημαίνει ότι η κατανόηση ενός μαθηματικού συμβόλου ή εννοιών (π.χ. απείρου, ορίου, συνόλου) βασίζεται σε νοητικές προβολές από τον αισθητό κόσμο – που δηλώνονται λεκτικά - και όχι σε «καθαρές» λογικές πράξεις, ενώ η μεταφορική και πολυτροπική προσέγγιση στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών υπογραμμίζει τη σημασία της γλώσσας ως μέσου ενσάρκωσης και κατανόησης αφηρημένων δομών. Είναι προφανές ότι η χρήση μεταφορών και αναλογιών επιτρέπει τη μεταφορά νοήματος από οικεία γνωστικά πλαίσια προς αφηρημένες μαθηματικές έννοιες (Lakoff & Núñez, 2000). Μέσα από τέτοια μεταφορικά σχήματα, οι μαθητές και οι μαθήτριες αξιοποιούν προϋπάρχουσες εμπειρίες για να κατανοήσουν έννοιες όπως η «συνάρτηση» ή το «όριο» ως δυναμικές σχέσεις.

Τέλος, οι κοινωνικοπολιτισμικές θεωρίες της μάθησης (Vygotsky, 1986· Bakhtin, 1981), οι οποίες εκλαμβάνουν τη γλώσσα ως εργαλείο σκέψης και κοινωνικής διαμεσολάβησης, αντιλαμβάνονται και τη μαθησιακή διαδικασία των Μαθηματικών ως διαδικασία διαλόγου, όπου οι μαθητές και οι μαθήτριες, μέσα από την αλληλεπίδραση, επεξεργάζονται και διαπραγματεύονται νοήματα, οικοδομώντας σταδιακά την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Η διαλογική διδασκαλία που προκρίνεται ενθαρρύνει τη συμμετοχή, την επιχειρηματολογία και τη μεταγλωσσική επίγνωση, προσφέροντας ευκαιρίες για μετασχηματισμό της μαθηματικής σκέψης μέσω της γλώσσας.

Διδακτικές εφαρμογές και προτάσεις

Οι γλωσσολογικές, γνωστικές και κοινωνιοπολιτισμικές θεωρίες που αναφέρθηκαν οδηγούν σε συνακόλουθες διδακτικές εφαρμογές η ενδεικτική παρουσίαση των οποίων γίνεται στη συνέχεια.

Για παράδειγμα, με βάση τη θεώρηση ότι η μαθηματική σκέψη εξωτερικεύεται με τη μορφή μιας επικοινωνιακής δραστηριότητας και η μάθηση δεν νοείται ως εσωτερική διαδικασία απόκτησης εννοιών, αλλά ως ένταξη σε έναν μαθηματικό λόγο (mathematical discourse), ενώ η φυσική γλώσσα, σε συνδυασμό με τους μαθηματικούς συμβολισμούς, τα διαγράμματα και τις αναπαραστάσεις, συγκροτεί ένα ενιαίο επικοινωνιακό σύστημα (Sfard, 2008), οι προτεινόμενες διδακτικές εφαρμογές θα μπορούσαν να είναι: α. η λεκτικοποίηση της σκέψης, όπου οι μαθητές και οι μαθήτριες ενθαρρύνονται να εξηγούν προφορικά τα βήματά τους, να χρησιμοποιούν ακριβείς μαθηματικούς όρους και να μεταφράζουν συμβολικές εκφράσεις σε φυσική γλώσσα, β. η ανάλυση μαθηματικών επιχειρημάτων, κατά την οποία οι εκπαιδευτικοί ζητούν από τους μαθητές και τις μαθήτριες να αναγνωρίζουν πώς δομείται ένα μαθηματικό επιχείρημα μέσα από τη γλώσσα (π.χ. υπόθεση, αιτιολόγηση, συμπέρασμα) και γ. η μετα-γλωσσική συζήτηση κατά την οποία οι μαθητές και οι μαθήτριες συγκρίνουν διαφορετικούς τρόπους διατύπωσης του ίδιου προβλήματος ή μιας εξίσωσης, αναστοχαζόμενοι/ες τον ρόλο και τη λειτουργία της γλώσσας στη μαθηματική ερμηνεία. Σε κάθε περίπτωση παραμένει ως μαθησιακός στόχος η ανάπτυξη μεταγλωσσικής επίγνωσης και η συμμετοχή των μαθητών / τριών σε αυθεντικές περιστάσεις επικοινωνίας όπου κυριαρχεί ο μαθηματικός λόγος.

Αντίστοιχα, στο πλαίσιο της συστημικής λειτουργικής προσέγγισης που στοχεύει στην αναγνώριση και στην κατάκτηση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του μαθηματικού λόγου, διδακτικές δραστηριότητες όπως: η αποκωδικοποίηση των μαθηματικών προβλημάτων, η αναγνώριση των λογικών σχέσεων που αναδύονται μέσω της κατανόησης των λογικών συνδέσεων (*αν, όταν, όχι, όσο... τόσο, επομένως, ώστε κ.λπ.)*, η μελέτη μαθηματικών κειμένων, έτσι ώστε να προσδιοριστούν τα ιδιαίτερα γνωρίσματα του μαθηματικού λόγου (οι ονοματοποιήσεις, η ελλειπτικότητα, οι πολλαπλοί τρόποι με τους οποίους καταδεικνύεται η ίδια μαθηματική λειτουργία, κ.ά.) αποτελούν δραστηριότητες που ενισχύουν τον μαθηματικό γραμματισμό των παιδιών και αναπτύσσουν τις ακαδημαϊκές τους δεξιότητες.

Επίσης, η αξιοποίηση εννοιολογικών μεταφορών σύμφωνα με τη σχετική προσέγγιση μπορεί να νοηματοδοτήσει μαθηματικές έννοιες μέσω της γλώσσας η οποία παίζει καθοριστικό ρόλο, καθώς οι μεταφορές που εκφράζονται λεκτικά αποτελούν τα γλωσσικά εργαλεία με τα οποία οι μαθητές και οι μαθήτριες «γεφυρώνουν» το απτό με το αφηρημένο (π.χ. "η συνάρτηση αυξάνεται", "πλησιάζουμε το όριο"). Έτσι, η διδασκαλία μπορεί να εστιάσει στην ανάδειξη των μεταφορών που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της διδασκαλίας (π.χ. ο/ η εκπαιδευτικός επισημαίνει πώς εκφράσεις όπως "ανεβαίνει", "πλησιάζει", "απομακρύνεται" λειτουργούν μεταφορικά και βοηθούν στην κατανόηση μαθηματικών σχέσεων), σε δραστηριότητες μεταγλωσσικής συνειδητοποίησης, κατά την οποία οι μαθητές και οι μαθήτριες αναλύουν πώς η φυσική γλώσσα επηρεάζει τη σκέψη τους (π.χ. γιατί λέμε ότι μια συνάρτηση «έχει» μέγιστο, σαν να είναι αντικείμενο). Στην περίπτωση αυτή ο βασικός μαθησιακός στόχος είναι να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές και οι μαθήτριες πώς η φυσική γλώσσα διαμορφώνει τον τρόπο που «βλέπουν» τις μαθηματικές έννοιες, και να τη χρησιμοποιούν συνειδητά για εννοιολογική κατανόηση.

Τέλος, με βάση τις κοινωνιοπολιτισμικές θεωρίες, στις οποίες ένας βασικός στόχος είναι η ενίσχυση της επικοινωνιακής ικανότητας και της κοινωνικής διαπραγμάτευσης του νοήματος μέσω της φυσικής γλώσσας, ο διάλογος αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στην κατεύθυνση αυτή. Έτσι, στο πλαίσιο της Ζώνης Επικείμενης Ανάπτυξης (Zone of Proximal Development) (Vygotsky, 1986) οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν γλωσσική υποστήριξη (scaffolding), όπως ερωτήσεις, ανατροφοδότηση, παραφράσεις, επαναδιατυπώσεις για να οδηγήσουν σταδιακά τους μαθητές και τις μαθήτριες σε πιο προχωρημένες μορφές μαθηματικής έκφρασης. Εξίσου βοηθητική για την ανάπτυξη γνωστικών και γλωσσικών δεξιοτήτων είναι και η εργασία των μαθητών / τριών σε μικρές ομάδες, όπου εξηγούν, αναλύουν, επιχειρηματολογούν, προτείνουν ή διαφωνούν σχετικά με τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών ασκήσεων ή προβλημάτων.

Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, η φυσική γλώσσα δεν αποτελεί απλώς ένα ουδέτερο μέσο περιγραφής μαθηματικών εννοιών, αλλά λειτουργεί ως ενεργό εργαλείο κατασκευής και διαπραγμάτευσης μαθηματικών νοημάτων. Μέσα από τη γλώσσα, οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν αναπαριστούν απλώς τις μαθηματικές ιδέες, αλλά τις συγκροτούν, τις επεξεργάζονται και τις καθιστούν κατανοητές τόσο σε ατομικό όσο και σε συλλογικό επίπεδο. Ο τρόπος, λοιπόν, με τον οποίο χρησιμοποιείται η γλώσσα επηρεάζει άμεσα τη μαθηματική σκέψη· καθορίζει πώς οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται αφηρημένες έννοιες, όπως η μεταβλητότητα, η συνάρτηση ή η αναλογία και κατανοούν πώς αυτές οικοδομούν σχέσεις μεταξύ τους. Επομένως, όταν η γλώσσα αξιοποιείται συνειδητά στη διδασκαλία –μέσω της λεκτικής διατύπωσης συλλογισμών, της επιχειρηματολογίας, του διαλόγου και του αναστοχασμού– ενισχύει τη βαθύτερη μαθηματική κατανόηση και προάγει την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Με αυτόν τον τρόπο, η γλώσσα και τα Μαθηματικά δεν λειτουργούν ως δύο διακριτοί τομείς, αλλά ως αλληλένδετα συστήματα νοήματος που συνοδοιπορούν στη διαδικασία της μάθησης, εφόσον η γλώσσα προσφέρει το πλαίσιο μέσα στο οποίο οι μαθηματικές έννοιες αποκτούν νόημα, ενώ τα Μαθηματικά, με τη σειρά τους, διευρύνουν τις δυνατότητες της γλωσσικής έκφρασης και του λογικού συλλογισμού.

Βιβλιογραφία

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as Semiotic Resources in the Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97–109.

Bakhtin, M. M. (1981). *The Dialogic Imagination.* University of Texas Press.

Cummins, J. (2021). *Rethinking the education of multilingual learners: A critical analysis of theoretical concepts*. Multilingual Matters.

Dale, Th., & Cuevas, G., (1987). Integrating Language and Mathematics Learning. In J. Crandall, (Ed.), ESL through content area instruction: Mathematics, Science, Social studies. New Jersey: Englewood Cliffs.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as Social Semiotic.* London: Edward Arnold.

Halliday, M. A. K., & Hasan, R. (1976). Cohesion in English. English Language Series, London: Longman.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From.* London. Basic Books.

Lemke, J. L. (1990). *Talking Science: Language, Learning, and Values.* London: Ablex.

Morgan, C. (1998). *Writing Mathematically: The Discourse of Investigation.* London: Falmer Press.

Moschkovich, J. (2010). *Language and Mathematics Education: Multiple Perspectives and Directions for Research.* IAP.

Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically.* London: Routledge.

Radford, L. (2014). Towards an Embodied, Cultural, and Material Conception of Mathematics Cognition. *ZDM Mathematics Education*, 46(3), 349–361.

Schleppegrell, M. J. (2007). The Linguistic Challenges of Mathematics Teaching and Learning. *Reading & Writing Quarterly*, 23(2), 139–159.

Setati, M., & Adler, J. (2000). Between Languages and Discourses: Language Practices in Primary Multilingual Mathematics Classrooms in South Africa. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 243–269.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating.* Cambridge University Press.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language.* MIT Press.

Γεωργακόπουλος, Θ. (2011). *Γνωσιακή προσέγγιση της σημασιολογικής αλλαγής των προθέσεων της Ελληνικής: η περίπτωση της είς.* Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή. Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Φιλολογία, Τομέας Γλωσσολογίας. Αθήνα.

Ζάγκα, Ε. (2014). *Η διδασκαλία της γλώσσας με βάση το περιεχόμενο: Από τη θεωρία στην πράξη*. Θεσσαλονίκη. Βάνιας.

Μητσιάκη, Μ. & Συμεωνίδου, Ε. (2019). Συλλογιστική και απόδειξη στο ελληνικό σχολείο: Μια πρόταση συνδυαστικής προσέγγισης Μαθηματικών & Γλώσσας στο πλαίσιο της προσέγγισης CLIL. Περιοδικό *Φιλόλογος*, τ. 174-175, 116-135.

Σακονίδης, Χ. (1999). Μαθηματικά Σημεία και Σύμβολα: Σημειωτικές, ψυχολογικές και παιδαγωγικές αναζητήσεις. Στο Χ. Μιχαηλίδης (Επ.) *3ο Πανελλήνιο Συνέδριο, Διδακτική των Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση* (σελ. 455 – 461). Αθήνα: Έλλην.

Η γραμματική της γεωμετρίας.
Παρανοήσεις που (μας) διδάσκουν.

Γλώσσα, σύμβολα και μαθητική σκέψη στην τάξη της Γεωμετρίας

Καλφοπούλου Αικατερίνη

Μαθηματικός-Συγγραφέας, Εσπερινό Γυμνάσιο Αμπελοκήπων
kalfokat@gmail.com

Περίληψη

Η εισήγηση επικεντρώνεται σε παρανοήσεις που εμφανίζονται κατά την ανάγνωση και κατανόηση εκφωνήσεων μαθηματικών ασκήσεων, ιδιαίτερα στη Γεωμετρία. Με αυθεντικά παραδείγματα από τη σχολική τάξη εξετάζονται περιπτώσεις στις οποίες η γλώσσα λειτουργεί όχι μόνο ως εργαλείο, αλλά και ως «παγίδα», αποκαλύπτοντας την πολυπλοκότητα της μαθηματικής κατανόησης. Οι παρανοήσεις αναλύονται όχι ως απλά λάθη, αλλά ως **παραθυράκια προς τη μαθητική σκέψη**: δείχνουν πώς η συντακτική δομή, η σημασιολογική αμφισημία ή η καθημερινή εμπειρία των μαθητών επηρεάζει την ανάγνωση και την ερμηνεία του μαθηματικού λόγου. Παράλληλα, αναδεικνύεται ο ρόλος της **διδακτικής ευαισθησίας** και της **γλωσσικής συνειδητοποίησης** του εκπαιδευτικού, ώστε οι παρανοήσεις να μετατραπούν σε αφορμές επανεξέτασης, διαλόγου και μάθησης. Η παρουσίαση επιχειρεί να ανοίξει έναν παιδαγωγικό διάλογο για το πώς διαβάζουμε, πώς ακούμε και —τελικά— πώς σκεφτόμαστε τη γλώσσα των Μαθηματικών στην τάξη.

Λέξεις κλειδιά: Διδασκαλία Γεωμετρίας, Γλωσσικά εμπόδια, Ανάγνωση και ερμηνεία του λόγου στο μάθημα της Γεωμετρίας, Μεταγλωσσική Επίγνωση.

Εισαγωγή

Ο ρόλος της Γλώσσας στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Η σύγχρονη έρευνα αναγνωρίζει ότι οι παρανοήσεις στα Μαθηματικά δεν αποτελούν απλώς «λάθη», αλλά αντανακλούν τις βαθύτερες διεργασίες κατανόησης. Μελέτες δείχνουν ότι συχνά τα λάθη προκύπτουν από την αλληλεπίδραση της καθημερινής γλώσσας με τον μαθηματικό λόγο: λέξεις όπως «βάση», «ύψος», «απέναντι» κ.ά. κουβαλούν νοήματα από την καθημερινή εμπειρία, τα οποία συγκρούονται με τα τυπικά μαθηματικά νοήματα (Sfard, 2008· Planas & Pimm, 2023). Επιπλέον, η συντακτική δομή των εκφωνήσεων και η σημασιολογική αμφισημία οδηγούν σε εναλλακτικές ερμηνείες, ενώ έρευνες σε δίγλωσσα και πολυγλωσσικά περιβάλλοντα καταδεικνύουν ότι η γλώσσα διδασκαλίας επηρεάζει άμεσα τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές σχεδιάζουν και εκτελούν στρατηγικές επίλυσης (Ester, 2024).

Έτσι, οι παρανοήσεις λειτουργούν σαν «παράθυρα» στη μαθητική σκέψη, αποκαλύπτοντας όχι μόνο γνωστικά κενά, αλλά και τις γλωσσικές και πολιτισμικές διαδρομές μέσα από τις οποίες οι μαθητές προσεγγίζουν τα Μαθηματικά. Τα «παράθυρα» αυτά δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό, αρχικά, να εντοπίσει και να κατανοήσει τα αίτια των παρανοήσεων από την πλευρά των μαθητών/τριών και στη συνέχεια, ανοίγοντας τον κατάλληλο παιδαγωγικό διάλογο, να υπερπηδήσει τα γλωσσικά εμπόδια, αποδομώντας τις παγιωμένες αντιλήψεις για τη μονοσήμαντη ερμηνεία των λέξεων, όπως αυτή διαμορφώνεται μέσα από την καθημερινή τους εμπειρία.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών, επομένως, δεν μπορεί να θεωρηθεί αποκομμένη από τη γλωσσική της διάσταση. Όπως τονίζει ο Pimm (1987), «το να μιλάς μαθηματικά» σημαίνει να κατανοείς και να χρησιμοποιείς ένα ιδιαίτερο γλωσσικό ρεπερτόριο, με δικούς του κανόνες και συντακτικές συμβάσεις. Στο ίδιο πνεύμα, ο Halliday (1975) υποστήριξε ότι τα Μαθηματικά συγκροτούν ένα ξεχωριστό «register» της γλώσσας, με αποτέλεσμα η κατανόηση τους να απαιτεί εξοικείωση με τις ειδικές γλωσσικές τους συμβάσεις. Οι πιο πρόσφατες μελέτες (Planas & Pimm, 2023) αναδεικνύουν ότι η μαθηματική επικοινωνία είναι πολυτροπική, συνδυάζοντας τον λόγο με τα σχήματα, τις χειρονομίες και τα σύμβολα, γεγονός που καθιστά ακόμη πιο περίπλοκη την ανάγνωση και την ερμηνεία των εκφωνήσεων. Ιδιαίτερα δε στο μάθημα της Γεωμετρίας, όπου η πολυτροπικότητα των εκφωνήσεων και η πολυσημία των συμβόλων αφήνουν πολλά περιθώρια για παρερμηνείες και παρανοήσεις. Για τον/την εκπαιδευτικό, επομένως, τόσο η πρόκληση όσο και η ευκαιρία να καλλιεργήσει και να βελτιώσει τη μαθηματική επικοινωνία εντοπίζονται στο να αναγνωρίζει αυτές τις πολυπλοκότητες και να καλλιεργεί τη γλωσσική συνειδητοποίηση των μαθητών. Η αξιοποίηση των παρανοήσεων ως αφετηριών διαλόγου συμβάλλει στην ανάπτυξη μιας πιο ουσιαστικής μαθηματικής παιδείας, όπου η κατανόηση δεν προκύπτει μόνο από τον «σωστό» τύπο, αλλά και από την κριτική επεξεργασία της γλώσσας με την οποία αυτός εκφράζεται, δηλαδή από τη μεταγλωσσική επίγνωση.

Θεωρητικό πλαίσιο

Αν, όπως είδαμε στην εισαγωγή, η γλώσσα δεν αποτελεί απλώς το «μέσο» αλλά τον ίδιο τον χώρο μέσα στον οποίο νοηματοδοτούνται τα Μαθηματικά, τότε η προσοχή του/της εκπαιδευτικού θα πρέπει να στραφεί σε συγκεκριμένες πτυχές αυτής της σχέσης. Στη Γεωμετρία, ιδίως, η πολυτροπικότητα του μαθηματικού λόγου —η ταυτόχρονη χρήση εκφωνήσεων, σχημάτων, συμβόλων και χειρονομιών— δημιουργεί ένα ιδιαίτερα απαιτητικό πεδίο. Οι μαθητές καλούνται να μεταφράζουν συνεχώς από το ένα σημειωτικό σύστημα στο άλλο: από τη φυσική γλώσσα στο σχήμα, από το σύμβολο στη λεκτική εξήγηση, από τη λεκτική απόδοση στην τυπική μαθηματική διατύπωση.

Η διαδικασία αυτή αφήνει ανοιχτά πολλά «παράθυρα» για παρερμηνείες. Για παράδειγμα, η χρήση γραμμάτων άλλοτε ως ετικετών κορυφών (Α, Β, Γ), άλλοτε ως μεταβλητών (x, y) και άλλοτε ως μέτρων πλευρών (α, β, γ) παράγει ένα συνεχές πεδίο πολυσημιών, που απαιτεί υψηλή γλωσσική και συμβολική συνειδητοποίηση. Ακόμη και ο «καλός» μαθητής μπορεί να μπερδευτεί, όταν βλέπει το ίδιο γράμμα να αλλάζει λειτουργία μέσα σε μία άσκηση, ακριβώς επειδή δεν έχει κατακτηθεί η μετα-γλωσσική διάκριση: «σύμβολο ως *όνομα*» – «σύμβολο ως αριθμός, που εκφράζει *μέτρο*».

Παράλληλα, η ίδια η δομή της εκφώνησης παίζει καθοριστικό ρόλο. Η σειρά των προσδιορισμών, η παρουσία ή απουσία μιας γενικής («η μεσοκάθετος» χωρίς το «του τμήματος») ή η χρήση χωρικών όρων («απέναντι», «εσωτερικά», «εντός εκτός και επί τα αυτά») επηρεάζουν άμεσα την ερμηνεία. Οι μαθητές δεν λειτουργούν ως «ουδέτεροι δέκτες» που διαβάζουν τυπικά τον μαθηματικό λόγο· φέρνουν πάντα μαζί τους τις σημασίες της καθημερινής εμπειρίας, κι αυτές συγκρούονται με τις απαιτήσεις του τυπικού μαθηματικού register.

Εδώ αναδεικνύεται και η παιδαγωγική πρόκληση: να αξιοποιήσει ο εκπαιδευτικός τέτοιοι είδους «λάθη» όχι για να «διορθώσει» απλώς τον μαθητή, αλλά για να ανοίξει διάλογο γύρω από το πώς οι λέξεις και τα σύμβολα αποκτούν νόημα. Το γλωσσικό λάθος μπορεί να γίνει εργαλείο για να φωτιστεί η διαφορά ανάμεσα στην καθημερινή και την επιστημονική γλώσσα· να αναδειχθεί, δηλαδή, η ίδια η «γραμματική της Γεωμετρίας».

Το θεωρητικό πλαίσιο, επομένως, μας οδηγεί σε μια διπλή κατεύθυνση: αφενός στην αναγνώριση των παρανοήσεων ως αναπόσπαστου μέρους της μαθησιακής διαδικασίας, αφετέρου στην κατανόηση ότι οι παρανοήσεις έχουν γλωσσικές ρίζες που πρέπει να αναλυθούν μεθοδικά. Αυτό σημαίνει ότι ο εκπαιδευτικός χρειάζεται όχι μόνο μαθηματική, αλλά και γλωσσολογική και σημειωτική ευαισθησία, ώστε να μπορεί να «διαβάσει» πίσω από την παρανόηση το νοητικό μονοπάτι του μαθητή.

Ενδεικτικά «λάθη» στο μάθημα των Μαθηματικών μέσα από τη σχολική τάξη

Όλα αυτά αποκτούν υπόσταση στην πραγματικότητα της τάξης, όπου οι θεωρητικές επισημάνσεις μεταφράζονται σε αυθεντικές μαθητικές απαντήσεις. Στη συνέχεια παρουσιάζονται κάποια από τα πολλά χαρακτηριστικά παραδείγματα, όπου οι μαθητές παρερμηνεύουν εκφωνήσεις ασκήσεων. Τα παραδείγματα προέρχονται από προσωπικές μου καταγραφές και όλα υπάρχουν με πλήρη και αναλυτική παρουσίαση, όπως ακριβώς συνέβησαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος, στο βιβλίο μου «Ο Γιάννης που αγάπησα. Ιστορίες ανατροπής στην τάξη των μαθηματικών» (Εκδόσεις Τραυλός, 2017) ή στο ιστολόγιο μου «Μαθηματικά και Λογοτεχνία».

1ο Παράδειγμα «Όμικρον σημαίνει κύκλος»

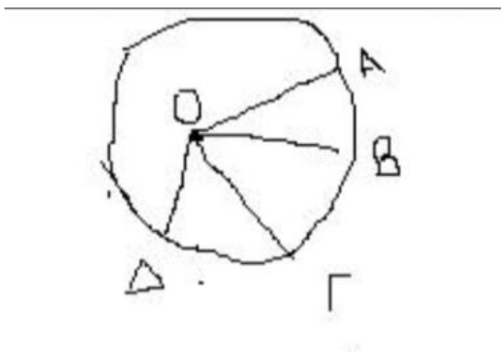
Σε τμήμα της Α’ Λυκείου ζητήθηκε να λυθεί, σε συνεργασία ανά θρανίο, η παρακάτω άσκηση του σχολικού βιβλίου:

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές. Αν Ox, Oy είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $A\hat{O}B$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $x\hat{O}y = \dfrac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}$.

Εικόνα 1: ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, τεύχος Α, Σελίδα 28

Το σχήμα δύο μαθητών ήταν το ακόλουθο:



Εικόνα 2: Σχήμα μαθητών

Όταν τους ζητήθηκε να εξηγήσουν αν είχαν σχεδιάσει κύκλο και γιατί, η απάντηση ήταν η εξής: «Επειδή υπάρχει Ο και Ο σημαίνει κύκλος».

Ο τρόπος που σκέφτηκαν οι δύο μαθητές καταδεικνύει ότι το γράμμα Ο λειτουργεί μονοσήμαντα στη σκέψη τους και είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με το κέντρο κύκλου. Ο συμβολισμός για τον κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ρ, (Ο, ρ), όπως συνήθως δίνεται στα σχολικά εγχειρίδια, έχει επισκιάσει την αυτόνομη λειτουργία του Ο, ως «ετικέτα», που δηλώνει το «όνομα», ενός σημείου, δηλαδή *ο μαθηματικός συμβολισμός επισκίασε τη φυσική γλώσσα.*

2ο Παράδειγμα «Αυτό το όμικρον με μπερδεύει…»

Σε τμήμα της Α’ Γυμνασίου, κατά τη διδασκαλία της παραγράφου Α.7.2. Απόλυτη τιμή ρητού, ζητήθηκε από μαθητή να διαβάσει και να συμπληρώσει την άσκηση:

«Αν η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ίση με 6 τότε ο αριθμός είναι ο…… ή ο……». Ο μαθητής διάβασε κανονικά ώσπου έφτασε στο «είναι…», όπου και σταμάτησε. Όταν τον παρακίνησα να συνεχίσει είπε: «Είναι … όμικρον. Αυτό το όμικρον με μπερδεύει».

Ο τρόπος που εξέλαβε το παιδί το άρθρο «ο» καταδεικνύει ότι ο μαθηματικός συμβολισμός υπερίσχυσε στη σκέψη του σε βάρος της λειτουργίας της γλώσσας. Εμποτισμένο με την πεποίθηση πως στο μάθημα των Μαθηματικών τα γράμματα αποκτούν διαφορετική σημασία από ότι στη Γλώσσα, αντιμετώπισε το άρθρο ως ένα μαθηματικό σύμβολο, στο οποίο δεν κατάφερε να αποδώσει νόημα, δηλαδή *ο μαθητής διάβασε το άρθρο «ο» ως σύμβολο, αποκαλύπτοντας έτσι τη δύναμη της «συνήθειας».*

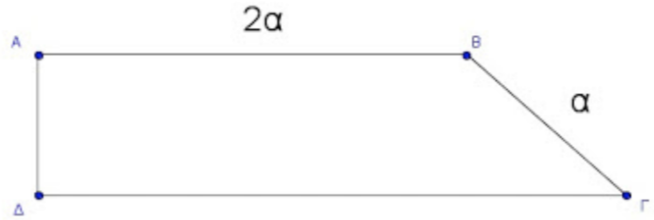
3ο Παράδειγμα «Τι σημαίνει “απέναντι”;»

Σε τμήμα της Α’ Λυκείου ζητήθηκε να λυθεί η ακόλουθη άσκηση του σχολικού εγχειριδίου:

3. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$ και $\hat{B} = 120°$. Αν ΑΒ = 2α και ΒΓ = α να υπολογίσετε τη διάμεσο ΕΖ, ως συνάρτηση του α.*

Εικόνα 3: ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, τεύχος Α, Σελίδα 120

Επειδή δυσκολεύτηκαν να κατανοήσουν την εκφώνηση και να κάνουν το σχήμα, το έκανα εγώ στην πίνακα, σημειώνοντας τα μέτρα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ, 2α και α, αντίστοιχα.



Εικόνα 4: Το σχήμα της προηγούμενης άσκησης

Η ένσταση ενός καλού μαθητή σχετικά με το ότι δεν σημείωσα «α» και στην πλευρά ΓΔ κατέδειξε για μια ακόμη φορά τη σύγχυση που διακατέχει τους μαθητές και τις μαθήτριες στον διπλό ρόλο των γραμμάτων. Ο μαθητής ισχυρίστηκε ότι επειδή η ΔΓ βρίσκεται «απέναντι» από την κορυφή Α, θα πρέπει κι αυτή να είναι α όπως η πλευρά ΒΓ. Το συγκεκριμένο «λάθος» αναδεικνύει μια διπλή παρανόηση. Αρχικά, ο συγκεκριμένος μαθητής, παρόλο που γενικά είχε πολύ καλές επιδόσεις, φαίνεται ότι συγχέει τη χρήση του γράμματος α ως μέτρου, με τη χρήση του ως ετικέτα θέσης.

Όταν ρωτήθηκε γιατί πιστεύει κάτι τέτοιο, απάντησε: «Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΓ, η πλευρά ΒΓ που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή Α συμβολίζεται με α, έτσι κι εδώ η πλευρά ΓΔ που είναι απέναντι από την κορυφή Α, θα πρέπει να συμβολίζεται με α.

Ο μαθητής, δηλαδή, «γενικεύοντας» θεώρησε ότι η πλευρά ΓΔ του τραπεζίου βρίσκεται «απέναντι» από την κορυφή Α κι άρα πρέπει να ονομαστεί κι αυτή α. Η ειδική λειτουργία της λέξης «απέναντι» στα Μαθηματικά, επισκιάστηκε από την καθημερινή εμπειρία, *δηλαδή η καθημερινή εμπειρία της λέξης 'απέναντι' επικράτησε του μαθηματικού ορισμού.*

4ο Παράδειγμα «Τα σαρδάμ του εκπαιδευτικού αποκαλύπτουν …»

Σε ένα τμήμα της Β' Γυμνασίου μια δύσκολη μέρα και μια ακόμη δυσκολότερη ώρα, αντί να ρωτήσω «Πόσες ευθείες διέρχονται από ένα σημείο;», ρώτησα «Πόσα σημεία διέρχονται από μία ευθεία;». Όλοι και όλες σήκωσαν το χέρι για να απαντήσουν. Τους έδωσα το λόγο, χωρίς να διορθώσω την ερώτηση που είχα υποβάλει. Οι απαντήσεις ήταν «ένα», «δύο», «πολλά», «άπειρα». Κατάλαβα ότι τα παιδιά φαντάστηκαν τα σημεία να κινούνται, να *τέμνουν* ευθείες, να αφήνουν ίχνη. Οι απαντήσεις τους στη δική μου εσφαλμένη ερώτηση αποκάλυψε ότι η έννοια «σημείο» δεν γίνεται αντιληπτή με τον ευκλείδειο ορισμό της, ως κάτι στατικό, το οποίο μάλιστα ορίζεται ως «Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν». Αντιθέτως, η έννοια του σημείου διαμεσολαβείται από εμπειρίες με λογισμικά, όπου τα σημεία κινούνται, που σημαίνει ότι *τα λογισμικά διαμόρφωσαν μια δυναμική εικόνα σημείου, διαφορετική από τον ευκλείδειο ορισμό.*

Σκέψεις-Προτάσεις-Συμπεράσματα

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω παραδείγματα οι παρανοήσεις στα Μαθηματικά, και ειδικά στη Γεωμετρία, οφείλονται κυρίως σε πέντε πηγές:

- στη σημασιολογική αμφισημία, π.χ. το «απέναντι»,
- στην πολυσημία των συμβόλων, γράμματα ως ετικέτες, αριθμοί, μεταβλητές κ.λπ.,
- στη συντακτική δομή των εκφωνήσεων,
- στην πολυτροπικότητα των κειμένων,
- στη χρήση της τεχνολογίας, που έρχεται να μετασχηματίσει τις μαθηματικές έννοιες και να τις αποδώσει ιδιότητες που στην Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν έχουν.

Οι αιτίες αυτές δεν λειτουργούν μεμονωμένα, αλλά αλληλοδιαπλέκονται, διαμορφώνοντας τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατανοούν τη γλώσσα των Μαθηματικών.

Ωστόσο, οι παρανοήσεις αυτές μπορούν να μετατραπούν σε αφορμές μάθησης, αν ο/η εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τους μαθητές και τις μαθήτριες να αναλύουν λεκτικά τη σκέψη τους και αν αναδιατυπώνει τις εκφωνήσεις με διαφορετικούς τρόπους, ωθώντας τους να ασκήσουν κριτική στον τρόπο που σκέφτηκαν. Επιπλέον, η αντιπαραβολή της καθημερινής χρήσης μιας λέξης με τη μαθηματική, δίνει τη δυνατότητα να αποσαφηνιστούν οι διαφορές των εννοιών και η ορθή λειτουργία τους στο κάθε πλαίσιο. Η αξιοποίηση των λαθών ως αφετηρία συζήτησης καλλιεργεί τη μεταγλωσσική επίγνωση, που είναι απαραίτητη για τη διάκριση μεταξύ συμβόλου ονόματος, συμβόλου θέσης κ.λπ.

Κατά συνέπεια, οι παρανοήσεις στη Γεωμετρία δεν είναι εμπόδια, αλλά καθρέφτες της μαθητικής σκέψης. Αναδεικνύουν τις δυσκολίες μετάβασης από την καθημερινή στη μαθηματική γλώσσα και προσφέρουν στον εκπαιδευτικό αφορμές για διάλογο. Η αξιοποίησή τους απαιτεί γλωσσική ευαισθησία, συνειδητή αναδιατύπωση και στοχευμένες διδακτικές παρεμβάσεις. Μέσα από τέτοιες πρακτικές, η «γραμματική της Γεωμετρίας» παύει να είναι κώδικας για λίγους και γίνεται κοινός τόπος κατανόησης, όπου μαθητές και δάσκαλοι συν-οικοδομούν το νόημα των Μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

Ester, P., Moraleda, Á., & Morales, I. (2024). Mathematics and Language: A One-to-One Correspondence in Bilingual Environments. *Education Sciences, 14*(3), 328. https://doi.org/10.3390/educsci14030328

Halliday, M. A. K. (1975). Some aspects of sociolinguistics. Στο E. Jacobsen (Επιμ.), *Interactions between Linguistics and Mathematical Education: Final Report of the Symposium sponsored by UNESCO, CEDO and ICMI*(Nairobi, Kenya, Sept. 1–11, 1974), σσ. 64–73. Paris: UNESCO.

Pimm, D. (1987/2017). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms.* Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315278858

Planas, N., & Pimm, D. (2024). Mathematics education research on language and on communication, including some distinctions: Where are we now? *ZDM–Mathematics Education, 56*, 127–139. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01520-8

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing.*Cambridge University Press.

Εὐκλείδης. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (T. L. Heath, Μετ., 2η έκδ.). Dover Publications. [Βιβλίο Ι, Ορισμοί: «Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.»]

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σίδερης, Π. (2016). *Ευκλείδεια Γεωμετρία. Τεύχος Α΄ (Α΄ Λυκείου) – Βιβλίο Μαθητή.* ΥΠΑΙΘ / Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής – ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. (2016). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου – Βιβλίο Μαθητή*. ΥΠΑΙΘ / ΙΕΠ – ΙΤΥΕ «Διόφαντος».

Καλφοπούλου, Α. (2017). *Ο Γιάννης που αγάπησα: Ιστορίες ανατροπής στην τάξη των Μαθηματικών.* Αθήνα: Τραυλός. ISBN: 978-618-5061-11-1.

Καλφοπούλου, Α. (χ.χ.). *Μαθηματικά + Λογοτεχνία* [ιστολόγιο]. Ανακτήθηκε από https://mathandliterature.blogspot.com/

Η Γλωσσική διάσταση στη Μαθηματική κατανόηση

Σωτήρης Μαρκάδας

Εκπαιδευτικός ΠΕ 70, Διευθυντής Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Κιλκίς
markadas.sotiris@gmail.com

Περίληψη

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση αναδεικνύει τον θεμελιώδη ρόλο της γλώσσας και της επικοινωνίας στη μαθησιακή διαδικασία. Οι μαθητές/τριες από την καθημερινή γλώσσα και τις απλές προφορικές εξηγήσεις εισέρχονται σε πιο ακαδημαϊκές μορφές λόγου και σε μαθηματικές πρακτικές που περιλαμβάνουν αιτιολόγηση, επιχειρηματολογία και χρήση συμβολισμών . Το εξειδικευμένο λεξιλόγιο και οι συμβολισμοί δημιουργούν δυσκολίες. Η συζήτηση στην τάξη και η ποιότητα των ερωτήσεων του/της εκπαιδευτικού αποτελούν βασικούς παράγοντες για την κατανόηση εννοιών όπως τα κλάσματα, η ισότητα, τα γεωμετρικά σχήματα, κ.ά. Η πολυτροπικότητα παίζει κρίσιμο ρόλο, καθώς οι μαθητές/τριες εκφράζονται όχι μόνο μέσω λέξεων αλλά και με χειρονομίες, αντικείμενα ή γραφικές αναπαραστάσεις, τα οποία λειτουργούν ως «γλωσσικά εργαλεία» που γεφυρώνουν το συγκεκριμένο με το αφηρημένο. Η επιτυχής μαθηματική μάθηση προϋποθέτει όχι μόνο την κατανόηση συμβόλων και πράξεων αλλά και την ένταξη των μαθητών σε πρακτικές λόγου που καλλιεργούν συνεργασία, ενεργό συμμετοχή και κριτική σκέψη. Έτσι, η γλώσσα δεν αποτελεί δευτερεύουσα διάσταση, αλλά τον κατεξοχήν μηχανισμό μέσω του οποίου οι μαθητές μαθαίνουν να «σκέφτονται μαθηματικά».

Λέξεις κλειδιά: διδασκαλία Μαθηματικών, Γλώσσα, πολυτροπικότητα, μαθηματικά σύμβολα

Εισαγωγή

Η διδασκαλία και η μάθηση των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση εδράζονται σε γλωσσικές πρακτικές: οι μαθητές/μαθήτριες χρειάζεται να κατανοούν όρους, να διαβάζουν εκφωνήσεις, να συντάσσουν εξηγήσεις, να συμμετέχουν σε συζητήσεις και να αιτιολογούν συλλογισμούς. Η γλώσσα εμπλέκεται στη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών πολύ περισσότερο από ό,τι γενικά γίνεται αντιληπτό. Δεν είναι απλώς «όχημα» μετάδοσης. Αποτελεί εργαλείο σκέψης που διαμεσολαβεί την εννοιολόγηση, τη μοντελοποίηση και την επίλυση προβλημάτων, άρα καθορίζει το πόσο προσβάσιμη γίνεται η μαθηματική γνώση για όλους/όλες. Όσο πιο προχωρημένες γίνονται οι μαθηματικές έννοιες, τόσο αυξάνεται και η εξάρτησή τους από ακριβή, ''ακαδημαϊκή'' χρήση της γλώσσας (Pimm, 1987· Moschkovich, 2010).

Η έννοια του μαθηματικού λόγου (register) και η αναγνώριση του ρόλου της γλώσσας στη μάθηση και τη διδασκαλία των Μαθηματικών θέτουν υπό αμφισβήτηση την διαδεδομένη πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι το λιγότερο γλωσσικά εξαρτώμενο μάθημα. Ερευνητικά ευρήματα δείχνουν ότι οι γλωσσικές απαιτήσεις επηρεάζουν την επίδοση σε μαθηματικά τεστ (Abedi & Lord, 2001). Ο Lager (2004) υποστηρίζει ότι «όσο πιο προχωρημένα είναι τα Μαθηματικά, τόσο πιο γλωσσικά εξαρτώμενα γίνονται», άρα η αποτελεσματική ενσωμάτωση της γλώσσας στη διδασκαλία είναι κρίσιμη.

Η κατανόηση μαθηματικών εννοιών προϋποθέτει πρόσβαση σε ειδικό λεξιλόγιο, σύνταξη και συμβολισμούς, καθώς και ενεργή συμμετοχή σε μαθηματικό λόγο (εξήγηση, τεκμηρίωση, επιχειρηματολογία, μεταστοχασμό). Η ρητή διδασκαλία όρων, η χρήση πολυτροπικών αναπαραστάσεων και ο στοχευμένος ανασχεδιασμός εκφωνήσεων/λεκτικών προβλημάτων μπορούν να ενισχύσουν την εννοιολογική κατανόηση και την ισότιμη συμμετοχή όλων των μαθητών/μαθητριών (Moschkovich, 2010· Pimm, 1987). Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών σε αυτές τις στρατηγικές είναι καίρια, ώστε η γλώσσα να μετατρέπεται από πιθανό εμπόδιο σε μοχλό μαθηματικής μάθησης.

Κοινωνικοπολιτισμική θεώρηση: η γλώσσα ως εργαλείο νόησης

Η κοινωνικοπολιτισμική θεώρηση της γλώσσας υπογραμμίζει τη σημασία της ως εργαλείο νόησης. Η γλώσσα λειτουργεί ως διαμεσολαβητικό εργαλείο της σκέψης: μέσα από τη λεκτική εκφορά των ιδεών (σκέψη-με-φωνή, εξηγήσεις, επιχειρηματολογία) οι μαθητές/μαθήτριες αναδιοργανώνουν τις αναπαραστάσεις τους και συνδιαμορφώνουν νόημα με τους/τις συμμαθητές/μαθήτριες και τον/την εκπαιδευτικό. Η Moschkovich (2010, 2015) προτείνει ένα ενοποιημένο σχήμα όπου μαθηματική επάρκεια, μαθηματικές πρακτικές και μαθηματικός λόγος συνυφαίνονται σε ένα πλαίσιο ακαδημαϊκού γραμματισμού στα Μαθηματικά, πέρα από την απλή απομνημόνευση όρων. Ζητούμενο είναι η επικοινωνία μαθηματικών ιδεών, η κατανόηση αφηγηματικών εκφωνήσεων και η ενεργή συμμετοχή σε μαθηματικές δραστηριότητες με γλωσσική και γνωστική επάρκεια (Moschkovich, 2010, 2015). Σύμφωνα με τον Vygotsky (1978), η γλώσσα αναπτύσσεται μέσα από κοινωνικές αλληλεπιδράσεις και λειτουργεί ως μέσο εξωτερικής και εσωτερικής σκέψης, ενισχύοντας τη γνωστική ανάπτυξη και τον μαθησιακό διάλογο.

Μαθηματικός λόγος (mathematical register)

Ο όρος *mathematical register* (ευρύτερα, ‘’μαθηματικός λόγος’’) αναφέρεται στο σύνολο γλωσσικών επιλογών - λεξιλογικών, γραμματικών, συντακτικών και υφολογικών - που χρησιμοποιούνται για να κατασκευαστεί μαθηματικό νόημα: ειδικό λεξιλόγιο (π.χ. παράγοντας-factor, πολλαπλάσιο-multiple, λόγος-ratio), συντακτικά μοτίβα (π.χ. υποθετικές δομές τύπου «εάν… τότε…»), συμβολισμοί και πολλαπλές αναπαραστάσεις (πίνακες, γραφήματα, διαγράμματα). Ο ‘’μαθηματικός λόγος'' διαφοροποιείται από την καθημερινή γλώσσα και συχνά λειτουργεί ως «αόρατο» εμπόδιο για τους/τις μικρότερους/ες μαθητές/μαθήτριες. Περιλαμβάνει σύμβολα και αναπαραστάσεις και είναι ενσωματωμένος στις διδακτικές πρακτικές. Γενικά χαρακτηριστικά του ''ακαδημαϊκού'' μαθηματικού λόγου είναι η ακρίβεια, η συντομία, η λογική συνοχή, καθώς και η αφαίρεση, η γενίκευση και η αναζήτηση βεβαιότητας (Forman, 1996· Moschkovich, 2003). Η καλλιέργεια τέτοιων γλωσσικών πρακτικών συνδέεται άμεσα με την εννοιολογική κατανόηση και την προσαρμοστική συλλογιστική όπως τεκμηριώνεται στο πλαίσιο των πέντε νημάτων μαθηματικής επάρκειας (Kilpatrick et al., 2001). Η γενίκευση αποτυπώνεται σε δηλώσεις όπως «το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°», «οι παράλληλες ευθείες δεν τέμνονται» ή «α+β (πάντα) ίσο με β+α». Αυτό που καθιστά έναν ισχυρισμό *μαθηματικό* είναι, μεταξύ άλλων, ο ρητός καθορισμός των προϋποθέσεων ισχύος και η συστηματική σύνδεση με αναπαραστάσεις (σύμβολα, γραφήματα, πίνακες, διαγράμματα) (Forman, 1996· Moschkovich, 2015).

Η Schleppegrell (2007) συνοψίζει τις γλωσσικές προκλήσεις της μαθηματικής διδασκαλίας και θεωρεί πώς η κατανόηση συνδέεται με λειτουργικές γλωσσολογικές επιλογές: πυκνές ονοματικές φράσεις, λογικές σχέσεις που υποδηλώνονται γλωσσικά, και πολυσημειωτικές αναπαραστάσεις (λόγος, σύμβολα, διαγράμματα). Βασική διδακτική πρόκληση είναι η υποστήριξη της μετάβασης από τους καθημερινούς, άτυπους τρόπους νοηματοδότησης προς ''τεχνικούς'' και ''ακαδημαϊκούς'' τρόπους που απαιτούνται για τη μάθηση στα Μαθηματικά (Schleppegrell, 2007). Δεν πρόκειται μόνο για εκμάθηση μεμονωμένων όρων. Ο ''μαθηματικός λόγος'' αφορά τη μαθηματική χρήση της φυσικής γλώσσας και τη συμμετοχή σε πρακτικές επιχειρηματολογίας και επεξήγησης. Οι Abedi και Lord (2001) έδειξαν ότι η γλωσσική μορφοποίηση των προβλημάτων επηρεάζει ουσιαστικά τις επιδόσεις στα Μαθηματικά, ιδιαίτερα σε μαθηματικά προβλήματα κειμένου. Διεξήγαγαν έρευνα που ανέλυσε την επίδραση της τροποποίησης των γλωσσικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών εργασιών. Προσπάθησαν να καταστήσουν τις έννοιες πιο προσιτές σε μαθητές που δυσκολεύονται συντομεύοντας τις εκφράσεις, κάνοντας τις σχέσεις υπό όρους πιο σαφείς, αλλάζοντας τις σύνθετες ερωτηματικές φράσεις σε απλές ερωτηματικές λέξεις και την παθητική φωνή σε ενεργητική. Αντικατέστησαν το λιγότερο οικείο λεξιλόγιο με πιο συνηθισμένους όρους. Οι περισσότεροι μαθητές είχαν καλύτερη απόδοση. Οι μαθητές με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά ωφελήθηκαν περισσότερο σε σχέση με εκείνους που είχαν υψηλότερες επιδόσεις στα μαθηματικά και την γλώσσα (Abedi & Lord, 2001). Η διατύπωση και η παρουσίαση των προβλημάτων στα Μαθηματικά επηρεάζει την κατανόηση και την επίλυση τους (Staub & Reusser, 1995).

Είναι επίσης σημαντικό να αναγνωριστεί ότι οι μαθητές/τριες πρέπει να μάθουν να αντιμετωπίζουν την πυκνή και τεχνική γλώσσα. Δημιουργούνται αγκυλώσεις στη μάθηση εάν οι μαθηματικές έννοιες δεν εισάγονται και δεν εξηγούνται σε προφορική γλώσσα που μετακινείται από την συνηθισμένη καθημερινή γλώσσα που οι μαθητές ήδη κατανοούν σε πιο ''τεχνική'' και ''ακαδημαϊκή'' γλώσσα που πρέπει να αναπτύξουν για την πλήρη κατανόηση των εννοιών. Οι μαθητές/μαθήτριες χρειάζεται να υποστηρίζονται ρητά στη μετάβαση από την καθημερινή στην ''τεχνική-ακαδημαϊκή'' γλώσσα των Μαθηματικών. Όταν ο διδακτικός λόγος παραμένει υπερβολικά άτυπος, ενδέχεται να περιορίζεται η πρόσβαση στη γνώση (Schleppegrell, 2007). Η Raiker (2002), για παράδειγμα, διαπίστωσε ότι οι μαθητές της δεύτερης έως της τετάρτης τάξης είχαν δυσκολία στη μάθηση εάν η σημασία μαθηματικών λέξεων, όπως η διαίρεση, δεν είχε προσδιοριστεί. Συνήγαγε επίσης ότι οι εκπαιδευτικοί συνήθως δεν επικεντρώνονταν στη γλώσσα ή δεν σχεδίαζαν τη διδασκαλία της γλώσσας που απαιτείται για την επεξήγηση μαθηματικών εννοιών. Η διδακτική πρακτική αναδεικνύει τη σημασία της ρητής διδασκαλίας του μαθηματικού λεξιλογίου (Raiker, 2002). Η O'Halloran (2003) συμπέρανε ότι οι εκπαιδευτικοί της εργατικής τάξης και οι μαθήτριες χρησιμοποιούσαν περισσότερη άτυπη και μη ''τεχνική'' γλώσσα στον προφορικό λόγο της τάξης, γεγονός που υποδηλώνει ότι υπάρχουν επιπτώσεις στην κοινωνική τάξη και το φύλο για την πρόσβαση στη γνώση, όταν οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν λιγότερο ''τεχνική'' γλώσσα.

Ο ρόλος της γλώσσας στη μαθηματική σκέψη μικρών μαθητών/τριών

<u>Από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα</u>

Στα λεκτικά προβλήματα, τα παιδιά χρειάζεται να «μεταφράσουν» αφηγήσεις της καθημερινότητας σε μαθηματικά μοντέλα: να χαρτογραφήσουν ορισμούς (π.χ. ισοδύναμα κλάσματα), σχέσεις (π.χ. τόσο-ανά), και δομές (π.χ. αναλογίες, συνθέσεις/αποσυνθέσεις). Η επιτυχία αυτής της μετάβασης εξαρτάται από την πρόσβαση σε κατάλληλο λεξιλόγιο και στις συντακτικές δομές που σημασιοδοτούν σχέσεις (συγκρίσεις, αιτιότητα, υπόθεση - συμπέρασμα). Καθώς μιλούν, γράφουν και επιχειρηματολογούν, τα παιδιά αναδιοργανώνουν την κατανόησή τους. Η γλώσσα λειτουργεί ως διαδικασία νοηματοδότησης και όχι απλώς ως «περιτύλιγμα» έτοιμων ιδεών.

<u>Μαθηματικό λεξιλόγιο και επίδοση</u>

Εμπειρικές μελέτες δείχνουν ότι το επίπεδο μαθηματικής γλώσσας - οι ειδικές λέξεις και φράσεις για ποσότητες, σχέσεις και πράξεις - προβλέπει την επίδοση στα Μαθηματικά πέρα από τη γενική γλωσσική ικανότητα (Purpura & Reid, 2016). Στους μικρούς μαθητές/τριες, η γνώση μαθηματικών λέξεων συνδέεται με ένα ευρύ φάσμα δεξιοτήτων (αρίθμηση, σύγκριση, αναγνώριση αριθμών). Ειδικότερα, έχει βρεθεί ότι η κατανόηση όρων όπως *περισσότερο, λιγότερο, συνολικά, διαφορά* σχετίζεται με συγκεκριμένες δεξιότητες αριθμητισμού (Turan & De Smedt, 2022) και η επίδραση της μαθηματικής γλώσσας είναι διακριτή από εκείνη του γενικού λεξιλογίου

(Hornburg, Schmitt, & Purpura, 2018). Επιπλέον, δεν πρόκειται μόνο για πρόσκαιρη υποστήριξη: η μαθηματική γλώσσα έχει διαχρονική συνάφεια με την εξέλιξη πρώιμων δεξιοτήτων αριθμητισμού (Hornburg, King, Westerberg, Schmitt, & Purpura, 2024).

Πολυτροπικός ''μαθηματικός λόγος''

Ο ''μαθηματικός λόγος'' στην πράξη είναι πολυτροπικός: συνδυάζει προφορικό και γραπτό λόγο, σύμβολα, σχήματα, διαγράμματα και χειρονομίες. Η διδασκαλία που αξιοποιεί πολλαπλές αναπαραστάσεις (λεκτικές, εικονικές, συμβολικές, χειριστικά αντικείμενα) λειτουργεί ως ''γέφυρα'' από την καθημερινή εμπειρία στο αφηρημένο, ενώ οι χειρονομίες και οι οπτικές αναπαραστάσεις υποστηρίζουν την εννοιολογική κατανόηση και την αναστοχαστική εξήγηση (Hornburg, 2018).

Διδακτικές προτάσεις (ενδεικτικά)

1. *Ρητή διδασκαλία μαθηματικής γλώσσας*: μικρά «λεξιλογικά μίνι-μαθήματα» για βασικούς όρους και συνδέσμους (π.χ. περισσότερο/λιγότερο, τόσα-όσα, συνολικά, διαφορά, κάθε, ανά) ενσωματωμένα σε δραστηριότητες με μαθησιακά συμφραζόμενα, όπως παιχνίδια σύγκρισης, δραστηριότητες ταξινόμησης, δραστηριότητες σειροθέτησης, μικρές ιστορίες που παρουσιάζουν προβλήματα (story problems) με οπτική υποστήριξη). (Purpura & Reid, 2016· Hornburg et al., 2024).

2. *Πλαισίωση προτάσεων* (sentence frames) για μαθηματικό επιχειρηματολογικό λόγο: «Υποθέτω ότι … γιατί …», «Σύγκρινα … με … και είδα ότι …», «επειδή», «άρα» κ.τ.λ. Διευκολύνει τη μεταφορά από την προφορική στην συμβολική αναπαράσταση

3. *Πολλαπλές αναπαραστάσεις*: ιστορία → εικόνα ή σχήμα → πίνακας τιμών → εξίσωση → λεκτική εξήγηση. Στόχος η ευχέρεια μεταπήδησης μεταξύ τρόπων αναπαράστασης (Hornburg et al., 2024).

4. *Στοχευμένη πρακτική σε λεκτικά προβλήματα* με προσοχή στη γλωσσική πολυπλοκότητα. Στόχος η διαβαθμισμένη δυσκολία, αποσαφήνιση αναφορών και προσδιορισμών, αποφυγή διφορούμενων εκφράσεων στα πρώτα στάδια. Συνδέεται με βελτίωση συγκεκριμένων δεξιοτήτων που ''κουμπώνουν'' με αντίστοιχους όρους (π.χ. ανάγνωση/ακολούθηση απλών αριθμητικών οδηγιών, εξοικείωση με τη «γραμμικότητα» της αριθμοσειράς μέσα από καρτέλες/ταινίες αριθμών). Τα παραπάνω δεν προτείνονται ως υποκατάστατο των μαθηματικών εμπειριών, αλλά ως επιταχυντές που εξομαλύνουν τη γλωσσική διεπιφάνεια των μαθηματικών δραστηριοτήτων (Hornburg, Schmitt, & Purpura, 2018).

5. *Αξιοποίηση χειρονομιών και εργαλείων οπτικοποίησης* (γραμμές αριθμών, μπάρες, σχήματα, εικονικά αντικείμενα) ώστε να «δέσει» λόγος – σώμα – σύμβολο. Η ρητή ονοματοδοσία των σχέσεων κατά την οπτικοποίηση ενισχύει την κατανόηση (Purpura & Reid, 2016).
6. *Διακριτή αξιολόγηση της μαθηματικής γλώσσας*: σύντομα άτυπα τεστ κατανόησης βασικών όρων και δομών (πέρα από την καθαυτή λύση ασκήσεων) για να εντοπίζονται γλωσσικά εμπόδια που μεταμφιέζονται ως «μαθηματικές δυσκολίες» (Hornburg et al., 2024).

Η γλώσσα των μαθηματικών στα σχολικά βιβλία των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου.

Οι Κεραμάρης και Μπαρμπαγιάννη (2011) διερεύνησαν τον μαθηματικό λόγο στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού, επιδιώκοντας να αποτιμήσουν πώς ο μαθηματικός λόγος των βιβλίων αυτών συμβάλλει ή δυσχεραίνει τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών. Αποδέχονται πως η μαθηματική γλώσσα διακρίνεται για την αφαιρετικότητα και την τυπικότητά της, στοιχεία που τη μετατρέπουν συχνά σε πηγή δυσκολιών για τους μαθητές/τριες του Δημοτικού, οι οποίοι δεν είναι ακόμη εξοικειωμένοι με τις συμβάσεις της. Υποστηρίζουν ότι η ειδική ορολογία, οι συμβολισμοί και η απόσταση από τη φυσική γλώσσα δημιουργούν εμπόδια στην κατανόηση.

Σύμφωνα με τη μελέτη, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με τη δισημία και πολυσημία πολλών όρων που χρησιμοποιούνται διαφορετικά στα Μαθηματικά και στην καθημερινή ζωή. Παραδείγματα όπως οι λέξεις *πίνακας*, *ύψος*, *διάμετρος* ή *περισσότερο* δείχνουν πώς η αλλαγή συμφραζομένων αλλάζει και τη σημασία (π.χ. ο όρος *περισσότερο* μπορεί να υποδηλώνει είτε πρόσθεση είτε αφαίρεση, ανάλογα με τα συμφραζόμενα). Αυτές οι διαφοροποιήσεις οδηγούν σε σύγχυση εννοιών και δημιουργία «προσωπικών ιδεών» που αποκλίνουν από τις επιστημονικές. Ένα ακόμη σημείο δυσκολίας προκύπτει από τη μεικτή χρήση γλωσσικών επιπέδων από τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι συνδυάζουν τεχνική και καθημερινή γλώσσα χωρίς σαφή όρια, γεγονός που θολώνει το μαθηματικό νόημα.

Οι συγγραφείς διακρίνουν τις μαθηματικές εκφράσεις σε δύο βασικές κατηγορίες:

- Ονόματα, που αναφέρονται σε μαθηματικά αντικείμενα (π.χ. «ισοσκελές τρίγωνο», «οι διαιρέτες του 24»).
- Αποφάνσεις, που δηλώνουν μαθηματικά γεγονότα ή σχέσεις (π.χ. «τα ισόπλευρα τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες»).

Παράλληλα, προτείνουν διάκριση δύο γλωσσικών επιπέδων:

- Το μαθηματικό επίπεδο, με αυστηρές εκφράσεις και συμβολισμούς.

- Το επιμαθηματικό επίπεδο, που περιλαμβάνει επεξηγηματικό λόγο και λεκτικές περιγραφές.

Η εναλλαγή μεταξύ αυτών των επιπέδων θεωρείται παιδαγωγικά αναγκαία, καθώς βοηθά τους μαθητές να μεταφράζουν τον αφηρημένο λόγο σε φυσική γλώσσα και να οικοδομούν έτσι βαθύτερη κατανόηση.

Η ανάλυση του βιβλίου της Ε΄ Δημοτικού δείχνει ότι ο μαθηματικός λόγος του είναι γενικά προσιτός, με σαφήνεια και περιορισμένο συμβολισμό. Οι έννοιες παρουσιάζονται εκλαϊκευμένα, ώστε να είναι κατανοητές. Ωστόσο, παρατηρούνται στοιχεία που ενδέχεται να αποπροσανατολίσουν τους μαθητές: οι δημιουργικοί τίτλοι συχνά απομακρύνουν από τη μαθηματική ουσία, ενώ οι εισαγωγικές ερωτήσεις, αν και κινητοποιούν τη σκέψη, μερικές φορές δημιουργούν ασαφείς προσδοκίες. Στις δραστηριότητες ανακάλυψης κυριαρχεί ο ενεστώτας χρόνος, που προσδίδει ζωντάνια, ενώ οι ερωτήσεις είναι ανοικτές και ενθαρρύνουν την αναζήτηση. Η προστακτική αποφεύγεται, προάγοντας συνεργατική στάση, και το πρώτο πληθυντικό πρόσωπο ενισχύει το ομαδικό πνεύμα. Οι ορισμοί είναι απλοί και κατανοητοί. Οι αποφάνσεις μετατρέπουν φυσικές περιγραφές σε τυπική μαθηματική μορφή, αναδεικνύοντας την παιδαγωγική αξία του συμβολισμού. Ωστόσο, η χρήση συμβόλων, αν και ενισχύει τη σκέψη, μπορεί να αποκλείσει μαθητές που δεν κατέχουν τη «γραμματική» της μαθηματικής γλώσσας.

Η ανάλυση του βιβλίου της ΣΤ΄ Δημοτικού αποκαλύπτει παρόμοια χαρακτηριστικά αλλά και νέες παρατηρήσεις. Οι τίτλοι των κεφαλαίων εντάσσουν συχνά μαθηματικούς όρους σε καθημερινά συμφραζόμενα (π.χ. «Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί – είμαστε και οι πρώτοι!»), γεγονός που μειώνει τη μαθηματική ακρίβεια. Παρ΄ όλα αυτά, μπορούν να λειτουργήσουν ως αφόρμηση προβληματισμού όταν συνδέονται με το περιεχόμενο του μαθήματος. Οι στόχοι κάθε ενότητας διατυπώνονται με προοδευτικά πιο μαθηματικοποιημένη γλώσσα, διευκολύνοντας τη μετάβαση του μαθητή από το καθημερινό στο επιστημονικό λεξιλόγιο. Η γλωσσική εξέλιξη κάθε κεφαλαίου περνά από τρία στάδια:

1. Επιμαθηματικό επίπεδο (περιγραφή, ερωτήσεις, παραδείγματα),
2. Μεταβατικό στάδιο (επεξηγήσεις και μεθοδολογικές οδηγίες),
3. Μαθηματικό επίπεδο (ορισμοί και πορίσματα με αυστηρή δομή).

Ωστόσο, εντοπίζονται και ασυνέπειες, όπως στον ορισμό του κύκλου και του κυκλικού δίσκου, όπου η διαφοροποίηση από τον ευκλείδειο ορισμό ίσως να δημιουργεί σύγχυση.

Στα συμπεράσματα, οι Κεραμάρης και Μπαρμπαγιάννη (2011), επισημαίνουν ότι η γλώσσα παίζει καθοριστικό ρόλο στη μαθηματική κατανόηση: η μάθηση των Μαθηματικών είναι κατεξοχήν γλωσσική διαδικασία. Η διδασκαλία των

Μαθηματικών δεν μπορεί να απομονωθεί από τη γλωσσική διδασκαλία. Ο μαθηματικός λόγος πρέπει να αναπτύσσεται παράλληλα με τη γλώσσα των μαθητών, ώστε να γεφυρώνει την καθημερινή με την επιστημονική χρήση. Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να προσαρμόζουν τον λόγο τους, να εξηγούν τους όρους και τους συμβολισμούς με απλότητα και σαφήνεια και να ενθαρρύνουν τη συμμετοχή μέσω διαλόγου και συνεργασίας.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών θεωρείται γλωσσική σύνθεση, όπου περιεχόμενο και έκφραση συνυφαίνονται. Η επιτυχία της εξαρτάται και από εξωγενείς παράγοντες: το κοινωνικό πλαίσιο, το επίπεδο των μαθητών και τη μεθοδολογία του εκπαιδευτικού. Οι συγγραφείς προτείνουν νέες προσεγγίσεις που να αναγνωρίζουν τη σημασία της γλώσσας: ανάπτυξη διαλόγου ως εργαλείου σκέψης και ενθάρρυνση της κριτικής συμμετοχής. Τονίζουν ότι η γλώσσα αποτελεί εργαλείο ανάλυσης και σύνθεσης της εμπειρίας, αφού διαμεσολαβεί στη συγκρότηση της συνείδησης και στην ανάπτυξη γνωστικών λειτουργιών. Μέσω της γλώσσας, οι μαθητές ταξινομούν τις εμπειρίες τους και μετασχηματίζουν τις εντυπώσεις σε εννοιολογικά σχήματα.

Η εργασία των Κεραμάρη και Μπαρμπαγιάννη (2011), αναδεικνύει ότι η γλωσσική διάσταση της διδασκαλίας είναι εξίσου σημαντική με το γνωστικό περιεχόμενο. Υποστηρίζουν πως η παιδαγωγική επιτυχία στα Μαθηματικά εξαρτάται από τη σαφήνεια των ορισμών, τη συνέπεια των όρων, την ενεργοποίηση του μαθητή μέσω ερωτήσεων και διαλόγου και τη σταδιακή μετάβαση από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα.

Τυπικές γλωσσικές δυσκολίες στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση

<u>Πολυσημία και δισημία όρων</u>

Πολλές λέξεις έχουν διαφορετικές σημασίες στην καθημερινή/σχολική χρήση και στη μαθηματική χρήση και αυτό δημιουργεί παρανοήσεις:

- Λόγος — (Μαθ.) αριθμητικό πηλίκο δύο μεγεθών· (Καθημ.) ομιλία/αιτία. Μαθ.: «ο λόγος 8:4=2» Καθ.: «ο λόγος του ομιλητή ήταν πειστικός».
- Αναλογία — (Μαθ.) ισότητα δύο λόγων· (Καθημ.) αντιστοιχία/συσχέτιση. Μαθ.: «α/β=γ/δ» · Καθ.: «υπάρχει αναλογία κόστους–οφέλους».
- Μεταβλητή — (Μαθ.) μέγεθος που παίρνει τιμές· (Καθημ.) κάτι ασταθές. Μαθ.: «x, ψ» · Καθ.: «πολλές μεταβλητές επηρεάζουν την απόφαση».
- Όρος — (Μαθ.) προσθετέος σε παράσταση· (Καθημ.) προϋπόθεση/όρος συμφωνίας. Μαθ.: «ο τρίτος όρος της ακολουθίας» · Καθ.: «όροι συμβολαίου».
- Παράγοντας — (Μαθ.) συντελεστής/παράγοντας γινομένου· (Καθημ.) σημαντικός συντελεστής σε έκβαση. Μαθ.: «ανάλυση σε παράγοντες» · Καθ.: «παράγοντας κινδύνου».

- Εξίσωση — (Μαθ.) ισότητα με άγνωστους· (Καθημ.) ταύτιση/εξομοίωση. Μαθ.: «λύνω την εξίσωση» Καθ.: «η εξίσωση των δύο προτάσεων είναι λανθασμένη».
- Απόδειξη — (Μαθ.) λογική τεκμηρίωση· (Καθημ.) απόδειξη αγοράς/απόδειξη γεγονότος. Μαθ.: «απόδειξη θεωρήματος» · Καθ.: «ζήτησε την απόδειξη».
- Γωνία — (Μαθ.) σχήμα δύο ημιευθειών· (Καθημ.) γωνιά/σημείο χώρου. Μαθ.: «ορθή γωνία» Καθ.: «κάθισε στη γωνία».
- Πλευρά — (Μαθ.) ευθύ τμήμα πολυγώνου· (Καθημ.) πλευρά σώματος/αντικειμένου.
- Ακτίνα — (Μαθ.) απόσταση κέντρου–σημείου κύκλου· (Καθημ.) δέσμη/ακτίνα φωτός ή δράσης.
- Κύκλος — (Μαθ.) καμπύλη ίσης απόστασης από κέντρο· (Καθημ.) κύκλος γνωριμιών/σειρά εκδηλώσεων.
- Τετράγωνο — (Μαθ.) κανονικό τετράπλευρο· (Καθημ.) πλατεία/αστικό τετράγωνο.
- Κύβος — (Μαθ.) κανονικό στερεό· (Καθημ.) παγάκι/ζάρι («κύβος ζαριού»).
- Παράλληλες — (Μαθ.) ευθείες χωρίς κοινό σημείο· (Καθημ.) παράλληλη πορεία/πλαίσιο.
- Όμοιος — (Μαθ.) σχήματα ίδιας μορφής με αναλογία· (Καθημ.) παρόμοιος.
- Σύνολο — (Μαθ.) συλλογή στοιχείων· (Καθημ.) ολότητα ή μουσικό σύνολο.
- Μέσος — (Μαθ.) αριθμητικός μέσος· (Καθημ.) κοινός άνθρωπος («ο μέσος πολίτης»).
- Δείκτης — (Μαθ.) εκθέτης· (Καθημ.) δείκτης απόδοσης/δάχτυλο που δείχνει.
- Δείγμα — (Μαθ.) υποσύνολο πληθυσμού· (Καθημ.) δοκιμαστικό/δείγμα προϊόντος.
- Βάρος — (Μαθ./Φυσ.) μέγεθος (δύναμη βαρύτητας)· (Καθημ.) σπουδαιότητα/βάρος αντικειμένου.
- Μέτρο — (Μαθ.) μέγεθος/μετρικός χώρος· (Καθημ.) μέτρο/περιορισμός («με μέτρο»).
- Κλίμακα — (Μαθ.) βαθμονόμηση/κλίμακα γραφήματος· (Καθημ.) μουσική κλίμακα/κλίμακα οικοδομής.
- Ρίζα — (Μαθ.) τετραγωνική/ν-οστή ρίζα· (Καθημ.) ρίζα φυτού/ρίζα προβλήματος.
- Τετραγωνίζω — (Μαθ.) υψώνω στο τετράγωνο· (Καθημ.) «τετραγωνίζω» κάτι = επιχειρώ κάτι αδύνατο ή εξαιρετικά δύσκολο

Η σύγχυση ενισχύεται όταν οι εκφωνήσεις είναι γλωσσικά «πυκνές» και οι μαθητές χρειάζεται να κάνουν λεπτές σημασιολογικές διακρίσεις για να μοντελοποιήσουν σωστά. Η διεθνής βιβλιογραφία έχει αναδείξει ότι η «απόσταση» του ‘’μαθηματικού λόγου’’ από την καθημερινή γλώσσα είναι συστατική πηγή δυσκολίας: οι λέξεις ενεργοποιούν μη-μαθηματικές σημασίες, με αποτέλεσμα λάθη στην ερμηνεία των σχέσεων (π.χ. *τουλάχιστον/το πολύ*, *ανά*, *συνολικά*). Η μείωση τέτοιων αμφισημιών και η αποσαφήνιση του λεξιλογίου βελτιώνουν μετρήσιμα την επίδοση σε λεκτικά προβλήματα, ιδίως για μαθητές που δυσκολεύονται γλωσσικά (Abedi & Lord, 2001˙ Martiniello, 2009).

Συντακτική πολυπλοκότητα και επεξεργαστικό φορτίο

Πέρα από το λεξιλόγιο, η συντακτική πολυπλοκότητα (παθητική φωνή, ονοματοποιήσεις, εμπρόθετοι και δευτερεύουσες αναφορικές προτάσεις, συμπλεκτικά/αντιθετικά μόρια) αυξάνει το γνωστικό φορτίο και σχετίζεται με σφάλματα κατανόησης. Προκαλούν δυσκολίες:

- γλωσσικές δομές μέσα σε άλλες, ‘’φωλιασμένες’’ (*«ο αριθμός που είναι κατά 3 μεγαλύτερος από εκείνον που…»*),
- ασαφείς αναφορές (*«εκείνος», «αυτό»*, χωρίς σαφές προηγούμενο),
- συγκριτικές φράσεις (*«τουλάχιστον», «το πολύ», «κατά»*),
- «συμπιεσμένος» ονοματικός λόγος (*«το άθροισμα των διπλάσιων των…»*).

Πειραματικές μελέτες δείχνουν ότι η απλοποίηση συντακτικών δομών σε ισοδύναμα μαθηματικά ερωτήματα οδηγεί σε υψηλότερες επιδόσεις, χωρίς να εξαλείφεται η μαθηματική δυσκολία, δηλαδή απομακρύνει το γλωσσικά άσχετο εμπόδιο και αποκαθιστά την εγκυρότητα της μέτρησης της μαθηματικής ικανότητας (Abedi & Lord, 2001). Αντίστοιχα, η αυξημένη μη-μαθηματική γλωσσική πολυπλοκότητα (π.χ. πολυσύνθετες προτάσεις, μεταφορικός λόγος) συνδέεται με δυσκολίες σε λεκτικά προβλήματα, ιδίως σε τεστ δημοτικού (Martiniello, 2009).

Συνοχή και πραγματολογικές «παγίδες»

Δυσκολίες προκύπτουν και από τη συνοχή του κειμένου: ελλειπτικά υπονοούμενα, αλλαγές αναφορικού πλαισίου (ποιο *«αυτό»;*), εναλλαγές χρόνων ή προσώπων και απουσία σαφών δεικτών αιτιότητας/υπόθεσης (*«εφόσον», «άρα», «αν… τότε…»*). Η πραγματολογική ερμηνεία (τι «μετράμε», τι «ζητείται») μπορεί να παραβιαστεί όταν καθημερινές προσδοκίες παρεμβαίνουν στις τυπικές μαθηματικές σχέσεις (π.χ. «*όσο πιο ψηλό τόσο καλύτερο*»). Η ρητή σήμανση των σχέσεων (αιτιότητα, υπόθεση–συμπέρασμα, σύγκριση, αναλογία) και η οπτικοποίηση (π.χ. μπάρες, πίνακες τιμών) μειώνουν τα λάθη κατανόησης, επιτρέποντας στους μαθητές να εστιάσουν στην εννοιολογική δομή αντί στη γλωσσική αποκωδικοποίηση.

Ενδεικτικές παιδαγωγικές κινήσεις

- Ρητή διδασκαλία πολυσημικών όρων με παραδείγματα καθημερινής και μαθηματικής χρήσης.
- Αναδιατύπωση εκφωνήσεων: σπάσιμο μακρών προτάσεων, αντικατάσταση παθητικής φωνής με ενεργητική.
- Στοχευμένος έλεγχος κατανόησης: μικρά άτυπα «τεστ λεξιλογίου»

Γλωσσικές τροποποιήσεις σε αξιολογήσεις

Όταν επιδιώκεται να μετρηθεί η μαθηματική κατανόηση, φροντίζουμε οι εκφωνήσεις να μην θέτουν περιττά γλωσσικά εμπόδια και να είναι συμβατές για μαθητές/τριες με αυξημένες γλωσσικές ανάγκες (Abedi & Lord, 2001).

Παιδαγωγικές προσεγγίσεις και διδακτικές στρατηγικές

Διδασκαλία λεξιλογίου με σαφήνεια

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2007), ένας αποτελεσματικός τρόπος ενίσχυσης του μαθηματικού λεξιλογίου είναι ο τοίχος λέξεων. Κάθε φορά που εμφανίζεται μια λέξη-κλειδί για τη μάθηση, οι μαθητές/τριες την προσθέτουν στον τοίχο. Για κάθε νέα λέξη μπορούν να ετοιμάζουν κάρτες που περιλαμβάνουν:

- τη λέξη στα ελληνικά (και, αν χρειάζεται, στα αγγλικά)
- μεταφράσεις στις γλώσσες που μιλούνται στην τάξη
- μια εικόνα/σκίτσο
- μια δική τους περιγραφή (όχι τον τυπικό, εγκυκλοπαιδικό ορισμό)

Πέρα από τον τοίχο λέξεων, υπάρχουν και άλλοι τρόποι συστηματικής καλλιέργειας λεξιλογίου:

- Χάρτες εννοιών: οι μαθητές/τριες συνδέουν όρους και ιδέες, π.χ. τις σχέσεις ανάμεσα σε κλάσματα–δεκαδικούς–ποσοστά.
- Προσωπικά λεξικά μαθηματικών: για κάθε λέξη καταγράφουν τη λέξη, μια σύντομη περιγραφή με δικά τους λόγια και μια εικόνα/παράδειγμα.
- Στοχευμένες υπενθυμίσεις: όταν χρησιμοποιείται ένας όρος που έχει ήδη διδαχθεί, ο/η εκπαιδευτικός κάνει σύντομη παύση και ελέγχει ότι όλοι/ες τον ανακαλούν σωστά.
- Ανάλυση λέξεων: με την εισαγωγή νέων όρων, αναφέρεται η ετυμολογία τους, καθώς και συγγενικοί όροι.
- Δισημία/πολυσημία: επισημαίνονται λέξεις που έχουν διαφορετική σημασία στα μαθηματικά σε σχέση με την καθημερινή γλώσσα, ώστε να αποφεύγονται παρανοήσεις. Ενδεικτικές λέξεις με δύο σημασίες (καθημερινή ↔ μαθηματική): προϊόν, μέσο, άθροισμα, παράγοντας, οξεία, πόδι, διαίρεση, διαφορά, γωνία.

Με αυτές τις πρακτικές, οι μαθητές/τριες δεν αποστηθίζουν απλώς ορισμούς, αλλά νοηματοδοτούν τους όρους, τους χρησιμοποιούν σε ποικίλα συμφραζόμενα και τους συνδέουν με αναπαραστάσεις (κείμενο, σχήματα, παραδείγματα), ενισχύοντας έτσι την ακρίβεια και τη ρευστότητα του μαθηματικού λόγου τους.

Ρητή διδασκαλία μαθηματικού λεξιλογίου

Η ρητή διδασκαλία μαθηματικού λεξιλογίου οργανώνεται σε σύντομους επαναλαμβανόμενους κύκλους: (α) σαφής εισαγωγή/ορισμός με παράδειγμα–αντιπαράδειγμα, (β) καλλιέργεια νοήματος σε πολλαπλά συμφραζόμενα (λεκτικό πρόβλημα, πίνακας τιμών, σχήμα/διάγραμμα), (γ) ενεργητική χρήση από τους/τις μαθητές/τριες σε προφορικό και γραπτό λόγο (π.χ. sentence frames: «Η διαφορά είναι… γιατί…»), (δ) επαναφορά/σύνδεση με προϋπάρχουσες έννοιες για να δημιουργούνται διασυνδέσεις στο εννοιολογικό δίκτυο.

Η γλωσσική διδασκαλία «δένει» ρητά λέξεις-δείκτες με δομές νοήματος (π.χ. «διαφορά → αφαίρεση/σύγκριση», «αναλογία → σταθερός λόγος δύο μεγεθών») ώστε οι μαθητές να χαρτογραφούν τις σχέσεις όταν μεταφράζουν από κείμενο σε μοντέλο. Η προσέγγιση αυτή βρίσκεται σε σύμπνοια με τη στόχευση επάρκειας μαθηματικού γραμματισμού που αντιμετωπίζει τη γλώσσα, τις πρακτικές και την εννοιολογική κατανόηση ως αλληλένδετες διαστάσεις της μάθησης (Moschkovich, 2015).

«Γλωσσικές κινήσεις» (talk moves)

Είναι στοχευμένες παρεμβάσεις του/της εκπαιδευτικού στον προφορικό λόγο που βοηθούν τους/τις μαθητές/μαθήτριες να σκεφτούν δυνατά, να εξηγήσουν, να αιτιολογήσουν και να συνδέσουν ιδέες στα Μαθηματικά. Ο/η εκπαιδευτικός θέτει σαφείς στόχους και επιλέγει τον «τύπο» συζήτησης ώστε οι κινήσεις λόγου να υπηρετούν μια συγκεκριμένη μαθηματική πορεία (Kazemi & Hintz, 2014). Ο τρόπος διατύπωσης/διαχείρισης του λόγου επηρεάζει ουσιαστικά την κατανόηση και την επίδοση (White, 2003). Οι «γλωσσικές κινήσεις» δεν είναι «έξτρα» δραστηριότητες, είναι τρόποι διαχείρισης της συζήτησης ώστε η μαθηματική σκέψη να γίνει ορατή.

Τις χρησιμοποιούμε για:

- ενίσχυση κατανόησης εννοιών και διαδικασιών
- καλλιέργεια μαθηματικού λόγου (λεξιλόγιο, δομές αιτιολόγησης)
- ισότιμη συμμετοχή περισσότερων παιδιών (όχι μόνο «οι συνήθεις»)
- διαμορφωτική αξιολόγηση «σε πραγματικό χρόνο» (τι κατάλαβαν, πού δυσκολεύονται). Η ανατροφοδότηση προς τους/τις εκπαιδευτικούς μπορεί να βελτιώσει την ποιότητα των συζητήσεων στην τάξη, ενισχύοντας τη συχνότητα και την ποιότητα τέτοιων «κινήσεων λόγου» (Jacobs et al., 2022).

Κύριες κατηγορίες «κινήσεων» με παραδείγματα:

- Αναδιατύπωση: «Ακούω να λες ότι 2:3 και 4:6 είναι ο ίδιος λόγος επειδή διπλασιάσαμε και τα δύο μέρη. Το είπα σωστά;»

- Επανάληψη/Αναπαραγωγή: «Ποιος/ποια μπορεί να το πει ξανά με δικά του/της λόγια;»
- Σύνδεση ιδεών: «Πώς συνδέεται αυτό που είπε η Μαρία με την ιδέα του Νίκου;»
- Ακρίβεια & σαφήνεια: «Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον όρο "πολλαπλάσιο"/"παράγοντας" πιο συγκεκριμένα;»
- Αιτιολόγηση: «Γιατί δουλεύει αυτή η στρατηγική; Πώς το ξέρεις;»
- Συμφωνώ/Διαφωνώ με τεκμηρίωση: «Συμφωνείς ή διαφωνείς; Ποια είναι η εξήγησή σου;»
- Πρόσκληση αντιπαραδειγμάτων: «Υπάρχει περίπτωση που *δεν* ισχύει; Μπορούμε να βρούμε αντιπαράδειγμα;»
- Αλλαγή αναπαράστασης: «Δείξ' το με πίνακα τιμών/διάγραμμα/σχήμα και εξήγησε με λόγια τι βλέπεις.»
- Χρόνος αναμονής: παύση 5–10″ ώστε να σκεφτούν περισσότεροι/ες
- Συζήτηση ανά ζεύγη: «Συζητήστε για 1′ με τον/την διπλανό/ή γιατί τα 3:5 και 6:10 είναι ισοδύναμα. Μετά μοιραζόμαστε.»
- Επέκταση: «Ποιος/ποια μπορεί να προσθέσει κάτι στη σκέψη του Γιώργου;»

Μικρές πρακτικές οδηγίες

- Προετοιμάζω ερωτήσεις-πλαίσια: κάρτες/φράσεις τύπου «Είναι ισοδύναμο επειδή…», «Για κάθε … αντιστοιχούν …».
- Ορατότητα ιδεών: καταγράφω στον πίνακα σύντομα τις διαφορετικές στρατηγικές, ή αναπαραστάσεις.
- Κατανομή λόγου: αλλάζω συχνά ποιον/ποια ρωτώ, ζητώ «ποιος μπορεί να το πει αλλιώς;».
- Κλείσιμο συζήτησης: συνοψίζω τι μάθαμε («Σήμερα είδαμε τρεις τρόπους να δείξουμε ισοδυναμία λόγων…»).

Μίνι παράδειγμα 3′ (αναλογίες)

1. Ερώτημα: «Είναι ισοδύναμα τα 2:3 και 4:6; Γιατί;»
2. Συζήτηση ανά ζεύγη 1′.
3. Αναδιατύπωση + αιτιολόγηση: «Η Ελένη λέει ότι διπλασιάσαμε και τα δύο μέρη. Ποιος μπορεί να το δείξει σε πίνακα τιμών;»
4. Σύνδεση ιδεών: «Πώς σχετίζεται ο πίνακας με το διάγραμμα 10×10;»

5. Σύνοψη: «Ο λόγος μένει σταθερός όταν πολλαπλασιάζουμε/διαιρούμε και τα δύο μέρη με τον ίδιο αριθμό.»

Πολυτροπικές αναπαραστάσεις

Η συστηματική χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων (λεκτική, συμβολική, γραφική, εικονική, χειρονομιακή, φυσικά αντικείμενα) υποστηρίζει τη μετάβαση από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και καλλιεργεί αναπαραστατική επίγνωση: «πώς αλλάζει το νόημα όταν αλλάζει η αναπαράσταση;». Κρίσιμη εδώ είναι η ικανότητα μετατροπής μεταξύ διαφορετικών σημειωτικών καταχωρίσεων (π.χ. από περιγραφή → σχήμα → εξίσωση), η οποία αποτελεί συχνό σημείο αστοχίας κατανόησης (Duval, 2006). Για μαθητές/τριες με γλωσσικά εμπόδια, οι οπτικοχωρικές μορφές και οι χειρονομίες λειτουργούν ως γέφυρες νοήματος που συμπληρώνουν τον γραπτό/προφορικό λόγο.

Ανασχεδιασμός προβλημάτων λόγου

Η γλωσσική φόρτιση των εκφωνήσεων μπορεί να διαφοροποιηθεί ανεξάρτητα από τη μαθηματική δυσκολία (Planas & Pimm, 2023). Κρατάμε σταθερό το περιεχόμενο και μπορεί να απλουστευτεί ή να πυκνωθεί η διατύπωση. Χρήσιμες τεχνικές:

- Παραδείγματα με επισήμανση λέξεων-δεικτών (π.χ. *τουλάχιστον, το πολύ, ανά*),
- Επαναγραφή προβλημάτων από τους/τις μαθητές/τριες (αλλαγή ύφους χωρίς αλλαγή μαθηματικής δομής),
- Αντιστροφή ρόλων: οι μαθητές συντάσσουν εκφώνηση για δοσμένη άσκηση/διάγραμμα,
- Κλιμακωτή απλούστευση κειμένου για συγκριτική επίλυση του ίδιου προβλήματος.

Επιμόρφωση εκπαιδευτικών

Η εκπαίδευση για τη διδασκαλία Μαθηματικών οφείλει να περιλαμβάνει αναγνώριση γλωσσικών εμποδίων, σχεδιασμό ερωτήσεων υψηλής γνωστικής και γλωσσικής εμπλοκής, καλλιέργεια μαθηματικού διαλόγου και αξιοποίηση του μαθητικού γλωσσικού ρεπερτορίου. Σύγχρονες ανασκοπήσεις αναδεικνύουν ότι οι εκπαιδευτικοί συχνά υποτιμούν τη γλωσσική διάσταση και ωφελούνται από στοχευμένη επιμόρφωση (Planas & Pimm, 2023).

Η ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου

Ο Τουμάσης (1994) επισημαίνει ότι πολλοί εκπαιδευτικοί θεωρούν αυτονόητο πως οι μαθητές γνωρίζουν να διαβάζουν το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών όπως κάθε άλλο κείμενο, όμως κάτι τέτοιο σπάνια ισχύει. Τονίζει ότι οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί «πώς» να ''διαβάζουν'' μαθηματικό κείμενο, πώς να αξιοποιούν πληροφορίες, πίνακες και διαγράμματα, πώς να ταξινομούν το περιεχόμενο, να συνδέουν τα μέρη του και να επισημαίνουν τα κύρια σημεία. Ως εκ τούτου, εισηγείται μια σειρά από πρακτικές ενέργειες που ο δάσκαλος μπορεί να εφαρμόσει συστηματικά μέσα στην τάξη.

Προτείνεται:

- να δίνονται στους μαθητές/τριες συστηματικές ευκαιρίες για σιωπηρή ανάγνωση μικρών ενοτήτων του βιβλίου και να ζητείται στη συνέχεια απαντήσεις σε προφορικές ερωτήσεις. Εισηγείται τη χρήση λίγων, στοχευμένων γραπτών ερωτήσεων ως «οδηγών μελέτης», ώστε οι μαθητές να εστιάζουν στα καίρια σημεία. Ο εκπαιδευτικός να εξηγεί τι θα αναζητηθεί, ποιο λεξιλόγιο και ποιοι συμβολισμοί χρειάζονται υπενθύμιση, με ποιες προϋπάρχουσες έννοιες συνδέεται το νέο περιεχόμενο.
- να επιχειρείται η ρητή καλλιέργεια μαθηματικού λεξιλογίου. Υπογραμμίζεται η ανάγκη ο δάσκαλος/α να προειδοποιεί για λέξεις με διαφορετική σημασία στη μαθηματική και στην καθημερινή χρήση (π.χ. «χορδή», «ρίζα», «δύναμη», «πρώτος», «σύνολο», «ύψος», «μέσος»), διότι οι πιο αδύνατοι μαθητές τείνουν να προσδίδουν σε αυτές τις λέξεις την καθημερινή σημασία.
- να δημιουργούνται μικρές μικτές ομάδες με πιο ικανούς και πιο αδύνατους μαθητές, ώστε να αναπτύσσεται υποστηρικτική συνεργασία στη μελέτη.
- οι μαθητές να μάθουν να διαβάζουν κριτικά τους τύπους και τους κανόνες. Ως διδακτική κίνηση-κλειδί, να αναδεικνύεται ότι ένας τύπος διαβάζεται και αντίστροφα (π.χ. ο κανόνας για ύψωση γινομένου σε δύναμη μπορεί να διαβαστεί και «από δεξιά προς τα αριστερά»), ώστε να συνδέονται πολλαπλές δεξιότητες μέσα από μία σχέση. Η στόχευση είναι η κατανόηση της αμφίδρομης λογικής στις μαθηματικές ισότητες, αντί της μηχανικής απομνημόνευσης.
- να καλλιεργείται η συνειδητή διαχείριση χρόνου με πολλές παύσεις, επιστροφές σε προηγούμενα σημεία, αναφορά σε σχήματα, και παράλληλη αριθμητική εργασία διότι το μαθηματικό διάβασμα είναι απαιτητικό και διακεκομμένο.
- η πρακτική των τριών περασμάτων: ένα γρήγορο πέρασμα για επισκόπηση, ένα αργό για εντοπισμό δυσκολιών και ένα τελικό για εδραίωση των βασικών ιδεών και κατανόηση των «δύσκολων» σημείων.
- στοχευμένη υποστήριξη των πιο αδύνατων: ενθάρρυνση και επιβράβευση προσπαθειών, αποφυγή συγκρίσεων με ισχυρότερους συμμαθητές, από κοινού ανάγνωση φράσεων «λέξη προς λέξη» και επαναδιατύπωση με απλούστερες λέξεις όπου χρειάζεται.

Επιμύθιο

Η μάθηση των Μαθηματικών στο Δημοτικό είναι κατ' εξοχήν γλωσσική διαδικασία: η ακρίβεια του λεξιλογίου, η διαχείριση της συντακτικής πολυπλοκότητας και η συστηματική συμμετοχή των μαθητών/τριών σε δομημένο μαθηματικό λόγο προσδιορίζουν την πρόσβαση στις έννοιες. Ο/η εκπαιδευτικός καλείται να λειτουργεί «γλωσσικά ευαίσθητα», συνδέοντας ρητά όρους με δομές νοήματος (π.χ. αναλογία → σταθερός λόγος), να ανασχεδιάζει τις εκφωνήσεις ώστε να αφαιρεί γλωσσικά εμπόδια και να οργανώνει πολυτροπικές αναπαραστάσεις που γεφυρώνουν την καθημερινή με την ''ακαδημαϊκή'' γλώσσα. Η καλλιέργεια «γλωσσικών κινήσεων» (αναδιατύπωση, επιμονή για αιτιολόγηση, μετατόπιση αναπαράστασης, πρόσκληση αντιπαραδείγματος) καθιστά ορατές τις ιδέες και τροφοδοτεί διαμορφωτική αξιολόγηση σε πραγματικό χρόνο, ενώ οι στοχευμένες «σκαλωσιές» (χάρτες εννοιών, τοίχος λέξεων, προσωπικά λεξικά) υποστηρίζουν ιδιαίτερα τους/τις μαθητές/τριες με αυξημένες γλωσσικές ανάγκες. Η κεντρική αρχή είναι η προοδευτική μετάβαση από την άτυπη στην «τεχνική» γλώσσα μέσα από αυθεντικές δραστηριότητες και διαβαθμισμένες εκφωνήσεις. Έτσι η γλώσσα μετατρέπεται από εν δυνάμει εμπόδιο σε μοχλό εννοιολογικής κατανόησης και ισότιμης συμμετοχής.

Έρευνες και μελέτες αναδεικνύουν την εικόνα ενός δασκάλου που σχεδιάζει ρητή διδασκαλία λεξιλογίου, ρυθμίζει τη γλωσσική φόρτιση των προβλημάτων, επιλέγει ποικίλες αναπαραστάσεις και ενορχηστρώνει πλούσιο διάλογο ώστε οι μαθητές/τριες να μαθαίνουν «πώς να μαθαίνουν» από κείμενα, σύμβολα και συζητήσεις στα Μαθηματικά. Επιπλέον, σύγχρονες ανασκοπήσεις ερευνών προτείνουν ένα πλαίσιο μάθησης που ενσωματώνει πρακτικές μαθηματικού λόγου και γλωσσικά αποτελεσματική διδασκαλία ως προϋπόθεση για υψηλού επιπέδου μαθηματική σκέψη (NCTM, 2014· Prediger, Wilhelm, Büchter, Gürsoy, & Benholz, 2018).

Βιβλιογραφία

Κεραμάρης, Κ., & Μπαρμπαγιάννη, Ε. (2011). *Η γλώσσα των μαθηματικών στα σχολικά εγχειρίδια των δύο τελευταίων τάξεων του δημοτικού σχολείου.* Στο Πρακτικά 8ου Συνεδρίου Ελληνική Γλώσσα και Ορολογία (σσ. 245–256). Αθήνα: Ελληνική Εταιρεία Ορολογίας (ΕΛΕΤΟ).

Τουμάσης, Μ. (1994). Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών. *Αθήνα: Gutenberg*.

Van de Walle, J. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά: για Δημοτικό και Γυμνάσιο - μια αναπτυξιακή διαδικασία.* Αθήνα: Επίκεντρο.

Abedi, J. & Lord, C. (2001). The language factor in mathematics tests. *Applied Measurement in Education*, 14(3), 219–234. https://doi.org/10.1207/S15324818AME1403_2

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131.

Martiniello, M. (2009). Linguistic complexity, schematic representations, and differential item functioning for English language learners in math tests. Educational Assessment, 14(3-4), 160–179.

Forman, E. (1996). Learning mathematics as participation in classroom practice: Implications of sociocultural theory for educational reform. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 115–130). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Jacobs, J. K., Scornavacco, K., Harty, C., Suresh, A., Lai, V., & Sumner, T. (2022). Promoting rich discussions in mathematics classrooms: Using personalized, automated feedback to support reflection and instructional change. *Teaching and Teacher Education, 112*, 103631. https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103631

Hornburg, C. B., Schmitt, S. A., & Purpura, D. J. (2018). Relations between preschoolers' mathematical language understanding and specific numeracy skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 176, 84–100. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.07.005

Hornburg, C. B., King, Y. A., Westerberg, L., Schmitt, S. A., & Purpura, D. J. (2024). The roles of mathematical language and emergent literacy skills in the longitudinal prediction of specific early numeracy skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 244*, 105959. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2024.105959

Kazemi, E., & Hintz, A. (2014). *Intentional talk: How to structure and lead productive mathematical discussions*. Stenhouse Publishers.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Lager, C. A. (2004). *Unlocking the language of mathematics to ensure our English learners acquire algebra.* UCACCORD Public Policy Series, PB-006-1004). (ucaccord.gseis.ucla.edu)

Moschkovich, J. N. (2003). *What counts as "mathematical discourse"?* ERIC ED501034. (ERIC)

Moschkovich, J. N. (Ed.) (2010). *Language and Mathematics Education: Multiple Perspectives and Directions for Research.* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Moschkovich, J. N. (2015). Academic literacy in mathematics for English learners: Integrating mathematical proficiency, practices, and discourse. *The Journal of Mathematical Behavior, 40*, 43–62. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.002 (ScienceDirect)

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.

O'Halloran, K. L. (2003). Educational implications of mathematics as a mutisemiotic discourse. In M. Anderson, A. Saaenz-Ludlow, S. Zellweger, & V. V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 185–214). Brooklyn, NY, and Ottawa, Ontario: Legas.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315278858

Planas, N., & Pimm, D. (2023). Mathematics education research on language and on communication including some distinctions: Where are we now? *ZDM–Mathematics Education, 55*, 1087–1100. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01497-0

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A. Gürsoy, E., & Benholz, C. (2018). Language Proficiency and Mathematics Achievement. *J Math Didakt* **39** (Suppl 1), 1–26 (2018). https://doi.org/10.1007/s13138-018-0126-3

Purpura, D. J., & Reid, E. E. (2016). Mathematics and language: Individual and group differences in mathematical language skills in young children. *Early Childhood Research Quarterly, 36*, 259–268. http://dx.doi.org/10.1016/j.ecresq.2015.12.020

Raiker, A. (2002). Spoken language and mathematics. *Cambridge Journal of Education, 32*(1), 45–60. https://doi.org/10.1080/03057640220116427

Schleppegrell, M. J. (2007). The Linguistic Challenges of Mathematics Teaching and Learning: A Research Review. *Reading & Writing Quarterly*, *23*(2), 139–159. https://doi.org/10.1080/10573560601158461

Staub, F. C. & Reusser, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. In C. A. Weaver, S. Mannes, & C. R. Fletcher (Eds.), *Discourse comprehension* (pp. 285–305). Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

Turan, E., & De Smedt, B. (2022). Mathematical language and mathematical abilities in preschool: A systematic literature review. *Educational Research Review*, 36. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2022.100457.

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Harvard University Press.

White, D. Y. (2003). Promoting productive mathematical classroom discourse with diverse students. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 37–53. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00003-8

Είναι τα Μαθηματικά θέμα γλώσσας; Η περίπτωση της Επίλυσης Προβλήματος

Ιωάννης Παπαδόπουλος

Καθηγητής Διδακτικής Μαθηματικών
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
ypapadop@eled.auth.gr

Περίληψη

Μια από τις δεξιότητες που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική γνώση είναι η δεξιότητα στην επικοινωνία (ή καλύτερα στην επικοινωνία με ακρίβεια), η οποία περιλαμβάνει την ικανότητα να ερμηνεύεις και να κατανοείς μαθηματικά κείμενα. Στο πρώτο μέρος της εισήγησης παρουσιάζεται το πώς αυτή η δεξιότητα σχετίζεται με την εννοιολογική κατανόηση και άρα με την εμφάνιση αναγνωστικών λαθών, λανθασμένης κατανόησης και κωδικοποίησης, παρανοήσεων. Το δεύτερο μέρος προσεγγίζει τη σχέση γλώσσας και Μαθηματικών μέσα από την ιδέα ότι η ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου αποτελεί επί της ουσίας δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή το πιο κατάλληλο είδος κειμένου είναι η μαθηματική απόδειξη (στην περίπτωσή μας το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής). Η προσπάθεια μαθητών Λυκείου να κατανοήσουν το μαθηματικό περιεχόμενο του κειμένου κατέστη επί της ουσίας γι' αυτούς ένα πρόβλημα που απαιτούσε τη λύση του. Στην προσπάθεια να λύσουν το πρόβλημα ήταν εφικτό να εντοπιστούν και τα τέσσερα βήματα επίλυσης του Polya (1945) με κυρίαρχο το πρώτο, της κατανόησης του προβλήματος.

Λέξεις κλειδιά: Επίλυση προβλήματος, Ανάγνωση μαθηματικού κειμένου, Απόδειξη.

Εισαγωγή

Απόσπασμα 1:	«*Ποια είναι η διαφορά του 24 με το 9;*» *Μαθητής 1: Ο ένας είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.* *Μαθητής 2: Ο ένας είναι διψήφιος και ο άλλος μονοψήφιος.* (Pimm, 1987) *Μαθητής 3: Είναι 15. Η διαφορά είναι* $24 - 9 = 15$.
Απόσπασμα 2	«*Προκειμένου τα Μαθηματικά να αποκτήσουν νόημα για τους μαθητές […] πρέπει να υπάρξει επικοινωνία μεταξύ εκπαιδευτικών και μαθητών […] Ο εκπαιδευτικός πρέπει με κάποιο τρόπο να μπει στο μυαλό των μαθητών του […] Η γλωσσική επικοινωνία καθίσταται ιδιαιτέρως σημαντική – οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν τους μαθητές να μιλούν, και τους ακούν. Δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να μιλούν και να ακούν ο ένας τον άλλο. Τους ενθαρρύνουν να διαπραγματεύονται*

αυτά που κατάλαβαν χωρίς να φοβούνται ότι λεν ανοησίες ή κάνουν λάθη» (Jaworski, 1988, σ. 295).

Η γλώσσα είναι σημαντική αν πρόκειται να μιλήσουμε για επικοινωνία και διαμοίραση μαθηματικών ιδεών. Θέλουμε τους μαθητές μας να **μιλούν** και να **γράφουν**, να **ακούν** και να **διαβάζουν** Μαθηματικά. Παρ' όλ' αυτά, όταν φτάνουμε στη διδασκαλία των Μαθηματικών, οι μαθητές δεν καταφέρνουν να κατανοήσουν το περιεχόμενο που επιδιώκουν οι δάσκαλοί τους. Αν έχουμε επίγνωση της αμφισημίας και της ελλιπούς κατανόησης που ενυπάρχει στη μαθηματική γλώσσα της τάξης, τότε είμαστε σε θέση να διαγνώσουμε δυσκολίες που έχουν την απαρχή τους στη γλώσσα.

Οι Niss και Højgaard Jensen (2002) υποστηρίζουν ότι η μαθηματική γνώση χαρακτηρίζεται από οκτώ διαφορετικές ικανότητες. Μια από αυτές είναι η ικανότητα στην επικοινωνία με ακρίβεια, η οποία περιλαμβάνει την ικανότητα να ερμηνεύεις και να κατανοείς μαθηματικά κείμενα. Αυτό, από μόνο του, φαίνεται να δείχνει προς τη μεγάλη σχέση ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη γλώσσα. Η αλήθεια είναι ότι ο προβληματισμός για τη σχέση αυτή ξεκίνησε αρκετά νωρίτερα. Οι Austin και Howson (1979) τονίζουν ότι όσοι εμπλέκονται στη μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να δώσουν ιδιαίτερη προσοχή στη γλώσσα για τουλάχιστον δυο λόγους. Ο πρώτος είναι, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, η ανάγκη για επικοινωνία με ακρίβεια, κάτι που οδήγησε στη λεγόμενη μαθηματική (ή συμβολική) γλώσσα. Ο δεύτερος είναι ότι σε αυτήν καθαυτή τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, η γλώσσα παίζει σημαίνοντα ρόλο, και άρα είναι ένα ζητούμενο πώς μπορεί να συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση αλλά και στη βελτίωση της διδασκαλίας.

Η σπουδαιότητα του θέματος προοδευτικά γίνεται όλο και περισσότερο αποδεκτή από την ερευνητική κοινότητα της Διδακτικής των Μαθηματικών. Αυτό είναι πια εμφανές στη δημοσιευμένη βιβλιογραφία και στο μέγεθος συμμετοχής στις διάφορες σχετικές θεματικές ομάδες που λειτουργούν στα πλαίσια μεγάλων συνεδρίων του κλάδου, όπως το ICME (International Congress on Mathematical Education), το PME (Psychology in Mathematics Education) και το CERME (Congress of European Research in Mathematics Education).

Οι ερευνητές που εξετάζουν τη σχέση γλώσσας και Μαθηματικών προσπαθούν μεταξύ άλλων να δώσουν απαντήσεις σε ερωτήματα όπως «τι ρόλο παίζει η γλώσσα στη διαδικασία αυτού που λέμε 'κάνω μαθηματικά' αλλά και στην παραγωγή μαθηματική γνώσης;» ή «πώς η χρήση γλώσσας τοποθετεί κάποιον άνθρωπο σε σχέση με τα Μαθηματικά;» (Morgan et al., 2014). Σε αυτό το πλαίσιο στην παρούσα εισήγηση θα γίνει μια προσπάθεια αρχικά να φανεί πως η γλωσσική δεξιότητα σχετίζεται με την εννοιολογική κατανόηση και κατά συνέπεια με την εμφάνιση παρανοήσεων και λαθών. Στη συνέχεια, μέσα από τα ευρήματα μιας δημοσιευμένης εργασίας (Papadopoulos & Kyriakopoulou, 2022) θα παρουσιαστεί η ιδέα ότι η ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου μπορεί να προσεγγιστεί ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος.

Η γλώσσα στα Μαθηματικά και στη Μαθηματική Επίλυση Προβλήματος

Ο Goldin (1982) διακρίνει τρία είδη γλώσσας που εμπλέκονται στην επίλυση προβλήματος: την *προφορική (φυσική)* γλώσσα, τη *συμβολική* γλώσσα και τη *σχεδιαστική* γλώσσα.

Η *προφορική (φυσική)* είναι η γλώσσα στην οποία είναι διατυπωμένο το πρόβλημα. Αυτή μπορεί να είναι η φυσική ομιλούμενη (π.χ. ελληνική) γλώσσα που να περιέχει όμως και κάποιους τεχνικούς όρους από τα Μαθηματικά. Σε αυτήν τη γλώσσα περιλαμβάνονται, μεταξύ άλλων, παράμετροι όπως η έκταση του κειμένου, η γλωσσική πολυπλοκότητα, και η μορφή διατύπωσης των αριθμών (λέξεις ή ψηφία). Οι Clements και Battista (1992) ισχυρίζονται ότι πρέπει να δίνουμε ιδιαίτερη προσοχή στα διαφορά μεταξύ της κοινής χρήσης της φυσικής γλώσσας και της χρήσης της στα Μαθηματικά (σ. 433). Η *φυσική* γλώσσα στα Μαθηματικά σχετίζεται με το μαθηματικό λεξιλόγιο και προκειμένου ο μαθητής να έχει εννοιολογική κατανόηση στα Μαθηματικά θα πρέπει να κατακτήσει με επάρκεια αυτούς τους όρους ώστε να μπορεί να μεταφράζει σωστά τις μαθηματικές προτάσεις στο μαθηματικό τους ισοδύναμο.

Αυτό το λεξιλόγιο, όπως συναντάται στα εγχειρίδια, μπορεί να διαιρεθεί σε τρεις κατηγορίες: (i) όροι που μπορεί να έχουν μαθηματικό νόημα, αλλά ταυτόχρονα και ένα διαφορετικό νόημα στην καθημερινή τους χρήση. Για παράδειγμα «σημείο» (π.χ., έφτασε η ταινία σε ένα σημείο όπου όλα ήταν απρόβλεπτα), «γωνία» (π.χ., η οπτική γωνία που προσεγγίζεις το θέμα), «έδρα» (π.χ., σήμερα παίζουμε στην έδρα μας), κ.λπ. (ii) λέξεις που έχουν μαθηματικό νόημα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν με το ίδιο νόημα στην καθημερινή ζωή (π.χ. ύψος, βάρος, όγκος, κ.λπ.), και (iii) σύμβολα και λέξεις αποκλειστικά για την επικοινωνία μαθηματικών ιδεών (π.χ. συνημίτονο, εφαπτομένη, ολοκλήρωμα, κ.λπ.).

Η *συμβολική* γλώσσα στην επίλυση προβλήματος έχει την αναφορά της σε άκρως δομημένα φορμαλιστικά συστήματα και συνοδεύεται από αυστηρούς σημασιολογικούς κανόνες που δημιουργούν καλώς ορισμένες μαθηματικές εκφράσεις, όπως επίσης και από ένα συγκεκριμένο και καλώς ορισμένο σύνολο επιτρεπόμενων μετασχηματισμών από τη μια έκφραση στην άλλη. Η σημειογραφία για την αρίθμηση, τις πράξεις, τους κλασματικούς και δεκαδικούς αριθμούς, την άλγεβρα, την τριγωνομετρία κ.λπ., είναι παραδείγματα τέτοιας γλώσσας.

Αυτό που πρέπει να σημειωθεί για τη *συμβολική* γλώσσα είναι ότι στην τάξη καταναλώνεται σημαντικός χρόνος προκειμένου οι μαθητές να κατακτήσουν τη γλώσσα αυτή. Αν αυτό επιτευχθεί, τότε το πρώτο βήμα για την επίλυση είναι να μεταφραστεί το πρόβλημα στη *συμβολική* γλώσσα. Αν γίνει αυτό, τότε ο φορμαλιστικός χειρισμός των συμβόλων (σύμφωνα βέβαια με τους κανόνες) είναι ικανός να οδηγήσει στη λύση του προβλήματος.

Η βιβλιογραφία υποστηρίζει ότι οι ξεχωριστές ιδιότητες που μπορεί να έχει ένα μαθηματικό κείμενο μπορούν να επηρεάσουν την ανάγνωσή του με συγκεκριμένο τρόπο. Η *συμβολική* γλώσσα είναι ίσως η πιο προφανής τέτοια περίπτωση. Όντως, αν έχουμε ένα μαθηματικό κείμενο γραμμένο πλήρως με μαθηματικά σύμβολα, τότε η γενική αναγνωστική ικανότητα δεν είναι καν απαραίτητη. Για ένα τέτοιο κείμενο δεν είναι απαραίτητο κάποιος να γνωρίζει ανάγνωση (με την κοινή έννοια του όρου). Βέβαια, το σύνηθες είναι ένα μαθηματικό κείμενο να συνδυάζει τόσο τη *συμβολική* όσο και τη *φυσική* γλώσσα. Με τον τρόπο αυτό ο αναγνώστης χρειάζεται δεξιότητες γραμματισμού σχετικές τόσο με τη γενική αναγνωστική ικανότητα όσο και με την συγγενή προς τα Μαθηματικά (Österholm, 2006). Η γνώση της *συμβολικής* γλώσσας δεν περιορίζεται μόνο στα μαθηματικά σύμβολα, αλλά και σε αυτό που οι ερευνητές αποκαλούν *μαθηματική ορθογραφία* και αφορά τους κανόνες και τις συμβάσεις για τις γραπτές μαθηματικές εκφράσεις (Xu et al., 2022). Ένα παράδειγμα μαθηματικής ορθογραφίας είναι ότι το σύμβολο της πρόσθεσης τοποθετείται πάντα ανάμεσα στους προσθετέους (π.χ. $5 + 4$ και όχι $+4\ 5$). Σχετική έρευνα έδειξε ότι τέτοιου είδους γνώση σχετίζεται με την επίδοση στην επίλυση προβλήματος (Headley, 2016).

Η *σχεδιαστική* γλώσσα σχετίζεται στενά με την επίλυση προβλήματος με την έννοια ότι πρόκειται για γλώσσα που είναι διαθέσιμη στον λύτη για την επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης (2$^{\text{ο}}$ βήμα του Polya) μέσα από τη χρήση ευρετικών στρατηγικών (heuristics). Στην ουσία είναι η γλώσσα μέσα από την οποία ο λύτης φτάνει στο να εντοπίσει τους επιμέρους στόχους στη λύση του προβλήματος, να οργανώσει την αναζήτηση μέσα από τη δοκιμή-πλάνη, να αναζητήσει ανάλογα προβλήματα που πιθανόν συνάντησε προηγουμένως, γλώσσα δηλαδή που λειτουργεί στο πνεύμα της επίλυσης προβλήματος του Polya (1945). Βέβαια η κατοχή μιας τέτοιας γλώσσας προϋποθέτει εξοικείωση και προηγούμενη εμπειρία στην επίλυση προβλήματος μέσα στο πνεύμα αυτό. Εδώ θα μπορούσαμε να πούμε ότι κάποιες φορές έχουμε μια τέτοια γλώσσα *σχετικά* με την επίλυση προβλήματος (about problem solving) και άλλες έχουμε γλώσσα *για* την επίλυση προβλήματος (for problem solving) (για τη διάκριση ανάμεσα σε αυτές τις δυο προσεγγίσεις βλέπε Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017; Schroeder & Lester, 1989).

Γλωσσικές παράμετροι στην επίλυση προβλήματος

Οι σχετικές έρευνες έχουν μελετήσει την πιθανή επίδραση των γλωσσικών παραγόντων του προβλήματος στην επίλυσή του. Τα ευρήματα αυτά δεν συμφωνούν πάντα μεταξύ τους.

Ένας από τους γλωσσικούς παράγοντες σε ένα πρόβλημα είναι η *έκταση του κειμένου* του (το πλήθος λέξεων). Υπάρχουν έρευνες που δείχνουν ότι ο παράγοντας αυτός της έκτασης του κειμένου δημιουργεί *πολυπλοκότητα παρουσίασης* (Cockburn, 2005). Σε συνδυασμό μάλιστα με την γλωσσική πολυπλοκότητα, η έκταση του κειμένου επηρεάζει το βαθμό δυσκολίας των λεκτικών προβλημάτων (Loftus, 1970). Βέβαια, άλλη σχετική έρευνα (Lepik, 1990) διαφοροποιείται βρίσκοντας ότι η έκταση της εκφώνησης δεν αποτελεί σημαντικό παράγοντα πρόβλεψης ορθής επίλυσης αλλά μάλλον ένδειξη για τον απαιτούμενο χρόνο επίλυσης.

Άλλη γλωσσική παράμετρος είναι το *πλήθος των σημασιολογικών σχέσεων* (γλωσσική πολυπλοκότητα) που επιδρούν στη δυσκολία των προβλημάτων αλλά και στις στρατηγικές που εφαρμόζουν οι λύτες για την επίλυσή τους. Οι σημασιολογικές σχέσεις αναφέρονται σε ουσιαστικές σχέσεις μεταξύ γνωστών και αγνώστων στοιχείων σε ένα πρόβλημα. Τέτοιες σημασιολογικές σχέσεις είναι: (i) η *αλλαγή* (change), δηλ. λέξεις που αναφέρονται στη μεταβολή της αρχικής μετρήσιμης ποσότητας (αύξηση ή μείωση) κατά ένα ποσό, (ii) η *ομαδοποίηση* (group), δηλ. λέξεις που αναφέρονται σε περιπτώσεις όπου επιμέρους ποσότητες συνδυάζονται σχηματίζοντας μια μεγαλύτερη, (iii) η *σύγκριση* (compare), δηλ. λέξεις που αναφέρονται στη σύγκριση μεταξύ δυο ποσοτήτων (περισσότερο, λιγότερο, μεγαλύτερο, μικρότερο κτλ.), (iv) η *επαναδιατύπωση* (restate), δηλ., λέξεις που αναφέρονται στη σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών και η οποία εφαρμόζεται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο και δεν μπορεί να γενικευτεί, και (iv) η *μεταβολή* (vary), δηλ. λέξεις που αναφέρονται στη σταθερή σχέση ανάμεσα σε δυο μεταβλητές και η οποία παραμένει η ίδια ανεξάρτητα από το πλαίσιο. (Marshall, 1995).

Η τρίτη γλωσσική παράμετρος είναι σχετική με το ρόλο του «*μοντέλου για την κατάσταση του προβλήματος*» (situation model) προκειμένου να γίνει κατανοητό το κείμενο της εκφώνησης. Στα τυποποιημένα προβλήματα είναι αρκετό να κατανοήσει κανείς τις προτάσεις του κειμένου. Στα μη τυποποιημένα όμως απαιτείται και μη τυποποιημένη σκέψη, εξ ου και η κατασκευή ενός μοντέλου για την κατάσταση-πλαίσιο του προβλήματος προκειμένου αυτό να γίνει κατανοητό (Kintsch, 1998). Το μοντέλο για την κατάσταση (μοντελοποίηση) περιέχει περισσότερα απ' ότι οι προτάσεις της εκφώνησης. Για να κατανοήσει ο λύτης τις προτάσεις πρέπει να ανατρέξει σε πρότερη γνώση σχετική με το περιεχόμενο του προβλήματος και να την ενσωματώσει στην πληροφορία του κειμένου του προβλήματος (π.χ. ένα διάγραμμα, ή μια σχηματική αναπαράσταση που τα συνδυάζει).

Τέλος, μια τέταρτη γλωσσική παράμετρος σε ένα πρόβλημα είναι η *περιττή ή υπόρρητη πληροφορία* που φαίνεται να έχουν επίδραση στην κατανόηση της κατάστασης-πλαισίου του προβλήματος. Η έρευνα δείχνει ότι η περιττή πληροφορία επιδρά αρνητικά στην προσπάθεια των λυτών, ενώ η υπόρρητη πληροφορία δεν φαίνεται να έχει κάποια επίδραση (Englert et al., 1987). Σχετικά μάλιστα με την υπόρρητη πληροφορία φαίνεται ότι οι λύτες συχνά βασίζονται στη στρατηγική της άμεσης ερμηνείας (π.χ. κοιτώ τους αριθμούς και ψάχνω για λέξεις-κλειδιά). Πρόκειται για μια στρατηγική που συχνά οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις.

Πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των παραδειγμάτων, αξίζει ίσως να αναφερθεί ότι υπάρχουν δυο είδη αλληλεπίδρασης στη σχέση γλώσσας και Μαθηματικών στο σχολικό περιβάλλον. Είναι η *αλληλεπίδραση μεταξύ εκπαιδευτικού και μαθητή* (καθοδηγούμενη αλληλεπίδραση από τον εκπαιδευτικό) και η *αλληλεπίδραση στα πλαίσια της ομάδας* (Mercer & Sams, 2006). Η πρώτη βασίζεται στον καθοδηγητικό ρόλο των μελών της κοινωνίας που έχουν περισσότερη γνώση στην ανάπτυξη της σχετικής γνώσης και κατανόησης των μαθητών. Η δεύτερη εστιάζει κυρίως στην συνεργατική επίλυση προβλήματος όπως θα φανεί στο παράδειγμα που θα παρουσιαστεί αναλυτικά παρακάτω. Βέβαια, δεν είναι σίγουρο ότι αυτή η αλληλεπίδραση είναι πάντα τόσο παραγωγική. Αυτό πιθανόν συμβαίνει διότι οι μαθητές συμμετέχουν στη συνεργατική επίλυση χωρίς να είναι σε θέση να καταθέσουν στα πλαίσια του συγκεκριμένου προβλήματος μια καθαρή εικόνα του τι αναμένεται από αυτούς να κάνουν, ούτε έχουν καθαρή εικόνα του τι σημαίνει να έχουν μια καλή, αποτελεσματική συζήτηση μεταξύ τους. Και πώς θα μπορούσε να είναι διαφορετικά, αν αναλογιστούμε ότι οι περισσότεροι μαθητές μας σπάνια έχουν την εμπειρία μιας τέτοιας συζήτηση όχι μόνο στο σχολικό πλαίσιο αλλά και σε αυτό της καθημερινής τους ζωής. Σπάνια τους δίνεται η καθοδήγηση, η εκπαίδευση του πώς να επικοινωνούν με τρόπο αποτελεσματικό μέσα στην ομάδα. Ακόμη και όταν η υπόδειξη είναι απόλυτα σαφής, π.χ. «συζητήστε μεταξύ σας και αποφασίστε», αυτό δεν συνοδεύεται απαραίτητα από μια πραγματική κατανόηση του πώς συζητάμε μεταξύ μας ή για ποιο λόγο το κάνουμε αυτό.

Μέρος Α - Ανάγνωση και προβλήματα στην κατανόηση κειμένου – Μερικά παραδείγματα

Όταν ένας μαθητής κάνει κάποιο λάθος στα Μαθηματικά, ένα από τα προφανή ερωτήματα που ελέγχουμε είναι το κατά πόσο κατανοεί τη δραστηριότητα με όρους τόσο της χρησιμοποιούμενης γλώσσας όσο φυσικά και του μαθηματικού περιεχομένου (Cockburn, 2005). Ο Baroody (1993) επισημαίνει ότι για τα παιδιά τα Μαθηματικά λειτουργούν στην ουσία ως δεύτερη ξένη γλώσσα. Αν και πρέπει ως εκπαιδευτικοί να το θυμόμαστε αυτό, φαίνεται ότι κάποιες φορές το ξεχνάμε. Αναφέρθηκε και πιο πάνω ότι υπάρχουν λέξεις που είναι κατ’ εξοχήν μέρος της μαθηματικής γλώσσας (π.χ. ολοκλήρωμα, παραγοντοποίηση). Αλλά υπάρχουν και λέξεις και φράσεις της καθημερινής ζωής που εμείς τις θεωρούμε δεδομένες και οι οποίες μπορεί να αποδειχθούν περίπλοκες όταν χρησιμοποιηθούν σε ένα εξειδικευμένο πλαίσιο. Τι σχέση μπορεί να έχει, για παράδειγμα, η φράση «βγάζω το γάλα από το ψυγείο» με το «βγάζω το 6 από το 9» στην αφαίρεση; Ή το «αγόρασα ένα πουκάμισο με υπέροχο μοτίβο» με τη μελέτη ενός «αριθμητικού ή γεωμετρικού μοτίβου»;

Μερικά από τα λάθη ή τις παρανοήσεις που παρουσιάζονται εξ αιτίας της στενής σχέσης γλώσσας και Μαθηματικών είναι τα εξής (Cockburn, 2005):

Λάθη στη μετάφραση των Μαθηματικών.

Γνωρίζει ο μαθητής τι απαιτείται από αυτόν σε επίπεδο μαθηματικών όρων; Παρατηρούμε τέτοια λάθη συνήθως σε λεκτικά προβλήματα όπου η ανάγνωση συγκεκριμένων λέξεων μεταφράζεται λανθασμένα. Κλασσικό παράδειγμα είναι η αναζήτηση λέξεων-κλειδιά στην εκφώνηση. Για παράδειγμα, αν οι μαθητές διαβάσουν τη λέξη «διαφορά» αυτό σημαίνει «αφαίρεση», «περισσότερο» και «όλα μαζί» σημαίνει πρόσθεση, «φορές» πολλαπλασιασμό και «μοιράζονται» διαίρεση. Αν όμως έχουμε ένα πρόβλημα όπως:

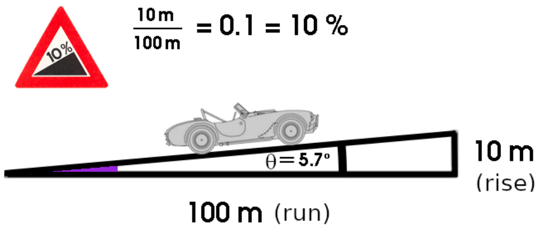
> «*Ο Γιώργος έχει 34 γραμματόσημα που είναι 11 περισσότερα από του αδερφού του. Πόσα είναι τα γραμματόσημα του αδερφού του;*».

Ένας μαθητής που αναγνωστικά χρησιμοποιεί τη στρατηγική αυτή είναι πιθανόν να χρησιμοποιήσει τη λέξη-κλειδί «περισσότερα» και να κάνει πρόσθεση αντί για αφαίρεση, οπότε θα βρει λανθασμένο αποτέλεσμα. Εδώ χρειάζεται ίσως ενθάρρυνση στο μαθητή ώστε να σκέφτεται για το πόσο εύλογη είναι η στρατηγική αυτή. Ανάλογα λάθη εμφανίζονται και σε μαθητές μεγαλύτερης εκπαιδευτικής βαθμίδας. Οι Duru και Koklu (2011) έδωσαν σε μαθητές Α' Γυμνασίου τη φράση «*4 more than 3 times of a number is 16*» (το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4 δίνει 16). Πολλοί μαθητές είχαν δυσκολία να μεταφράσουν σωστά το μαθηματικό κείμενο και έδωσαν αντί του σωστού $3x + 4 = 16$, λανθασμένες απαντήσεις όπως $\frac{x}{3} + 4 = 16$ ή $3(x + 4) = 16$.

***Αναγνωστικά λάθη*.**

Πρόκειται για λάθη που συνήθως εμφανίζονται σε σχετικά μικρούς και άπειρους αναγνώστες.

Έχει ενδιαφέρον ένα παράδειγμα στην αγγλική γλώσσα που αναφέρουν οι Dickson et al. (1984) όπου μια 12χρονη μαθήτρια συγχέει στην εκφώνηση τις λέξεις (right) «angle» (γωνία) και «angel» (άγγελος), κάτι το οποίο αποκαλύφθηκε όταν η μαθήτρια έκανε την εξής απρόσμενη ερώτηση: *Όταν λέει εδώ ποιος άγγελος είναι ο σωστός (right) άγγελος εννοεί ότι τα φτερά πάνε προς αυτήν την κατεύθυνση ή προς την άλλη;* (προφανώς στο αυθεντικό κείμενο το ερώτημα ήταν ποια γωνία ήταν ορθή – which angle is the right angle).



Εικόνα 1: Παράδειγμα αναγνωστικού λάθους σε εκφώνηση. Η περίπτωση της «κλίσης» και της «κλήσης».

Η προσπάθεια να βρω κάτι αντίστοιχο στην ελληνική γλώσσα με οδήγησε στο παράδειγμα της λέξης «κλίση» ως μαθηματικού όρου και της λανθασμένης ανάγνωσής της ως «κλήση» με την καθημερινή έννοια της λέξης (Εικ. 1).

Λάθη κατανόησης.

Κάποιες φορές οι μαθητές έχουν δυσκολία να κατανοήσουν τη γραπτή όψη του προβλήματος. Δεν είναι το ίδιο με τη μετάφραση που είδαμε πιο πριν. Τα λάθη αυτά αναφέρονται στην αδυναμία κατανόησης λέξεων ή φράσεων. Οι μαθητές είναι σε θέση να διαβάσουν τη λέξη, το κείμενο, όμως δεν καταλαβαίνουν τι εννοεί. Δεν είναι σίγουρο ότι αν δώσω στην εκφώνηση ενός προβλήματος, μεταξύ άλλων, τη φράση «Δίνεται σωλήνας διατομής 15cm^2», όλοι οι μαθητές που θα τη διαβάσουν θα αντιληφθούν το περιεχόμενό της. Είναι εντυπωσιακός ο μεγάλος αριθμός θετικών απαντήσεων όταν ρωτώ τους φοιτητές μου στο μάθημα αν τους έτυχε ποτέ να λύσουν πρόβλημα που δεν καταλάβαιναν τι ζητούσε.

Μέρος Β - Η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος

Το δεύτερο μέρος της εργασίας αυτής προσεγγίζει τη γλώσσα στα Μαθηματικά μέσα από την ιδέα ότι η ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου αποτελεί επί της ουσίας δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος (Mamona-Downs & Downs, 2005). Η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου σχετίζεται πολύ στενά με την προσπάθεια του λύτη να κατανοήσει το περιεχόμενό του. Φυσικά δεν προσφέρονται για τον σκοπό αυτό όλα τα μαθηματικά κείμενα. Φαίνεται ότι στην περίπτωση αυτή το πιο κατάλληλο είδους μαθηματικού κειμένου είναι η απόδειξη (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017). Στο παράδειγμα που θα παρουσιαστεί και που αντλείται από δημοσιευμένη εργασία των Papadopoulos και Kyriakopoulou (2022) έχει επιλεγεί το θεώρημα της μαθηματικής επαγωγής, παρμένο από παλαιότερο εγχειρίδιο του Ντζιώρα (1979).

Το κείμενο δόθηκε σε μαθητές Λυκείου και αποτελεί μαθηματικό περιεχόμενο το οποίο δεν περιλαμβάνεται στην ύλη που διδάσκονται πια. Διερευνήθηκε η προσπάθειά τους να καταλάβουν το κείμενο μέσα από την οπτική της Επίλυσης Προβλήματος. Οι μαθητές με μια τέτοια προσέγγιση εμπλέκονται στην ανάγνωση ενός μαθηματικού κειμένου με άγνωστο σε αυτούς περιεχόμενο. Αυτό σηματοδοτεί μια στροφή. Παραδοσιακά ο καθηγητής Μαθηματικών είναι ο υπεύθυνος για τη μετάδοση της γνώσης και την επεξήγηση και διασαφήνιση των εννοιών. Τώρα, η ευθύνη αυτή μεταφέρεται στους μαθητές. Η προσπάθειά τους να κατανοήσουν το μαθηματικό περιεχόμενο του κειμένου κατέστη επί της ουσίας ένα πρόβλημα που απαιτούσε τη λύση του. Σε αυτήν την προσπάθεια να «λύσουν» το πρόβλημα ήταν εφικτό να εντοπιστούν και τα τέσσερα βήματα επίλυσης του Polya (1945): (i) Κατανόηση του προβλήματος, (ii) Επινόηση ενός σχεδίου Επίλυσης, (iii) Εκτέλεση του σχεδίου Επίλυσης, (iv) Ματιά προς τα πίσω- Ανασκόπηση.

Από την ανάλυση φάνηκε ότι κυρίαρχο ήταν το πρώτο βήμα της κατανόησης του προβλήματος. Γενικά φαίνεται ότι ως ιδέα, η προσέγγιση της ανάγνωσης ενός μαθηματικού κειμένου ως ένα πρόβλημα που πρέπει να λυθεί είναι μια υποσχόμενη προσέγγιση σε σχέση με την εννοιολογική κατανόηση της μαθηματικής ιδέας που εξετάζει το συγκεκριμένο κείμενο.

Η γλώσσα ως παράμετρος της ανάγνωσης ενός τέτοιου μαθηματικού κειμένου λειτουργεί σε τρία επίπεδα. Το πρώτο αφορά το να ελέγξουν οι μαθητές αν οι συνεπαγωγές είναι λογικά ορθές και να διασφαλίσουν ότι οι αναγκαίες προϋποθέσεις έχουν ληφθεί σωστά υπόψη. Το δεύτερο αφορά στην κατανόηση του πώς είναι δομημένος ο συνολικός συλλογισμός. Τέλος, το τρίτο αφορά στην εξαγωγή νοήματος από το κείμενο (Mamona-Downs & Downs, 2005). Η γλώσσα που υιοθετείται στα εγχειρίδια βλέπει την ανάγνωση μαθηματικών κειμένων κυρίως από την οπτική των συγγραφέων. Η Morgan (1996) αναγνωρίζει ότι η γλώσσα που χρησιμοποιείται σε ένα εγχειρίδιο δεν μεταδίδει με διαφάνεια τις προθέσεις των συγγραφέων· διαφορετικοί αναγνώστες μπορεί να κατασκευάσουν διαφορετικά νοήματα από το ίδιο κείμενο. Αυτό ευθυγραμμίζεται με την άποψη του Freudenthal (1983) ότι ο τρόπος με τον οποίο σκέφτεται ο καθένας μας δεν είναι πάντα δυνατόν να μεταφερθεί ικανοποιητικά σε άλλους ανθρώπους, ειδικά όταν διαφέρουμε ως προς το υπόβαθρο και τις εμπειρίες μας.

Ειδικά, ένα κείμενο απόδειξης μπορεί να διαβαστεί με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο ένας είναι η ανάγνωση να καθορίσει εάν είναι έγκυρος ή όχι ο αποδεικτικός συλλογισμός (Selden & Selden, 1995). Ο άλλος είναι η ανάγνωση για κατανόηση.

Στη συγκεκριμένη έρευνα συμμετείχαν πέντε ομάδες μαθητών (2 ομάδες μαθητών της Α' Λυκείου με 3 μέλη η κάθεμία, 2 ομάδες μαθητών της Β' Λυκείου με 2 μέλη η μία ομάδα και 5 μέλη η άλλη ομάδα, και 1 ομάδα μαθητών της Γ' Λυκείου με 2 μέλη).

§ 19. **Θεώρημα** (*πρώτη μορφή τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς*).—**Ἂν p(ν) εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος μέ σύνολο ἀναφορᾶς τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τέτοιος ὥστε :**

α) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση p(1), καί

β) νά εἶναι ἀληθής ἡ πρόταση : $\forall k \in N,\ p(k) \Rightarrow p(k+1)$,

τότε (δηλ. ὅταν συμβαίνουν τά α) καί β)) **ὁ προτασιακός τύπος p(ν) εἶναι ἀληθής (ἰσχύει) γιά κάθε $\nu \in N$.**

Εικόνα 2: Απόσπασμα από το βιβλίο του Ντζιώρα (1979) που αναφέρεται στο θεώρημα της τέλειας επαγωγής

Το θεώρημα που δόθηκε στους μαθητές βρίσκεται στη σελίδα 73 του βιβλίου του Ντζιώρα για τα Μαθηματικά της Β' Λυκείου (Εικ. 2).

Ταυτόχρονα το συγκεκριμένο απόσπασμα συνοδευόταν και από μια εφαρμογή του θεωρήματος απόδειξης με επαγωγή (Εικ. 3) του τύπου $1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η : Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύει ὁ τύπος :

$$p(\nu): \qquad 1+2+3+\cdots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη α) Γιά $\nu = 1$ ἡ (1) γίνεται : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, ἀληθής.

β) Ἄς δεχθοῦμε ὅτι ἡ (1) ἰσχύει γιά $\nu = k$ ($k \in N$), δηλ. ὅτι:

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (2)$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$, δηλ. ὅτι:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad (3)$$

Πράγματι, ἄν προσθέσουμε καί στά δύο μέλη τῆς (2) τό $(k+1)$ ἔχουμε:

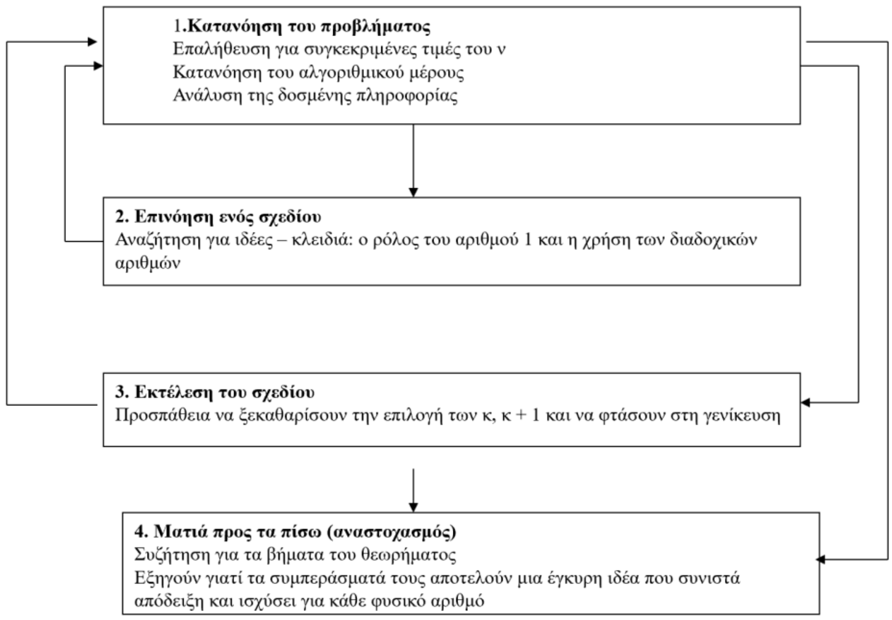
$(1+2+3+\cdots+k)+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, δηλαδή ἡ (3) ἰσχύει.

γ) **Συμπέρασμα** : Στό α) ἀποδείξαμε ὅτι p(1) εἶναι ἀληθής. Στό β) ἀποδείξαμε ὅτι: ἄν p(k) εἶναι ἀληθής, τότε καί ἡ πρόταση p(k + 1) εἶναι ἀληθής *. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in N$.

Εικόνα 3: Εφαρμογή πάνω στο θεώρημα της τέλειας επαγωγής από το βιβλίο του Ντζιώρα (1979)

Τα ερωτήματα προς τους μαθητές ήταν:

- Τι λέει το Θεώρημα της Μαθηματικής Επαγωγής;
- Μπορείτε να διακρίνετε τα βήματα σε μια απόδειξη Μαθηματικής Επαγωγής;
- Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί αυτή η σειρά από βήματα αποτελεί όντως απόδειξη;
- Πώς μας πείθει για την αλήθεια της πρότασης που αποδεικνύει;



Εικόνα 4: Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος της ομάδας καθώς επιχειρεί την ανάγνωση του μαθηματικού κειμένου

Οι μαθητές ξεκίνησαν με το πρώτο βήμα του Polya, αυτό της *κατανόησης* του κειμένου, ώστε να εξασφαλίσουν ότι κατανοούν ορθά το πρόβλημα. Έτσι, επαλήθευσαν το θεώρημα για διάφορες τιμές του ν, αφιέρωσαν χρόνο στο να αναλύσουν τα δεδομένα, και εξέτασαν το κατά πόσο η παρεχόμενη πληροφορία ήταν επαρκής, ελλιπής ή περισσότερη απ' ό,τι χρειαζόταν.

Στη συνέχεια αναρωτήθηκαν κατά πόσο είχαν συναντήσει κάτι παρόμοιο στο παρελθόν, ενέργεια που συμβαδίζει με το δεύτερο βήμα του Polya, αυτό της *επινόησης ενός σχεδίου επίλυσης*. Ανακάλεσαν τις ακολουθίες και τις αριθμητικές προόδους. Ο Polya στην περίπτωση αυτή καλεί τους λύτες να θέσουν στους εαυτούς τους το ερώτημα «*Μπορώ να πω με δικά μου λόγια το πρόβλημα?*», μια ενέργεια που υλοποίησαν οι μαθητές και που εντάσσεται πλήρως στη θεματική «Γλώσσα και Μαθηματικά», μιας που απαιτεί ένα στέρεο γλωσσικό υπόβαθρο. Αναζήτησαν μια ιδέα-κλειδί που χρησιμοποιήθηκε αργότερα για τη λύση (στο βήμα της *εκτέλεσης του σχεδίου επίλυσης*). Η ιδέα αυτή εξελίχθηκε γύρω από το ερώτημα: «Γιατί το θεώρημα ξεκινάει με τον αριθμό 1? Ποια είναι η σημασία της χρήσης των διαδοχικών αριθμών κ και κ+1;». Αυτό στην ουσία οδήγησε και στη λύση.

Τέλος, ενέργειες που θα μπορούσαν να συνδεθούν με το τέταρτο βήμα του Polya (*ματιά πίσω*) αποτελούν οι προσπάθειες των μαθητών να τεκμηριώσουν τη γενίκευση των επιχειρημάτων τους για όλους τους φυσικούς αριθμούς, ξεκινώντας από τον πιο μικρό και τον επόμενό του (το ζευγάρι 1 και 2) και στη συνέχεια προχωρώντας στο επόμενο (2 και 3) και ούτω καθ' εξής.

Όπως φαίνεται και από την Εικόνα 4 στην συνεργατική προσπάθεια επίλυσης κυριάρχησε μια συνεχής μετάβαση από το βήμα της κατανόησης στο βήμα της επινόησης και αντίστροφα. Οι ομάδες συχνά επέστρεφαν μετά την εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης στο βήμα της κατανόησης για να ελέγξουν το συλλογισμό τους.

Ταυτόχρονα, φαίνεται ότι αυτή η προσέγγιση της ανάγνωσης του μαθηματικού κειμένου είχε επίδραση στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών, δηλαδή στο να κατανοήσουν γιατί η συγκεκριμένη σειρά βημάτων αποτελεί απόδειξη. Αυτή η πορεία προς την εννοιολογική κατανόηση πέρασε μέσα από πέντε βήματα.

Το *πρώτο βήμα* συνδέεται με τη σχεδιαστική αρχή της συγκεκριμένης έρευνας, δηλ. να μεταφέρει την ευθύνη από τους συγγραφείς των εγχειριδίων ή τους εκπαιδευτικούς, στους μαθητές. Αυτό πραγματοποιείται μέσα από την εμπειρία της ανάγνωσης ενός μαθηματικού κειμένου ως ένα εν δυνάμει πρόβλημα που πρέπει να λυθεί. Στη συγκεκριμένο θεώρημα, οι μαθητές – αναγνώστες έπρεπε να εντοπίσουν αρχικά τη σειρά των βημάτων και στη συνέχεια να αντιληφθούν γιατί αυτή σειρά βημάτων αποτελεί απόδειξη.

Στο *δεύτερο βήμα* οι μαθητές θεώρησαν το αλγοριθμικό μέρος της διαδικασίας ως την πραγματική απόδειξη.

Το *τρίτο βήμα* άρχισε με τη σταδιακή κατανόηση ότι αν η υπό μελέτη κατάσταση ισχύει για έναν τυχαίο φυσικό τότε ισχύει και για τον επόμενό του. Το σύνολο των φυσικών αποτελεί μια καλώς-διατεταγμένη ακολουθία. Οπότε, αν ο αρχικός αριθμός αυτής της ακολουθίας έχει μια ιδιότητα και αυτή μεταβιβάζεται κατά μήκος της ακολουθίας αυτής από κάθε φυσικό στον επόμενό του, τότε η ιδιότητα αυτή ισχύει για όλους τους φυσικούς, αφού όλοι αποτελούν μέλη αυτής της ακολουθίας.

Στο *τέταρτο βήμα* αναδεικνύεται η συνειδητοποίηση των μαθητών ότι η ιδέα των διαδοχικών φυσικών παίζει κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη. Όντως, αν αυτό το βήμα ολοκληρωθεί με επιτυχία είναι πιθανό να εξαχθεί η αλήθεια της φράσης «$\forall n \in N, P(n)$».

Τέλος, στο *πέμπτο βήμα* οι μαθητές κατάφεραν να κάνουν τη σύνδεση μεταξύ των προηγούμενων βημάτων. Δεδομένης της σπουδαιότητας του τρίτου βήματος, αν ξεκινήσει κανείς με τον μικρότερο φυσικό, τον 1, τότε η ιδιότητα ισχύει και για τον επόμενό του, τον 2, και για τον δικό του επόμενο, τον 3, κ.ο.κ. Αυτό θεμελιώνει την εγκυρότητα της εκφώνησης για όλο το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Στην όλη προσπάθεια των μαθητών ήταν φανερή η δυσκολία να κατανοήσουν γλωσσικά το κείμενο (Adams, 2003), ειδικά το κομμάτι της συμβολικής του γλώσσας (Österholm, 2006). Η επιτυχία τελικά της προσπάθειάς τους φαίνεται να βασίστηκε στο συνδυασμό τριών στοιχείων: (i) Το γεγονός ότι η ευθύνη για την κατανόηση του κειμένου μεταφέρθηκε στους ίδιους τους μαθητές, (ii) το ότι επιλέχθηκε ένα κείμενο σχετικό με την απόδειξη ως το πιο πρόσφορο είδος κειμένου, και (iii) το ότι η όλη προσπάθεια έλαβε χώρα σε ένα πλαίσιο συνεργατικής επίλυσης προβλήματος.

Προφανώς το ότι μια μικρής κλίμακας έρευνα μας έδωσε αυτά τα ευρήματα δεν μας δίνει το δικαίωμα να τα γενικεύσουμε. Μπορούμε όμως να την προτείνουμε ως μια προσέγγιση στα πλαίσια ανάδειξης του σημαντικού ρόλου που παίζει η γλώσσα και κατ' επέκταση η ανάγνωση μαθηματικού κειμένου στην εννοιολογική κατανόηση των μαθητών. Αυτό που πρέπει ίσως να θυμόμαστε είναι ότι παρόλο που η φυσική και η συμβολική γλώσσα στα μαθηματικά κείμενα δεν ακολουθούν τους ίδιους γραμματικούς και συντακτικούς κανόνες, οι μαθητές τις διαβάζουν με τον ίδιο τρόπο. Είναι σημαντική μια διάκριση λοιπόν ανάμεσα στους διαφορετικούς τρόπους κατανόησης των συμβόλων και των συμβολικών εκφράσεων και πώς αυτοί τρόποι επηρεάζουν την κατανόηση όλου του κειμένου. Η χρήση συμβολικής γλώσσας είναι από το πιο δυνατά σημεία των Μαθηματικών, όμως αν η ανάγνωση με κατανόηση του κειμένου που χρησιμοποιεί αυτή τη γλώσσα δεν αναπτυχθεί στους μαθητές, αυτό το δυνατό σημείο δεν θα διαπιστωθεί ποτέ από τους ίδιους.

Όπως πολύ σωστά τονίζει η Adams (2003): «*…Το να γνωρίζεις Μαθηματικά σημαίνει να είσαι σε θέση να εφαρμόσεις τα Μαθηματικά. Με αυτό το σκεπτικό, το να κάνεις Μαθηματικά απαιτεί το να μπορείς να διαβάζεις Μαθηματικά. Οι λέξεις, τα σύμβολα, και οι αριθμοί που δίνουν στην επιστήμη αυτή την υπόστασή της, το πλαίσιο και την ισχύ της, είναι αυτές οι ίδιες οι λέξεις, τα σύμβολα και οι αριθμοί που χρησιμοποιούν οι μαθητές προκειμένου να επικοινωνήσουν ιδέες, να εκτελέσουν διαδικασίες, να εξηγήσουν πορείες επίλυσης και να λύσουν προβλήματα. Επομένως ένας που* ***ξέρει*** *Μαθηματικά* ***κάνει*** *Μαθηματικά, και ένας που* ***κάνει*** *Μαθηματικά είναι* ***αναγνώστης*** *Μαθηματικών*» (σελ. 794).

Βιβλιογραφία

Adams, T. L. (2003). Reading mathematics: More than words can say. *The Reading Teacher*, *56*(8), 786-795.

Austin, J. L., & Howson, A. G. (1979). Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(2), 161-197.

Baroody, A.J. (1993) *Problem Solving, Reasoning and Communicating.* Macmillan

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.

Cockburn, A. D. (2005). *Teaching mathematics with insight: the identification, diagnosis and remediation of young children's mathematical errors*. Routledge.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1984) *Children Learning Mathematics.* Cassell.

Duru, A., & Koklu, O. (2011). Middle school students' reading comprehension of mathematical texts and algebraic equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(4), 447-468.

Englert, C. S., Culatta, B. E., & Horn, D. G. (1987). Influence of irrelevant information in addition word problems on problem solving. *Learning Disability Quarterly, 10*(1), 29–36.

Freudenthal, H. (1983). *The didactical phenomenology of mathematics structures*. Reidel

Goldin, G. A. (1982). Mathematical language and problem solving. *Visible Language, 16*, 221-238.

Headley, M. G. (2016). What is Symbolic Mathematics Language Literacy? A Multilevel Mixed Methods Study of Adolescents in a Middle School [Electronic Dissertation, University of Cincinnati, Education]. http://rave.ohiolink.edu/etdc/view?acc_num=ucin1470045155

Jaworski,B. (1988). "Is" versus "seeing as": constructivism and the mathematics classroom. In D. Pimm (ed.) *Mathematics, Teachers and Children.* Hodder and Stoughton.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A paradigm for cognition*. Cambridge university press.

Lepik, M. (1990). Algebraic word problems: Role of linguistic and structural variables. *Educational Studies in Mathematics, 21*(1), 83–90. https ://doi.org/10.1007/BF003 11017

Loftus, E. J . (1970). *An analysis of the structural variables that determine problem-solving difficulty on a computer-based teletype*. Tech. Report 162, Inst. for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University.

Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 385-401.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. Cambridge University Press.

Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and education*, *20*(6), 507-528.

Morgan, C. (1996). Language and assessment issues in mathematics education. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.) *Proceedings of PME 20* (Vol. 4, pp. 19–26). PME.

Morgan, C., Craig, T., Schuette, M., & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: An overview of research in the field. *Zdm*, *46*(6), 843-853.

Niss, M. & Højgaard Jensen, T. (2002). *Kompetencer og Matematiklcering*, Report no. 18. Undervisningsministeriets forlag, Copenhagen. https://static.uvm.dk/publikationer/2002/kom/hel.pdf)

Österholm, M. (2006). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 325–346.

Papadopoulos, I., & Kyriakopoulou, P. (2022). Reading mathematical texts as a problem-solving activity: the case of the principle of mathematical induction. *CEPS Journal*, *12*(1), 35-53.

Pimm, D. (1987) *Speaking Mathematically: communication in mathematics classrooms*. Routledge and Kegan Paul

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.

Schroeder, T., & Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In A. Shulte & P. Trafton (Eds.), New Directions for Elementary School Mathematics (pp. 31–56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4–36.

Xu, C., Lafay, A., Douglas, H., Di Lonardo Burr, S., LeFevre, J. A., Osana, H. P., Skwarchuk, S., Wylie, J., Simms, V., & Maloney, E. A. (2022). The role of mathematical language skills in arithmetic fluency and word-problem solving for first-and second-language learners. *Journal of Educational Psychology*, *114*(3), 513-539.

Μαμωνά-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2017). *Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά. Η πορεία της σκέψης κατά την αναζήτηση της λύσης*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ντζιώρας, Η. (1979). *Μαθηματικά, Άλγεβρα Τριγωνομετρία Β′ Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Μαθηματικός λόγος και Γλώσσα: προτάσεις για τη συμπερίληψη της κατανόησης κειμένου στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Κοσμάς Τουλούμης[1]

[1] Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ02, ΔΔΕ Κιλκίς
ktoul@otenet.gr

Περίληψη

Η εστίαση στην κειμενική ανάλυση και ερμηνεία μαθηματικών κειμένων, μπορεί να λειτουργήσει ως γέφυρα ανάμεσα στη γλωσσική κατανόηση και τη μαθηματική σκέψη αναδεικνύοντας, παράλληλα, τη σημασία της διεπιστημονικής συνεργασίας για την καλλιέργεια ουσιαστικής μάθησης και κριτικού γραμματισμού. Οι τυπικές μαθηματικές ασκήσεις μπορεί να αντιμετωπιστούν και ως κειμενικά είδη. Είναι δυνατό να αποκωδικοποιηθούν και γλωσσικά με το να προσεγγίζονται η μορφή, η δομή και το ειδικό λεξιλόγιο τους, να διαχωρίζονται τα δεδομένα από τα ζητούμενα, καθώς και να συνειδητοποιείται πως η επίλυση τους περιλαμβάνει την αναγνώριση και τη γλωσσική διατύπωση ακολουθίας λογικών βημάτων. Η παρούσα ανακοίνωση, αφορμάται από μια απόπειρα ανίχνευσης και διδασκαλίας, πριν από κάποια χρόνια, της κειμενικής κατανόησης, ως προς τα σχολικά γνωστικά αντικείμενα, στο Πειραματικό Γυμνάσιο του ΠΑΜΑΚ. Εστιάζει σε συγκεκριμένα παραδείγματα γλωσσικής προσπέλασης και κατανόησης μαθηματικών κειμένων από τα σχολικά εγχειρίδια, λαμβάνοντας υπόψη και τις γνωστικές ταυτότητες, ως προς τη Γλώσσα, των μαθητών και μαθητριών.

Λέξεις κλειδιά:, μαθηματικά προβλήματα, κειμενική ανάλυση, κειμενικοί δείκτες, κειμενική κατανόηση,

Εισαγωγή

Η αλληλεπίδραση των γνωστικών πεδίων, παρά το σχεδόν αυτονόητο, σήμερα, γεγονός πως αποτελεί μια σημαντική παράμετρο για την πληρέστερη κατανόηση του σύγχρονου κόσμου, δεν προσλαμβάνεται με σαφήνεια στο ελληνικό σχολείο. Ως αποτέλεσμα, και παρά τις προσπάθειες των τελευταίων χρόνων για την ανάδειξη διαθεματικών και διεπιστημονικών εννοιών στα Προγράμματα Σπουδών, η διδασκαλία των διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων οδηγεί σχεδόν πάντα τους μαθητές και τις μαθήτριες να αντιμετωπίζουν, τα γνωστικά αντικείμενα και τα διαφορετικά μαθήματα ως αυτόνομα και αποκομμένα μεταξύ τους. Οδηγούνται έτσι στο να διαμορφώνουν διαφορετικές στρατηγικές προσέγγισής τους με αποτέλεσμα να μην αντιλαμβάνονται το πώς για παράδειγμα η γλωσσική κατανόηση μπορεί να συσχετιστεί με τη μαθηματική κατανόηση.

Παρόλα αυτά, η γλωσσική κατανόηση αναγνωρίζεται όλο και περισσότερο από τις/τους εκπαιδευτικούς ως κρίσιμος παράγοντας στη μαθησιακή διαδικασία, ενώ η γλωσσική επάρκεια των μαθητών/τριών συναντάται με τη μαθηματική επάρκεια σε αξιολογήσεις τύπου PISA (Αναστασιάδη-Συμεωνίδη 2019: 28-33). Στα ελληνικά Προγράμματα Σπουδών, εξάλλου, τόσο στα ισχύοντα όσο και στα νέα, προβλέπεται η αξιοποίηση των γνωστικών αντικειμένων στο γλωσσικό μάθημα, ενώ και, αντίστροφα, σε κάθε γνωστικό αντικείμενο περιλαμβάνονται και στόχοι που μπορεί να εκληφθούν ως γλωσσικοί. Η αλληλεξάρτηση γλώσσας και περιεχομένου σε κάθε γνωστικό αντικείμενο καλλιεργεί τον κριτικό και ακαδημαϊκό γραμματισμό των μαθητών, ενισχύοντας την ικανότητά τους να κατανοούν, να παράγουν και να διαπραγματεύονται επιστημονικά κείμενα (Ζάγκα 2014).

Στην περίπτωση των Μαθηματικών, έχει ενσωματωθεί, εδώ και αρκετά χρόνια, σε ευρωπαϊκά Προγράμματα Σπουδών η γλώσσα στη διδασκαλία τους, ενώ εξειδικευμένα διδακτικά μοντέλα για τη διδασκαλία των Μαθηματικών αναγνωρίζουν τη σημασία της (Ζάγκα 2019, 14). Παράλληλα, η διεθνής έρευνα έχει αναδείξει την αλληλεπίδραση ανάμεσα στη γλωσσική επάρκεια και στη μαθηματική κατανόηση, καθώς αυτή δεν είναι απλώς ζήτημα αριθμών και τύπων, αλλά και λόγου, σημασίας και ερμηνείας. Σύμφωνα με τους Fuchs et al. (2006) και Vilenius-Tuohimaa et al. (2008), για παράδειγμα, οι δυσκολίες δεν οφείλονται αποκλειστικά σε αδυναμία κατανόησης μαθηματικών εννοιών, αλλά συχνά σε ανεπαρκή γλωσσική επεξεργασία. Οι Vukovic & Lesaux (2013), καταθέτοντας αποτελέσματα συγκεκριμένης έρευνας σε μαθητές/τριες, επισημαίνουν πως παιδιά με χαμηλή κατανόηση κειμένου παρουσίασαν χαμηλότερη απόδοση σε μαθηματικά προβλήματα με εκτενές λεκτικό περιεχόμενο, καθώς οι λεκτικές διατυπώσεις των μαθηματικών προβλημάτων**,** δημιουργούσαν, ιδιαίτερα όταν τα τελευταία περιείχαν απαιτητικές γλωσσικές δομές, ανυπέρβλητα εμπόδια στην αποκωδικοποίηση της πληροφορίας και στη μετατροπή της σε μαθηματικό μοντέλο.

Η μελέτη της Kim (2021), εξάλλου, δείχνει ότι η κατανόηση κειμένου και οι μαθηματικές δεξιότητες συνδέονται μέσω κοινών γνωστικών μηχανισμών. Συγκεκριμένα, υποστηρίζεται η άποψη, πως η ικανότητα εξαγωγής συμπερασμάτων και ο έλεγχος της προσοχής παίζουν καθοριστικό ρόλο και στις δύο δεξιότητες. Τα παιδιά που μπορούν να συνδέουν πληροφορίες και να εστιάζουν αποτελεσματικά, κατανοούν καλύτερα τόσο τα κείμενα όσο και τα μαθηματικά προβλήματα. Συνεπώς η ενίσχυση αυτών των δεξιοτήτων μπορεί να βελτιώσει τόσο την ανάγνωση όσο και τα μαθηματικά.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, η συμβολή του/της φιλολόγου αποκτά ιδιαίτερη βαρύτητα (βλ. και Μητσιάκη & Ζάγκα στον παρόντα τόμο): ο/η φιλόλογος, εστιάζοντας στην ανάλυση και ερμηνεία του λόγου, μπορεί να λειτουργήσει ως γέφυρα ανάμεσα στη γλωσσική κατανόηση και τη μαθηματική σκέψη. Συνεπώς, μπορεί να συμβάλει στην ενίσχυση της κατανόησης κειμένου στα μαθηματικά, αναδεικνύοντας τη σημασία της διεπιστημονικής συνεργασίας για την καλλιέργεια ουσιαστικής μάθησης.

Ενότητα 1: Η αξιοποίηση γλωσσικών δεξιοτήτων στην επίλυση απλών και σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, αφού προϋποθέτει τη γλωσσική επεξεργασία δεδομένων και ζητουμένων, καθώς και τη σύνδεσή τους σε μια λογική ακολουθία βημάτων απαιτεί, εκτός από αριθμητικές δεξιότητες, και γνωστικές και μεταγλωσσικές στρατηγικές, οι οποίες περιλαμβάνουν:

- **Κατανόηση λεξιλογίου** απλού και σύνθετου (όρους, έννοιες και φράσεις όπως π.χ. "λιγότερο από", "το μισό" ή/και «συνάρτηση» «διχοτόμος», «υποτείνουσα», «εντός, εκτός και επι ταυτά» κ.ά.),
- **Κατανόηση σύνταξης προτάσεων** και λογικής δομής, καθώς πολλά μαθηματικά προβλήματα περιέχουν σύνθετες ή αφηρημένες διατυπώσεις, παθητική φωνή, χρονικές μετατοπίσεις ή/και επαυξημένες κύριες και δευτερεύουσες προτάσεις σε μεγάλες περιόδους).
- **Κατανόηση του πλαισίου** στο οποίο τίθεται το πρόβλημα (π.χ. ιστορικό ή πρακτικό πλαίσιο).

Η όλη διαδικασία προσομοιάζει με την ανάγνωση και ανάλυση ενός κειμένου: απαιτεί κατανόηση λεξιλογίου, σύνταξης, συμφραζομένων και άλλων γλωσσικών επιλογών που μπορεί να λειτουργήσουν ως κειμενικοί δείκτες. Συνεπώς, στην προσέγγιση μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να βοηθήσει η κειμενοκεντρική προσέγγιση αξιοποιώντας κάποια από τα παρακάτω βασικά της στάδια, (Σακελλαρίου 2024): Έκθεση σε κείμενα – Αρχική συγγραφή – Στοχευμένη διδασκαλία/εξάσκηση – Νέα συγγραφή – Αξιολόγηση & αναστοχασμός, τα οποία στη γλωσσική προσέγγιση και διδασκαλία μαθηματικών προβλημάτων, μπορεί να μετασχηματιστούν ως εξής:

1ο στάδιο: Αρχική επίλυση μαθηματικού προβλήματος

- Οι μαθητές/τριες καλούνται να επιχειρήσουν να επιλύσουν ένα δοσμένο μαθηματικό πρόβλημα, χωρίς προηγούμενη αναλυτική καθοδήγηση. Καταγράφουν το σκεπτικό τους. Το στάδιο αυτό λειτουργεί ως «αρχική αξιολόγηση» των δεξιοτήτων τους

2ο στάδιο: Παρουσίαση κειμένων του είδους:

- Οι μαθητές/τριες εκτίθενται σε αντιπροσωπευτικά κείμενα του κειμενικού είδους που θα μελετηθεί (π.χ. ορισμοί, διατύπωση ασκήσεων, κατάθεση σκεπτικού και διαδικασίας λύσης μαθηματικών προβλημάτων).
- Συζητούνται και καταγράφονται τα χαρακτηριστικά αυτών των ειδών

3ο στάδιο: Διδασκαλία και εξάσκηση

- Μέσα από στοχευμένες δραστηριότητες, οι μαθητές/τριες εξασκούνται σε επιμέρους στοιχεία του κειμενικού είδους (δομή, λεξιλόγιο, ύφος, εντοπισμός δεδομένων και ζητουμένων). Οι δραστηριότητες μπορεί να είναι σταδιακά κλιμακούμενες και να οδηγούν στο να συνεργάζονται σε ζευγάρια ή ομάδες

4^{ο} στάδιο: Νέα απόπειρα επίλυσης του αρχικού μαθηματικού προβλήματος

- οι μαθητές/τριες εφαρμόζουν όσα έχουν μάθει. Το σκεπτικό της νέας απόπειρας συγκρίνεται με αυτό του 1^{ου} σταδίου ώστε να φανεί η τυχόν πρόοδος.

5^{ο} στάδιο: Αξιολόγηση και αναστοχασμός

- η αξιολόγηση είναι διαμορφωτική
- οι μαθητές/τριες ενθαρρύνονται να αυτοαξιολογηθούν, να εντοπίσουν δυσκολίες που συνάντησαν κατά τη διαδικασία και να βελτιώσουν περαιτέρω τις απαντήσεις τους.

Δηλαδή, οι μαθητές/τριες αναλύουν τα μαθηματικά προβλήματα ως γλωσσικά κείμενα, εξασκούνται σε γλωσσικές στρατηγικές κατανόησης και μετατρέπουν τη γλωσσική πληροφορία σε μαθηματικό συλλογισμό. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνδεθεί, επίσης, με σύγχρονες προσεγγίσεις συνδυασμού της διδασκαλίας γλώσσας και περιεχομένου, καθώς εφαρμόζεται στην πράξη η μεθοδολογική προσέγγιση του CLIL - Content and Language Integrated Learning **-** (Ζάγκα 2019: 14-15)**:** ο/η εκπαιδευτικός εντοπίζει και αναλύει τις μαθηματικές έννοιες και τις απαιτούμενες γνωστικές δεξιότητες, διαγιγνώσκει τον βαθμό δυσκολίας τους και τελικά σχεδιάζει και οργανώνει τη διδασκαλία του επιλέγοντας στρατηγικές και δραστηριότητες που εξυπηρετούν τους στόχους και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα.

Συνακόλουθα:

- Οι μαθητές/τριες δεν μαθαίνουν μόνο το περιεχόμενο (μαθηματικά), αλλά και τη γλώσσα μέσα από το περιεχόμενο.
- Οι ασκήσεις αντιμετωπίζονται και ως γλωσσικά κείμενα, όπου η μαθηματική επίλυση προϋποθέτει κατανόηση γλωσσικών δεικτών
- Οι φιλόλογοι και οι μαθηματικοί μπορούν να συνεργαστούν για να ενισχύσουν διπλή επάρκεια: και γλωσσική και μαθηματική.

Σε αυτό το πλαίσιο ο ρόλος της/του φιλολόγου μπορεί να είναι καθοριστικός ως προς την καλλιέργεια αναγνωστικών στρατηγικών και στρατηγικών κατανόησης μέσω της καθοδήγησης των μαθητών/τριών ώστε να είναι σε θέση:

- να εντοπίζουν το ρήμα-κλειδί (π.χ. «υπολόγισε», «βρες», «απόδειξε») και γενικότερα τις λέξεις κλειδιά, αλλά και όρους, φράσεις, λεκτικά σήματα που σχετίζονται με τη μορφή και το νοηματικό περιεχόμενο των μαθηματικών προβλημάτων

- να καθοδηγούν τους μαθητές και τις μαθήτριες να διακρίνουν τις πληροφορίες που δίνονται από εκείνες που ζητούνται, να κατανοούν, δηλαδή, ποια είναι τα δεδομένα, ποιο είναι το ζητούμενο, και ποια είναι η λογική ακολουθία βημάτων τόσο για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων όσο και για την τυχόν λεκτική διατύπωση του σκεπτικού της,

- να μετατρέπουν το πρόβλημα σε απλούστερη, κατανοητή μορφή, π.χ. με την αναδιατύπωση του προβλήματος με δικά τους λόγια ή/και την οπτικοποίηση της πληροφορίας (π.χ. με διαγράμματα ή πίνακες)

- να διατυπώνουν ερωτήματα που βοηθούν στην κατανόηση του κειμένου και ενισχύουν τη μεταγνωστική τους επίγνωση. Η/Ο φιλόλογος μπορεί να βοηθήσει τις μαθήτριες και τους μαθητές να αναστοχαστούν πάνω στον τρόπο που διαβάζουν και κατανοούν ένα πρόβλημα μέσω ερωτημάτων όπως «Τι κατάλαβα»; «Πού δυσκολεύτηκα»; «Πώς μπορώ να προσεγγίσω διαφορετικά το πρόβλημα και τι πρέπει να μάθω;»

Παράλληλα, η διεπιστημονική συνεργασία με τον/τη μαθηματικό μπορεί να οδηγήσει σε κοινές δραστηριότητες, όπως:

- τη συμπερίληψη της γλωσσικής διάστασης στην ανάλυση μαθηματικών προβλημάτων.

- τη δημιουργία σεναρίων μάθησης.

- τη συνδιδασκαλία σε τάξεις με στόχο την ενίσχυση της κατανόησης.

Ενότητα 2: Παραδείγματα κειμενικής ανάλυσης μαθηματικών προβλημάτων

Η διαπίστωση των προβλημάτων κειμενικής κατανόησης από τους/τις μαθητές/τριες οδήγησε κατά το σχολικό έτος 2020-21 στη διερεύνηση και διδασκαλία στρατηγικών κατανόησης κειμένων από όλα τα γνωστικά αντικείμενα, με την πρόσθεση μιας διδακτικής ώρας στο μάθημα της Γλώσσας στη Β΄ τάξη του Πειραματικού Γυμνασίου του Πανεπιστημίου Μακεδονίας. Επιλέχθηκαν κείμενα από σχολικά εγχειρίδια διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων, ανάμεσα στα οποία και κείμενα από τα Μαθηματικά.

Η προσέγγιση είχε ως στόχο να διερευνήσει, μεταξύ άλλων, αν η συστηματική αναγνώριση και αξιοποίηση γλωσσικών δεικτών μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη στρατηγικών ανάγνωσης, στην ενίσχυση της κριτικής επεξεργασίας των δεδομένων και στη μετάβαση από τη φυσική γλώσσα στη συμβολική-μαθηματική έκφραση. Ασχολήθηκε, κυρίως, με γλωσσικούς, κειμενικούς στην ουσία δείκτες, που σχετίζονται, εκτός από τα σύμβολα (π.χ. ισότητας, συνεπαγωγής κ.λ.π.), με δεδομένες στα Μαθηματικά γλωσσικές επιλογές, δηλαδή λέξεις, φράσεις ή εκφράσεις που έχουν στόχο να βοηθήσουν ώστε να κατανοηθεί α) η δομή ενός μαθηματικού προβλήματος ή κειμένου, β) η σχέση μεταξύ δεδομένων και ζητουμένων, και γ) η λογική ακολουθία των σκέψεων που πρέπει να γίνει σε κάθε περίπτωση (Πίν. 1).

Κειμενικοί δείκτες	Πράξη - Έννοια
το άθροισμα, όλα μαζί, συνολικά	Πρόσθεση
περισσότερα κατά, αυξήθηκε	Πρόσθεση
διαφορά, λιγότερα κατά	Αφαίρεση
έμειναν, υπολείπονται	Αφαίρεση
φορές, το γινόμενο	Πολλαπλασιασμός
διπλάσιο, τριπλάσιο	Πολλαπλασιασμός
μοιράζω, κάθε, ανά	Διαίρεση
μισό, το ένα τέταρτο	Διαίρεση
Ισούται	Εξίσωση

Πίνακας 1: Κειμενικοί δείκτες που αναφέρονται στις βασικές μαθηματικές πράξεις και έννοιες

Οι κειμενικοί δείκτες λειτουργούν έτσι ως οδηγοί «πλοήγησης» για τα μαθηματικά προβλήματα (Πίν.2.)

Τύπος	Δείκτες	Λειτουργία
Χρονική Σειρά	πρώτα, στη συνέχεια, έπειτα, τελικά	Δείχνουν την αλληλουχία ενεργειών
Αιτιολόγηση	γιατί, επειδή	Δείχνουν αιτία
Συμπέρασμα	Άρα, συνεπώς	Δείχνουν αποτέλεσμα
Σύγκριση	περισσότερο από, λιγότερο από, ίσο με	Δείχνουν σχέσεις ποσοτήτων
Επαναδιατύπωση	δηλαδή, με άλλα λόγια	Βοηθούν στην επεξήγηση
Έμφαση	σημαντικό, προσέχουμε ότι, να θυμάσαι	Τονίζουν κρίσιμα σημεία
Αντίθεση	Αλλά, όμως	Δείχνουν αντίθεση
Προϋπόθεση	αν, εφόσον, στην περίπτωση που…τότε	Θέτουν όρους για την εφαρμογή κανόνα

Πίνακας 2: Κειμενικοί δείκτες που σχετίζονται με γλωσσικές επιλογές και τη λειτουργία τους σε μαθηματικά κείμενα

Με βάση τα παραπάνω και με την στρατηγική η διδασκαλία να κινηθεί από το απλό στο σύνθετο επιλέχθηκε η εξής πορεία κατά τη διδασκαλία:

1. **Εντοπισμός (Υπογράμμιση** ή **χρωματισμός** των κειμενικών δεικτών στα επιλεγμένα παραδείγματα).
2. **Κατάταξη** των δεικτών σε κατηγορίες (π.χ. αιτιακής σχέσης, χρονικής αλληλουχίας).
3. **Συζήτηση** με τους μαθητές: «Τι μας λέει αυτή η λέξη; Τι ενέργεια πρέπει να κάνουμε;»
4. **Κατασκευή** πίνακα αναφοράς (όπως στους Πίνακες 1 και 2) με τους βασικούς δείκτες.

Τα προς μελέτη παραδείγματα αντλήθηκαν από το σχολικό εγχειρίδιο Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου και δυο από αυτά ήταν τα παρακάτω:

Παράδειγμα 1

Ο Πέτρος και ο Σάκης αμείβονται για την εργασία τους με την ώρα. Ο Πέτρος κερδίζει 2€ την ώρα περισσότερα από τον Σάκη. Όταν ο Πέτρος εργάζεται 7 ώρες και ο Σάκης 5 ώρες, ο Σάκης κερδίζει 26€ λιγότερα από τον Πέτρο. Να βρεθεί το ωρομίσθιο του καθενός

Προέλευση: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου Μέρος Α' - 1.4. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων, σελ. 30.

Για να εντοπιστούν οι κειμενικοί δείκτες στο παραπάνω πρόβλημα, επισημάνθηκαν εκείνες οι φράσεις που παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για τις σχέσεις και τις ποσότητες και βοηθούσαν στη μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος. Παράλληλα έγινε λεξιλογική εξομάλυνση καθώς ορισμένοι μαθητές δυσκολεύτηκαν με τη λέξη «ωρομίσθιο».

Κειμενικοί δείκτες	**Λειτουργία**
«με την ώρα»	καθορίζει το είδος της αμοιβής (ωριαία).
«2€ την ώρα **περισσότερα**»	ποσοτική σχέση ανάμεσα στα ωρομίσθια.
«7 ώρες»	ώρες εργασίας του Πέτρου.
«5 ώρες»	ώρες εργασίας του Σάκη
«26 € **λιγότερα»**	διαφορά στις συνολικές αμοιβές

Πίνακας 3: Κειμενικοί δείκτες που σχετίζονται με τις γλωσσικές επιλογές και τη λειτουργία τους στο 1ο παράδειγμα

Το παράδειγμα αφορά προβλήματα με χρήση εξισώσεων και προσδιορισμό ωρομίσθιου μέσω υπολογισμού αμοιβών. Το πρόβλημα με το ωρομίσθιο του Πέτρου και του Σάκη απαιτεί κατανόηση των εκφράσεων «2 € την ώρα περισσότερα», «26 € λιγότερα», οι οποίες δεν είναι μόνο αριθμητικά δεδομένα, αλλά γλωσσικά μοτίβα που οδηγούν στη μαθηματική μοντελοποίηση.
Εδώ, η συστηματική αναγνώριση των κειμενικών δεικτών αποδεικνύει τη σημασία της γλωσσικής ανάλυσης στις μαθηματικές διαδικασίες: ο προσδιορισμός ότι η αμοιβή γίνεται «με την ώρα» ορίζει το είδος της ποσότητας (ωρομίσθιο), η φράση «2 € την ώρα περισσότερα» εκφράζει ποσοτική σχέση ανάμεσα στα ωρομίσθια, ενώ οι «7 ώρες» και «5 ώρες» καθώς και η διαφορά «26 € λιγότερα» παρέχουν τα δεδομένα που οδηγούν στην κατάρτιση της εξίσωσης για την επίλυση του προβλήματος. Αυτή η προσέγγιση ενισχύει την ικανότητα των μαθητών να μετασχηματίζουν το λεκτικό πρόβλημα σε μαθηματικό μοντέλο, καλλιεργώντας ταυτόχρονα δεξιότητες κατανόησης και ανάλυσης κειμένου

Παράδειγμα 2
Να βρεθεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν ενός κυλίνδρου, όταν:
α) Έχει ακτίνα βάσης 3 cm και ύψος 5 cm.
β) Έχει διάμετρο βάσης 4 cm και ύψος 6 cm.
γ) Έχει περίμετρο βάσης 15,7 cm και ύψος 32 cm.
δ) Έχει εμβαδόν βάσης 50,24 cm2 και ύψος 2 dm.
(Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Β4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου, σελίδα 211)

Κειμενικός δείκτης	**Λειτουργία**
εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας	προσδιορίζει το 1ο ζητούμενο: υπολογισμός επιφάνειας κυλινδρικής πλευράς
ολικό εμβαδόν	προσδιορίζει το 2ο ζητούμενο: συνολικό εμβαδόν κυλίνδρου
ακτίνα βάσης, διάμετρος βάσης, περίμετρος βάσης, εμβαδόν βάσης	δεδομένα για υπολογισμούς (μετατροπές όπου χρειάζεται)

ύψος	δεδομένο για υπολογισμούς
να βρεθεί (προσέγγιση με βάση την κατανόηση κειμένου)	οδηγία ώστε να μετατραπούν και να εφαρμοστούν σωστά οι τύποι

Πίνακας 4: Η λειτουργία των κειμενικών δεικτών του 2^{ου} παραδείγματος

Το παράδειγμα αφορά τον υπολογισμό του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας και του ολικού εμβαδού κυλίνδρου, εκκινώντας από διάφορα δεδομένα (ακτίνα, διάμετρο, περίμετρο ή εμβαδόν βάσης και ύψος). Η αναγνώριση των κειμενικών δεικτών, όπως οι όροι «εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας» και «ολικό εμβαδόν», είναι κρίσιμη για τον προσδιορισμό των ζητούμενων μεγεθών. Η φράση «ολικό εμβαδόν» πρέπει να κατανοηθεί πρώτα γλωσσικά ώστε να επιλεγεί ο σωστός μαθηματικός τύπος. Επιπλέον, η καταγραφή και κατανόηση των όρων που προσδιορίζουν τις διαστάσεις της βάσης (ακτίνα, διάμετρος, περίμετρος ή εμβαδόν βάσης) και του ύψους καθορίζει την επιλογή και χρήση των κατάλληλων μαθηματικών τύπων και μετατροπών μονάδων μέτρησης. Επομένως, πραγματοποιήθηκε λεξιλογική και σημασιολογική ανάλυση των λέξεων «ακτίνα», «διάμετρος» και «περίμετρος».

Συμπεράσματα και περαιτέρω προτάσεις

Η αξιοποίηση των παραπάνω παραδειγμάτων στην εκπαιδευτική πράξη μπορεί να βασιστεί σε σειρά διδακτικών πρακτικών που προάγουν τόσο τη γλωσσική όσο και τη μαθηματική επάρκεια των μαθητών:

- Με αφετηρία το πρώτο παράδειγμα, η εστίαση στην αποκωδικοποίηση των λέξεων-κλειδιών («με την ώρα», «περισσότερα», «ώρες», «λιγότερα») ενισχύει τη γλωσσική κατανόηση και επιτρέπει τη δημιουργία ισοδυνάμων μαθηματικών εκφράσεων, προσφέροντας πρακτικές εφαρμογές στη χρήση εξισώσεων.

- Στο δεύτερο παράδειγμα, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να σχεδιάσουν δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές εντοπίζουν και σχολιάζουν τους κειμενικούς δείκτες που καθορίζουν τις ζητούμενες ποσότητες και τα δεδομένα, όπως το εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κυλίνδρου.

- Η διεπιστημονική συνεργασία φιλολόγων και μαθηματικών στην ανάλυση τέτοιων προβλημάτων μπορεί να συμβάλει στον εμπλουτισμό των διδασκαλιών, καθώς οι μαθητές μαθαίνουν να συνδυάζουν τη γλωσσική κατανόηση με τον μαθηματικό συλλογισμό.

• Προτείνεται η εφαρμογή μεταγνωστικών στρατηγικών, όπου οι μαθητές αναστοχάζονται για τον ρόλο κάθε κειμενικού δείκτη και πώς αυτός καθοδηγεί τη μαθηματική επεξεργασία, προάγοντας την αυτονομία στην επίλυση προβλημάτων.

• Τέλος, η συστηματική διδασκαλία της ακριβούς ερμηνείας όρων, όπως «ολικό εμβαδόν» και «ωρομίσθιο», αλλά και μαθηματικής ορολογίας και εννοιολόγησης - όπου θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και ανάλογα λεξικά που θα δημιουργήσουν οι ίδιοι οι μαθητές/τριες (π.χ το Λεξικό Μαθηματικών Όρων Math E-Lexicom του 2ου Πειραματικού Γυμνασίου Κιλκίς, βλ. Χαριτίδου 2025) - μπορεί να ενισχύσει το επιστημονικό λεξιλόγιο και να προετοιμάσει τους μαθητές και τις μαθήτριες για πιο σύνθετες μαθηματικές και γλωσσικές απαιτήσεις.

Η συνδυαστική αυτή προσέγγιση, βασισμένη στην ανάδειξη των κειμενικών δεικτών, συμβάλλει αποφασιστικά στην αποτελεσματική κατανόηση και επίλυση προβλημάτων, ενώ ταυτόχρονα διευρύνει το θεωρητικό και πρακτικό πλαίσιο της διδακτικής των μαθηματικών με επίκεντρο τη γλωσσική επάρκεια.

Η γλωσσική προσέγγιση βοηθά τον μαθητή και τη μαθήτρια, να «ξεκλειδώσουν», ανάλογα και με τη γλωσσική τους ταυτότητα, το νόημα του προβλήματος, να το κατανοήσουν ως αφήγηση και να το μετατρέψουν σε μαθηματική μορφή. Ο/η φιλόλογος δεν λύνει το πρόβλημα, αλλά διευκολύνει την πρόσβαση στη λογική του. Η καλλιέργεια και η αξιοποίηση γλωσσικών δεξιοτήτων στην επίλυση σύνθετων μαθηματικών προβλημάτων οδηγεί:

• Στη βαθύτερη κατανόηση εννοιών, των ιδεών και των νοημάτων που υπάρχουν πίσω από τις έννοιες, ώστε να οι μαθητές/τριες να μπορούν να τις εφαρμόζουν σε διαφορετικά πλαίσια.

• Στη μεταγλωσσική επίγνωση των μαθητών/τριών, στην ικανότητα τους να σκέφτονται και να αναλύουν πώς λειτουργεί η γλώσσα και ο λόγος σε μαθηματικό πλαίσιο— δηλαδή να έχουν επίγνωση των γλωσσικών μορφών, των εννοιών που εκφράζονται και του τρόπου που οργανώνεται η επικοινωνία, κάτι που ενισχύει τη μαθησιακή τους ευελιξία.

• Στην ενίσχυση του μαθηματικού γραμματισμού, όχι μόνο ως υπολογιστικής ικανότητας αλλά και ως ικανότητας ερμηνείας και επιχειρηματολογίας, δηλαδή να οδηγεί τις μαθήτριες και τους μαθητές να είναι σε θέση όχι μόνο να εκτελούν αριθμητικούς υπολογισμούς, αλλά και να κατανοούν τα μαθηματικά ως γλώσσα, να ερμηνεύουν δεδομένα, να αιτιολογούν απόψεις και να επιχειρηματολογούν με βάση μαθηματικά επιχειρήματα.

Η προσέγγιση αυτή θα μπορούσε να επεκταθεί και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών που συνδέονται με γλωσσικές δεξιότητες όπως η συλλογιστική της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Για παράδειγμα η μαθηματική απόδειξη είναι κειμενικό είδους το οποίο προσομοιάζει με τη δομή ενός ρητορικού κειμένου, καθώς περιλαμβάνει: α) εισαγωγή υπόθεσης, β) συλλογιστικά βήματα και γ) συμπερασματική πρόταση Αντί να αντιμετωπίζεται ως μια αυστηρά φορμαλιστική δομή, μπορεί να θεωρηθεί, επίσης, ως μια επικοινωνιακή πράξη μεταξύ συγγραφέα (μαθητή/μαθηματικού) και αναγνώστη (το κοινό στο οποίο απευθύνεται).

Συνεπώς, οι μαθητές/τριες είναι δυνατό να ασκηθούν να διατυπώνουν και αποδείξεις **όχι απλώς με μαθηματικά εργαλεία,** αλλά **με τη γλωσσική και ρητορική πρακτική** που συνοδεύει το συγκεκριμένο είδος. Η εξάσκηση και η πρακτική στη μαθητική συγγραφή αποδείξεων μπορεί να αποβεί εξαιρετικά ωφέλιμη και γλωσσικά, καθώς η απόδειξη εμπεριέχει λεξιλόγιο (π.χ. “έστω”, “άρα”, “επομένως”), αλλά και δομή (πρόταση → αιτιολόγηση → συμπέρασμα), ενώ, επιπλέον υπάρχει διαφορά ανάμεσα στο σκεπτικό της «απόδειξης» (προσωπική κατανόηση) και την «απόδειξη» που προορίζεται να τη διαβάσει κάποιος άλλος (επικοινωνιακή πράξη).

Συμπερασματικά, η γλωσσική κατανόηση αποτελεί βασικό συντελεστή της επιτυχούς ενασχόλησης με τα μαθηματικά. Οι μαθητές/τριες που δυσκολεύονται γλωσσικά, συχνά δεν αποτυγχάνουν στα μαθηματικά λόγω έλλειψης μαθηματικής γνώσης, αλλά επειδή αδυνατούν να κατανοήσουν το ίδιο το πρόβλημα. Επομένως, η διδασκαλία των μαθηματικών θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη και τη γλωσσική διάσταση και να ενσωματώνει κατάλληλες στρατηγικές υποστήριξης. Σε αυτό το πλαίσιο, συστηματική αναγνώριση και αξιοποίηση κειμενικών δεικτών και η ένταξη τους στα στάδια της κειμενοκεντρικής προσέγγισης που αναφέρθηκαν παραπάνω ενισχύει την κατανόηση και επίλυση μαθηματικών προβλημάτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, συνδέοντας τη γλωσσική επάρκεια με τη μαθηματική σκέψη, γεγονός που επιβεβαιώνει τη σημασία διεπιστημονικών προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., Schatschneider, C., & Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 98*(1), 29–43. https://doi.org/10.1037/0022-0663.98.1.29

Kim, Y.-S. G. (2021). Inferencing Skill and Attentional Control Account for the Relation between Reading Comprehension and Mathematics Performance. *Frontiers in Psychology, 12,* 709944.

Vilenius-Tuohimaa, P. M., Aunola, K. & Nurmi, J. (2008). The association between mathematical word problems and reading comprehension. *Educational Psychology Review*, 28(4), 409–426. https://doi.org/10.1080/01443410701708228

Vukovic, R. K., & Lesaux, N. K. (2013). The language of mathematics: Investigating the ways language counts for children’s mathematical development. *Journal of Experimental Child Psychology, 115*(2), 227–244. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.02.002

Αναστασιάδη-Συμεωνίδη, Α. (2019). Η διευρυμένη μορφή της προσέγγισης της Ολοκληρωμένης Μάθησης Περιεχομένου και Γλώσσας. *Φιλόλογος 174-175:* 27-45.

Ζάγκα, Ε. (2014). *Η διδασκαλία της γλώσσας με βάση το περιεχόμενο. Από τη θεωρία στην πράξη*. Θεσσαλονίκη: Βάνιας.

Ζάγκα, Ε. (2019). Όταν η γλώσσα και το περιεχόμενο συναντιούνται στη διδασκαλία: βασικές αρχές και στόχοι της προσέγγισης CLIL. *Φιλόλογος 174-175:* 7-19.

Σακελλαρίου, Α. (2024) *Διδασκαλία της Ελληνικής Γλώσσας με έμφαση στα Κειμενικά Είδη.* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-986

Χαριτίδου, Ο. (2025). Καινοτομία: καλύπτοντας τα κενά. Παρουσίαση στη *15η Διεθνή Μαθηματική Εβδομάδα.* Θεσσαλονίκη. Μάιος 2025. Διαθέσιμο στο διαδίκτυο https://oly-charitidou.blogspot.com/p/blog-page_13.html.

Δυο παραγνωρισμένες δεξιότητες: κατανόηση και παραγωγή μαθηματικού κειμένου

Τεύκρος Μιχαηλίδης[1], Πολυξένη Τσίτσα[2]

[1]Μαθηματικός - Συγγραφέας, Θαλής + Φίλοι
mtefcros@gmail.com
[2]Μαθηματικός M.Ed., 9ο Γυμνάσιο Αχαρνών
polyxtsitsa@gmail.com

Περίληψη

Η γλώσσα διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στη μαθηματική μάθηση· είναι μέσο επικοινωνίας αλλά και εργαλείο για τη μαθηματική σκέψη. Πρόσφατες έρευνες τείνουν να επιβεβαιώσουν την άποψη – την οποία συμμερίζονται αρκετοί εκπαιδευτικοί – ότι σημαντικό μέρος της δυσκολίας που συναντούν οι μαθητές/τριες στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων διατυπωμένων στην τρέχουσα γλώσσα, δεν οφείλονται σε θεμελιώδη, μαθηματικής φύσεως ελλείματα, αλλά στην αδυναμία κατανόησης του κειμένου που περιγράφει το πρόβλημα. Στην εργασία μας διατυπώνουμε μια πρόταση στρατηγικής για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου θέματος. Η μέθοδος βασίζεται στην υπόθεση ότι οι δεξιότητες παραγωγής και κατανόησης μαθηματικού κειμένου αλληλοσυμπληρώνονται και ενισχύονται αμοιβαία. Από πρακτική άποψη, παρουσιάζουμε, ενδεικτικά, ζεύγη συναφών προβλημάτων χωρίς ιδιαίτερη μαθηματική δυσκολία, αλλά με έμφαση στην ανάγκη σωστής διαχείρισης της γλώσσας. Στο ένα φύλλο εργασίας δίνεται ένα πρόβλημα και ζητείται από τον/την μαθητή/τρια να κατανοήσει τη διατύπωση και να προβεί στην επίλυσή του, ενώ στο άλλο δίνεται ένα ανάλογο πρόβλημα λυμένο και του/της ζητείται να περιγράψει λεκτικά τη λύση. Τα προβλήματα αναφέρονται στην ύλη του Γυμνασίου, πιστεύουμε όμως ότι ανάλογες στρατηγικές μπορούν να εφαρμοστούν τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Λύκειο.

Λέξεις κλειδιά: μαθηματικό κείμενο, κατανόηση κειμένου, παραγωγή κειμένου, ορολογία.

Εισαγωγή

Η σχέση μεταξύ γλώσσας και μαθηματικών αποτελεί αντικείμενο συστηματικής διερεύνησης τις τελευταίες δεκαετίες (Planas & Pimm, 2023). Παράλληλα, η ανάγνωση και κατανόηση κειμένων μαθηματικού και γενικότερα επιστημονικού περιεχομένου έχει αποκτήσει ιδιαίτερη σημασία στη σύγχρονη εκπαιδευτική έρευνα (Tang et al., 2022). Ερευνητικά δεδομένα καταδεικνύουν ότι οι γλωσσικές δεξιότητες και η μαθηματική επίδοση συνδέονται στενά και αλληλεπιδρούν καθοριστικά (Peng et al., 2020). Ειδικότερα, η μελέτη των πρόσφατων αποτελεσμάτων στις πανελλαδικές εξετάσεις, αλλά και σε σημαντικές διεθνείς αξιολογήσεις στα μαθηματικά (Θωμαΐδης, 2025) έδειξε ότι μεγάλο μέρος των λαθών στην επίλυση προβλημάτων οφείλεται στην αδυναμία των μαθητών/τριών να κατανοήσουν το πρόβλημα, ενίοτε δε και στην προβληματική διατύπωσή του εκ μέρους των θεματοθετών. Η διερεύνηση αυτής της διασύνδεσης είναι κρίσιμη για τον σχεδιασμό

και την εφαρμογή διδακτικών προσεγγίσεων που αποσκοπούν στη βελτίωση των μαθηματικών επιδόσεων των μαθητών/τριών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ενδεικτικά είναι τα συμπεράσματα μιας έρευνας που διεξήχθη ανάμεσα σε μαθητές/τριες και προπτυχιακούς φοιτητές/τριες (Österholm, 2006), η οποία έδειξε ότι οι δυσκολίες στην κατανόηση μαθηματικού κειμένου, γραμμένου στη φυσική γλώσσα χωρίς συμβολισμούς, και η κατανόηση κειμένου με ιστορικό περιεχόμενο παρουσιάζουν σημαντικές ομοιότητες και αναλογίες. Αυτό ενισχύει την άποψη ότι οι προσπάθειες για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να ενταθούν και προς την κατεύθυνση της άσκησης στην κατανόηση κειμένου, ακόμη και όταν από μαθηματική άποψη το περιεχόμενο μοιάζει απλό.
Η πρόσληψη μαθηματικών κειμένων – είτε πρόκειται για σχολικά εγχειρίδια είτε για προβλήματα προς επίλυση – προϋποθέτει τον συντονισμό γλωσσικών και γνωστικών δεξιοτήτων (Österholm, 2006· Αβούρη, 2015). Παράλληλα, η παραγωγή μαθηματικού λόγου, τόσο γραπτού όσο και προφορικού, συνιστά ουσιαστική διαδικασία για την εμβάθυνση της κατανόησης και την σταδιακή καλλιέργεια μαθηματικού γραμματισμού (Moschkovich, 2010· Erath et al., 2018).
Επιπλέον, πρόσφατες μελέτες, όπως εκείνη του Belano (2024) σε μαθητές/τριες της 8ης τάξης (αντίστοιχη της Β΄ Γυμνασίου στο ελληνικό σύστημα), επιβεβαιώνουν την ύπαρξη θετικής συσχέτισης μεταξύ της αναγνωστικής ευχέρειας και της επίδοσης στα μαθηματικά. Συνεπώς, ο ρόλος της γλώσσας δεν περιορίζεται στην ανάκτηση και οργάνωση γνώσεων, αλλά επηρεάζει τις σύνθετες γνωστικές διεργασίες που απαιτούνται για την αντιμετώπιση πιο απαιτητικών μαθηματικών προβλημάτων.

Θεωρητικό Πλαίσιο

Η θεμελιώδης σχέση γλώσσας και μαθηματικών

Η μελέτη των Peng et al. (2020) αναδεικνύει την πολυδιάστατη αλληλεπίδραση μεταξύ γλωσσικών δεξιοτήτων και μαθηματικών ικανοτήτων. Σύμφωνα με τα ευρήματα, η κατανόηση κατά την ανάγνωση συνδέεται στενά με την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, γεγονός που καταδεικνύει ότι οι διαδικασίες κατανόησης κειμένου αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα της μαθηματικής σκέψης. Η γλωσσική επάρκεια δεν λειτουργεί απλώς ως υποστηρικτικός παράγοντας, αλλά ως θεμελιώδης συνιστώσα της μαθηματικής επίδοσης, καθώς συμβάλλει τόσο στην ορθή ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών όσο και στην εφαρμογή στρατηγικών επίλυσης. Τα αποτελέσματα της μελέτης υποδεικνύουν ότι στοχευμένες διδακτικές παρεμβάσεις, οι οποίες καλλιεργούν γλωσσικές δεξιότητες, μπορούν να έχουν πολλαπλασιαστικά οφέλη στη μαθηματική μάθηση. Επιπρόσθετα, ο βαθμός κατανόησης μαθηματικών κειμένων φαίνεται να επηρεάζει όχι μόνο την επιτυχία στην αντιμετώπιση συγκεκριμένων προβλημάτων, αλλά και την ανάπτυξη εννοιολογικής σκέψης, η οποία αποτελεί προϋπόθεση για την οικοδόμηση βαθύτερης και πιο διαρκούς γνώσης.

Το θεωρητικό κυκλικό μοντέλο που προτείνουν οι Bergqvist και Österholm συνδέει οργανικά τη διαδικασία ανάγνωσης με εκείνη της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, υπογραμμίζοντας ότι η κατανόηση ενός μαθηματικού κειμένου προϋποθέτει την ενεργοποίηση εξειδικευμένων γνωστικών λειτουργιών, οι οποίες διαφοροποιούνται ουσιωδώς από τις στρατηγικές που εφαρμόζονται στην ανάγνωση λογοτεχνικών ή πληροφοριακών κειμένων. Στο πλαίσιο αυτό, η ανάγνωση μαθηματικών κειμένων μπορεί να νοηθεί ως δραστηριότητα επίλυσης προβλήματος (Bergqvist & Österholm, 2019). Η διαδικασία δεν περιορίζεται στη μηχανική αποκωδικοποίηση συμβόλων ή προτάσεων, αλλά απαιτεί ενεργή ερμηνεία, παραγωγή νοημάτων και χρήση μεταγλώσσας. Τα στοιχεία αυτά συνιστούν θεμελιώδεις συνιστώσες για την επιτυχία, καθώς επιτρέπουν στους μαθητές και τις μαθήτριες να συνδέουν την κατανόηση του κειμένου με την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, οδηγώντας σε βαθύτερη εννοιολογική μάθηση.

Η έρευνα των Riccomini et al. (2015) τονίζει τη σημασία εισαγωγής και εκμάθησης μαθηματικού λεξιλογίου με στόχο την κατανόηση, σύνδεση και διαφοροποίηση νοημάτων και προτείνει την αναδιατύπωση όρων, τη χρήση οπτικοποίησης κ.ά.

Το θεωρητικό πλαίσιο της Moschkovich (2024) διευρύνει την έννοια της «γλώσσας» πέρα από την περιοριστική διάσταση του λεξιλογίου και προτείνει την κατανόηση των μαθηματικών ως πρακτικής λόγου. Στο πλαίσιο αυτό, οι μαθηματικές έννοιες δεν αντιμετωπίζονται ως δεδομένα προς απομνημόνευση, αλλά ως αντικείμενα που διαπραγματεύονται και οικοδομούνται μέσω της επικοινωνίας και της ενεργού συμμετοχής σε μαθηματικές δραστηριότητες, όπως η επίλυση προβλημάτων, η αιτιολόγηση και η μοντελοποίηση. Η έμφαση μετατοπίζεται από μια ελλειμματική θεώρηση των «γλωσσικών αδυναμιών» σε μια προοπτική που αναδεικνύει τις «προόδους» των μαθητών/τριών στην παραγωγή και κατανόηση μαθηματικού λόγου.

Η παραδοσιακή διδακτική προσεγγίζει συχνά την ανάγνωση και την επίλυση προβλημάτων ως δύο διακριτές δραστηριότητες. Ωστόσο, οι Papadopoulos & Kyriakopoulou (2022) υποστηρίζουν ότι η κατανόηση ενός μαθηματικού κειμένου — και ιδίως μιας απόδειξης— συνιστά από μόνη της μια μορφή επίλυσης προβλήματος. Στην πορεία κατανόησης, οι μαθητές/τριες καλούνται να αναγνωρίσουν τις λογικές συνέπειες, να συμπληρώσουν τα κενά που αφήνει ο συγγραφέας και να ανασυγκροτήσουν την επιχειρηματολογία, δεδομένου ότι η γραμμική παρουσίαση των αποδείξεων στα σχολικά εγχειρίδια συχνά αποκρύπτει τον πραγματικό συλλογισμό που τις θεμελιώνει. Μέσα από την ενεργό εμπλοκή τους στην ανακατασκευή της μαθηματικής επιχειρηματολογίας, οι μαθητές/τριες ενθαρρύνονται να αναλάβουν έναν ουσιαστικό και δημιουργικό ρόλο στη διαμόρφωση της νοητικής τους διεργασίας.

Η έρευνα των Lenz et al. (2021) τεκμηριώνει τα οφέλη της χρήσης «γλωσσολογικά ευαίσθητων» (language-responsive) διδακτικών υλικών και στρατηγικών διδακτικής υποστήριξης (scaffolding) για μαθητές/τριες με χαμηλή επάρκεια στη γλώσσα διδασκαλίας, καθώς η προσέγγιση αυτή διευκολύνει τη μάθηση εννοιών όπως τα κλάσματα. Ωστόσο, η μελέτη των Wahyuni et al. (2021) προειδοποιεί ότι η υπερβολική απλοποίηση του μαθηματικού λόγου μπορεί να αποδειχθεί αντιπαραγωγική σε βάθος χρόνου, περιορίζοντας τη δυνατότητα των μαθητών/τριών να αναπτύξουν ουσιαστική μαθηματική κατανόηση.

Η παιδαγωγική πρόκληση, επομένως, έγκειται στην εξισορρόπηση της αναγκαίας υποστήριξης με την παράλληλη διατήρηση της έκθεσης των μαθητών/τριών στον αυθεντικό και πολύπλοκο μαθηματικό λόγο. Η στρατηγική αυτή διασφαλίζει ότι, ενώ οι μαθητές/τριες έχουν πρόσβαση σε υλικά που διευκολύνουν την κατανόηση, δεν αποστερούνται από την εμπειρία συμμετοχής στις γλωσσικές και εννοιολογικές απαιτήσεις που είναι απαραίτητες για την πλήρη κατάκτηση των μαθηματικών.

Η παραγωγή μαθηματικού λόγου ως μάθηση

Οι Menezes και Costa (2019) υπογραμμίζουν τη σημασία της γραφής ως εργαλείου μάθησης στα μαθηματικά, τονίζοντας ότι δεν αποτελεί απλώς μέσο επικοινωνίας μαθηματικών ιδεών, αλλά ένα δυναμικό εργαλείο που βοηθά τους μαθητές και τις μαθήτριες να οργανώσουν, να αναστοχαστούν και να εμβαθύνουν στη μαθηματική τους κατανόηση. Η διδακτική αξιοποίηση της γραφής στα μαθηματικά στο πλαίσιο του «writing to learn mathematics» καλλιεργεί την ακρίβεια στη μαθηματική σκέψη, ενισχύει τη γνωστική και μεταγνωστική δραστηριότητα και παράλληλα αναπτύσσει την ικανότητα επικοινωνίας. Η πράξη της συγγραφής, καθώς απαιτεί οργάνωση και αναστοχασμό, συμβάλλει στη συνειδητοποίηση των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται και ενισχύει την ικανότητα επιλογής της κατάλληλης στρατηγικής για την επίλυση προβλημάτων.

Στο ίδιο πνεύμα, οι King et al. (2020) τεκμηριώνουν ότι η γραφή βελτιώνει την ικανότητα των μαθητών/τριών να εξηγούν τον συλλογισμό τους και να συνδέουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες με συγκεκριμένα προβλήματα. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η διάκριση ανάμεσα στις «διαδικασίες» (αυτό που κάνεις) και στους «συλλογισμούς» (γιατί το κάνεις), η οποία επιτρέπει στους μαθητές και τις μαθήτριες να υπερβούν την απλή απομνημόνευση βημάτων και να αναπτύξουν ουσιαστική εννοιολογική κατανόηση. Η ικανότητα παραγωγής γραπτών μαθηματικών αιτιολογήσεων συνδέεται, μάλιστα, άμεσα με τη βελτίωση των επιδόσεων σε ανοιχτού τύπου αξιολογήσεις.

Τέλος, οι Erath et al. (2018) διαπιστώνουν ότι η περιορισμένη ανάπτυξη των γλωσσικών δεξιοτήτων, ιδιαίτερα στο επίπεδο του επεξηγηματικού λόγου, περιορίζει τις μαθησιακές ευκαιρίες των μαθητών/τριών.

Διδακτική Πρόταση: Από την κατανόηση στην παραγωγή και αντιστρόφως

Η στρατηγική που επιχειρούμε να αναπτύξουμε στοχεύει στην αμοιβαία ενίσχυση των δεξιοτήτων κατανόησης και παραγωγής κειμένου. Ως μέσον επιλέγουμε την δημιουργία ζευγών συναφών μαθηματικών δραστηριοτήτων. Στο ένα πρόβλημα οι μαθητές/τριες ασκούνται στην κατανόηση μαθηματικού κειμένου, δηλαδή στην κατανόηση και εκτέλεση μιας σειράς εντολών, οι οποίες ενίοτε περιλαμβάνουν ασάφειες ή ελλείψεις τις οποίες ο λύτης καλείται να εντοπίσει και ενδεχομένως να αντιμετωπίσει. Στο άλλο, το οποίο έχει συναφές αντικείμενο, παρουσιάζεται μια διαδικασία επίλυσης την οποία οι μαθητές/τριες καλούνται να περιγράψουν λεκτικά. Πιστεύουμε ότι η εναλλαγή των λειτουργιών κατανόησης και παραγωγής κειμένου θα ελευθερώσει τους μαθητές και τις μαθήτριες από την τάση μηχανικής εκτέλεσης εντολών και θα τους ενθαρρύνει να μελετούν σε βάθος και να αξιολογούν τα προβλήματα που καλούνται να αντιμετωπίσουν.

Τα ενδεικτικά ζεύγη προβλημάτων που προτείνουμε είναι σύμφωνα με την διδακτέα ύλη των Μαθηματικών του Γυμνασίου, πιστεύουμε όμως ότι αυτή η στρατηγική, με ανάλογα προβλήματα μπορεί να επεκταθεί τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Λύκειο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1Α. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ:
ΤΕΤΡΑΔΙΑ, ΜΟΛΥΒΙΑ ΚΑΙ Η ΠΡΟΚΛΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΫΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ο Αργύρης ετοιμάζεται για τη νέα σχολική χρονιά. Μετράει τα χρήματά του και διαπιστώνει ότι μπορεί να διαθέσει 50 ευρώ για να αγοράσει τετράδια και μολύβια. Στο βιβλιοπωλείο της γειτονιάς του βρίσκει τετράδια που κοστίζουν 2,80 ευρώ το καθένα και μολύβια με 0,70 ευρώ το καθένα.
Ας συμβολίσουμε με Τ το πλήθος των τετραδίων που θα αγοράσει ο Αργύρης και με Μ το αντίστοιχο πλήθος των μολυβιών:

(α) Ποιες πληροφορίες γνωρίζουμε για τις αγορές του Αργύρη και ποιες είναι οι άγνωστες ποσότητες;

(β) Τι είδους αριθμούς αντιπροσωπεύουν και συνεπώς τι τιμές μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές Τ και Μ;

(γ) Να εξηγήσετε τι παριστάνει κάθε μία από τις ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις:

- 2,80·Τ
- 0,70·Μ

Θυμάμαι-Σκέφτομαι

μεταβλητή : μεταβαλλόμενος αριθμός, ποσότητα που μπορεί να λάβει διάφορες τιμές.
είδη αριθμών : φυσικοί, ακέραιοι, θετικοί, αρνητικοί, ρητοί. άρρητοι,…
► Στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου προβλήματος, μια αλγεβρική παράσταση

- 2,80·Τ+0,70·Μ

(δ) Ποιος περιορισμός ισχύει για τις αγορές του Αργύρη σε σχέση με το πλήθος των τετραδίων Τ και το πλήθος των μολυβιών Μ; Μπορείτε να τον εκφράσετε με μια μαθηματική σχέση;

(ε) Σκεφτείτε και αιτιολογήστε επαρκώς την απάντησή σας στα παρακάτω ερωτήματα:
▪ Αν ο Αργύρης πρέπει να αγοράσει 10 τετράδια, πόσα μολύβια μπορεί να αγοράσει;
▪ Μπορείτε να παρουσιάσετε διαφορετικές δυνατές επιλογές για το πλήθος τετραδίων και το αντίστοιχο πλήθος μολυβιών που μπορεί να αγοράσει ο Αργύρης σύμφωνα με τα στοιχεία του προβλήματος;
▪ Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός τετραδίων που μπορεί να αγοράσει ο Αργύρης;, Πόσα μολύβια μπορεί να αγοράσει σε αυτή την περίπτωση;

παριστάνει μια ποσότητα που σχετίζεται με αυτό.

► Μια μαθηματική σχέση μπορεί να εκφράζεται με ισότητα, ανισότητα κ.ά.

► Με δεδομένο ότι ο Αργύρης μπορεί να ξοδέψει μέχρι 50€, ποια είναι η σχέση που συνδέει το πλήθος των τετραδίων Τ με το πλήθος των μολυβιών Μ, ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει να μην ξεπερνούν το διαθέσιμο ποσό; Πώς θα την εκφράσεις μαθηματικά;

1Β. ΤΟ ΔΙΛΗΜΜΑ ΤΗΣ ΒΑΣΙΛΟΠΙΤΤΑΣ

Το ζαχαροπλαστείο *«Ο Κύκλος των Γεύσεων»* προσφέρει κάθε χρόνο βασιλόπιττες (φτιαγμένες από τα ίδια υλικά) σε δύο μεγέθη: τη Μικρή Βασιλόπιττα, που έχει διάμετρο 20 cm και πωλείται προς 20 ευρώ, και τη Μεγάλη Βασιλόπιττα, που έχει διάμετρο 30 cm και πωλείται προς 30 ευρώ.

(α) Ο πελάτης στέκεται μπροστά στη βιτρίνα και αναρωτιέται: *"Με βάση μόνο τη διάμετρο και την τιμή, μπορώ να αποφασίσω ποια βασιλόπιτα προσφέρει περισσότερη ποσότητα για τα χρήματά που θα πληρώσω;"*
▪ Τι θα του απαντούσατε, χρησιμοποιώντας μαθηματικά επιχειρήματα; Έχει επαρκή στοιχεία για να αποφασίσει, με βάση τη σχέση ποσότητας – τιμής, ποια από τις δύο βασιλόπιτες συμφέρει να αγοράσει;
▪ Αν τα δεδομένα δεν επαρκούν για να πάρετε μια οριστική απόφαση, ποια ακόμη πληροφορία χρειάζεστε;

Θυμάμαι- Σκέφτομαι

διάμετρος : το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει (έχει άκρα) δύο σημεία (της περιφέρειας) του κύκλου και διέρχεται (περνά) από το κέντρο του κύκλου

► Σχεδίασε μια βασιλόπιττα. Ποιο είναι το σχήμα της;

►Σκέψου τι σημαίνει η φράση «σχέση ποσότητας-τιμής». Πώς μπορείς να την εκφράσεις μαθηματικά;

δεδομένα: οι πληροφορίες που έχετε στη διάθεσή σας (β) Μια τακτική πελάτισσα του ζαχαροπλαστείου γνωρίζει ότι όλες οι βασιλόπιτες έχουν το ίδιο ακριβώς πάχος. Μπορείτε να τη βοηθήσετε να επιλέξει τη βασιλόπιττα που την συμφέρει να αγοράσει;

▪ Να διατυπώσετε πρώτα τον στόχο, εξηγώντας αναλυτικά τι σημαίνει εδώ η φράση *«τη βασιλόπιττα που συμφέρει να αγοράσει»*. Ποιο είναι το κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουμε για την επιλογή της βασιλόπιττας;

▪ Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε την απάντησή σας περιγράφοντας τους αντίστοιχους μαθηματικούς υπολογισμούς.

πάχος : το ύψος της βασιλόπιττας (πόσο «χοντρή» είναι)
διατυπώνω : εκφράζω (με επίσημο τρόπο, γραπτά ή προφορικά) σκέψεις, απόψεις ή συναισθήματα

► Σκέψου το σχήμα της βασιλόπιττας και ποιο μαθηματικό τύπο μπορείς να χρησιμοποιήσεις.

2Α. ΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ: ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΣ ΜΥΣΤΙΚΑ

Θυμάμαι-Σκέφτομαι

(α) Να σχεδιάσετε δύο ευθύγραμμα τμήματα με κοινή αρχή τα οποία να σχηματίζουν μεταξύ τους μια γωνία 60°.

κοινή αρχή : σκεφτείτε τους δείκτες του ρολογιού

(β) Από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας των 60° που σχηματίστηκε, να φέρετε κάθετες ημιευθείες προς τις πλευρές της γωνίας.

κάθετες ευθείες : ευθείες που τέμνονται μεταξύ τους σχηματίζοντας ορθή γωνία
► Πώς κατασκευάζουμε κάθετες;

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της κυρτής γωνίας που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο κάθετες (ημιευθείες) και να περιγράψετε αναλυτικά τα βήματα που ακολουθήσατε.

κυρτή γωνία : γωνία με μέτρο μικρότερο από 180°

► Τι σχήμα δημιουργήθηκε και τι γνωρίζεις για τις γωνίες του;

(δ) Να μετρήσετε (με το κατάλληλο γεωμετρικό όργανο) την κυρτή γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο κάθετες ημιευθείες. Συμφωνεί η μέτρηση αυτή με το αποτέλεσμα του υπολογισμού σας στο ερώτημα (γ);

► Με ποιο γεωμετρικό όργανο μετράμε μια γωνία;

(ε) Να υπολογίσετε το μέτρο της αντίστοιχης μη κυρτής γωνίας που σχηματίζουν οι δύο κάθετες ημιευθείες.

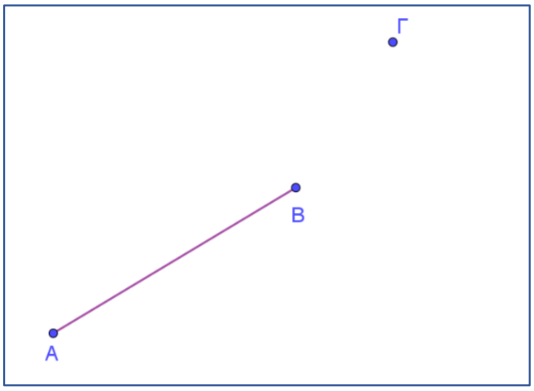
μη κυρτή γωνία : γωνία με μέτρο ανάμεσα στις 180° και στις 360°

2Β. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΗΣ ΣΥΝΤΟΜΟΤΕΡΗΣ ΟΔΟΥ

Θυμάμαι-Σκέφτομαι 

Παρατηρήστε τις πιο κάτω εικόνες:

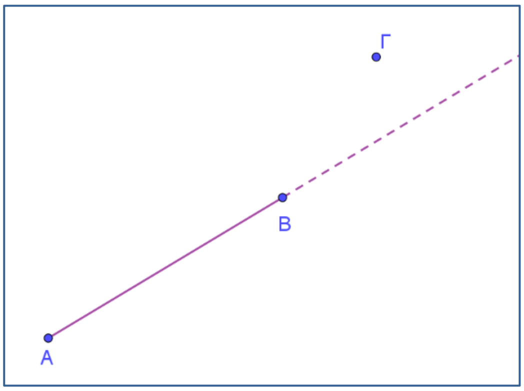
(α) Περιγράψτε με ακρίβεια τα στοιχεία που δίνονται στην πρώτη εικόνα.



ΕΙΚΟΝΑ 1

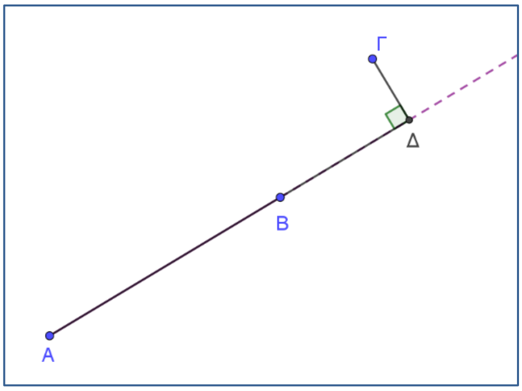
► Δώσε τον ορισμό και τις σημαντικότερες ιδιότητες κάθε στοιχείου που θα συναντήσεις σε αυτό και τα επόμενα βήματα.

(β) Μελετώντας με προσοχή τις επόμενες εικόνες, περιγράψτε τα βήματα που οδήγησαν στην τελική κατασκευή:



ΕΙΚΟΝΑ 2

► Να εξηγήσεις το «γιατί» πίσω από κάθε ενέργεια. Να συνδέσεις τα βήματα με γεωμετρικές αρχές (βασικές έννοιες, κανόνες) που γνωρίζεις.



ΕΙΚΟΝΑ 3

(γ) Με βάση την κατασκευή που περιγράψαμε πιο πάνω συμπλήρωσε τη φράση «Η συντομότερη οδός από ένα σημείο προς μια ευθεία είναι...»

3Α. Ο ΚΗΠΟΣ ΤΗΣ ΠΟΛΥΞΕΝΗΣ

Θυμάμαι-Σκέφτομαι

Η Πολυξένη έχει έναν ορθογώνιο κήπο με πλάτος 5 m. Αποφάσισε να τον χωρίσει σε δύο μέρη: έναν λαχανόκηπο με μήκος 8 m και έναν ανθόκηπο με μήκος 6 m.

(α) Ποιο είναι το συνολικό μήκος του κήπου της Πολυξένης;

(β) Τι σχήματα έχουν ο λαχανόκηπος και ο ανθόκηπος;

▪ Σχεδιάστε τον κήπο της Πολυξένης με κλίμακα που θα επιλέξετε εσείς.

κλίμακα : η αναλογία ανάμεσα στη διάσταση που απεικονίζεται σε έναν χάρτη (ή σχέδιο) και στην πραγματική.
[Για παράδειγμα, η κλίμακα 1:50000 δηλώνει ότι 1 cm στο χάρτη είναι 50000 cm στην πραγματικότητα.]

(γ) Να υπολογίσετε το συνολικό εμβαδόν του κήπου της Πολυξένης. Μπορείτε να το κάνετε με δύο διαφορετικούς τρόπους;

▪ Ποια ισότητα εμβαδών προκύπτει με βάση τα αποτελέσματα των δύο τρόπων;

(δ) Πιστεύετε ότι θα παίρναμε ισότητα και στην περίπτωση που τα μήκη του λαχανόκηπου και του ανθόκηπου ήταν διαφορετικά;

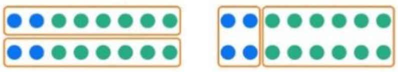
Υπάρχει κάποια προϋπόθεση για να έχει νόημα το πρόβλημα όταν επιλέγουμε διαφορετικά μήκη;

Διερευνήστε το αλλάζοντας τις διαστάσεις στον κήπο της Πολυξένης με τη βοήθεια του ψηφιακού αρχείου: https://www.geogebra.org/m/g3p6wtuv

διερευνώ : εξετάζω με προσοχή και σε βάθος

(ε) Η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση εκφράζεται με την ισότητα:

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = (\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$$



▪ Να περιγράψετε με λόγια την ισότητα της επιμεριστικής ιδιότητας.

(στ) Συμπληρώστε τις παρακάτω ισότητες:

- 3□(7+κ) = ...
- .... = 4□λ + 4□μ

(ζ) Η Πολυξένη θέλει να επεκτείνει τον κήπο της, προσθέτοντας δίπλα στον ανθόκηπο ένα ορθογώνιο κήπο για βότανα με μήκος 3 m.

- Είναι επαρκή τα στοιχεία που σας δίνονται ή υπάρχει κάποια ασάφεια;

Ασάφεια: οι πληροφορίες που δίνονται δεν επαρκούν για να μας οδηγήσουν σ' ένα συμπέρασμα.
► Μπορείς να εργαστείς πάνω στο σχέδιο που έφτιαξες και να συμπληρώσεις τα νέα δεδομένα.

Διευκρινίζεται ότι ο πλάτος του κήπου και τα μήκη των δύο τμημάτων που ήδη υπάρχουν θα παραμείνουν αμετάβλητα.

▪ Να συμπληρώσετε το αρχικό σας σχέδιο με τον κήπο βοτάνων.

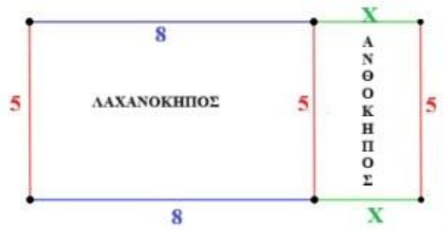
▪ Να γράψετε δύο διαφορετικές παραστάσεις που να εκφράζουν το (νέο) συνολικό εμβαδό του κήπου της Πολυξένης και να εξηγήσετε πώς συνδέονται με την επιμεριστική ιδιότητα.

παράσταση : μαθηματική έκφραση που συνδυάζει μεταβλητές και συγκεκριμένους αριθμούς.

3Β. Ο ΚΗΠΟΣ ΤΗΣ ΜΑΡΙΑΝΘΗΣ

Θυμάμαι-Σκέφτομαι

Η Μαριάνθη έχει έναν κήπο που περιγράφεται στο σχέδιο. Να καταγράψετε όλες τις πληροφορίες που μπορούμε να αντλήσουμε από το σχέδιο.



► Τι σχήμα έχει ο κήπος; Τι σχήμα έχει ο λαχανόκηπος και τι ο ανθόκηπος; Γιατί;
► Γιατί ονομάζουμε x το μήκος του ανθόκηπου;

(α) Να γράψετε την παράσταση που εκφράζει το συνολικό εμβαδόν του κήπου της Μαριάνθης.

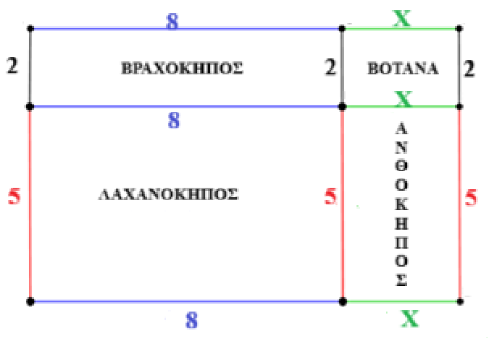
παράσταση : μαθηματική έκφραση που συνδυάζει μεταβλητές και συγκεκριμένους αριθμούς.

(β) Αν η Μαριάνθη επιλέξει το συνολικό εμβαδόν του κήπου να είναι 95 m^2, πόσο είναι το μήκος x του ανθόκηπου;
Να εξηγήσετε πώς το βρήκατε.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $5 \cdot (8 + x) = 95$ περιγράφοντας αναλυτικά τα βήματα που κάνατε για να βρείτε τη λύση.

(δ) Η Μαριάνθη αποφάσισε να επεκτείνει προς την ίδια μεριά τον κήπο της.

επεκτείνω : μεγαλώνω την έκταση που έχει κάτι



► Σκέψου τι σχήματα είναι ο κήπος της Μαριάνθης και οι επιμέρους κήποι που τον συνθέτουν.

▪ Τι πληροφορίες παίρνετε από το νέο σχέδιο;

▪ Να εκφράσετε με δύο διαφορετικές παραστάσεις το συνολικό εμβαδόν του κήπου.

(ε) ▪ Να αναπτύξετε την παράσταση: $(5+2)\cdot(8+x)$

▪ Να εξηγήσετε σε ποια ιδιότητα βασιστήκατε και με ποιον τρόπο βρήκατε το ανάπτυγμα.

▪Στη συνέχεια να αναπτύξετε την παράσταση: $(5+y)\cdot(8+x)$

► Για να αναπτύξεις μια παράσταση εκτελείς τις κατάλληλες πράξεις ώστε να φτάσεις σε μια απλοποιημένη μορφή χωρίς παρενθέσεις

4Α. Ο ΘΗΣΑΥΡΟΣ ΤΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

Ο Κωνσταντίνος είναι ιστορικός. Μελετώντας παλιά βιβλία ανακάλυψε τυχαία τον χάρτη ενός θησαυρού. Στον χάρτη υπάρχουν δύο σημεία Α και Β, που αντιστοιχούν σε κατεστραμμένες αρχαίες κολώνες, και μια κρυφή οδηγία:

«Ο θησαυρός βρίσκεται σε σημείο που απέχει ***ίσες αποστάσεις*** *από τις κολόνες.»*

Θυμάμαι-Σκέφτομαι 

1. Ο Κωνσταντίνος σκέφτηκε να βρει το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Εξηγήστε γιατί έκανε αυτή τη σκέψη.

► Τι γνωρίζεις για την απόσταση του μέσου Μ από τα άκρα Α και Β του ευθυγράμμου τμήματος;

2. Όταν όμως ο Κωνσταντίνος έσκαψε στο συγκεκριμένο σημείο (το μέσο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ) δεν βρήκε θησαυρό. Απογοητευμένος δίπλωσε τον χάρτη για να τον βάλει στην τσέπη του. Τότε, καθώς το σημείο Α ταυτίστηκε με το σημείο Β, εντόπισε και άλλα σημεία που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Πού βρίσκονται αυτά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ισαπέχω από δύο σημεία : βρίσκομαι σε ίση απόσταση από τα δύο σημεία.

«το σημείο Α ταυτίστηκε με το σημείο Β»: όταν διπλώθηκε ο χάρτης, το σημείο Α έπεσε πάνω στο σημείο Β

3. Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε με γεωμετρικά όργανα τη γραμμή της δίπλωσης (κατά μήκος της οποίας διπλώνεται ένα σχήμα έτσι ώστε τα δύο μέρη του να ταιριάζουν ακριβώς το ένα πάνω στο άλλο);
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

► Σκέψου τι είναι η γραμμή της δίπλωσης για το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;

4. Ποια και γιατί είναι η καινούργια δυσκολία που συνάντησε ο Κωνσταντίνος στην προσπάθειά του να βρει τον θησαυρό;

► Σκέψου αν γνωρίζεις αρκετά στοιχεία ώστε να βρεις τον θησαυρό.

5. Ο Κωνσταντίνος παρατήρησε ένα μισοσβησμένο σημείο Γ στον χάρτη και διαπίστωσε ότι πρόκειται για μια τρίτη κολόνα.

▪ Μελετήστε τον χάρτη με τα 3 σημεία και την αρχική οδηγία: *«Ο θησαυρός βρίσκεται σε σημείο που απέχει ίσες αποστάσεις από τις κολόνες.»*
▪ Συμπληρώστε μια λίστα με τα όσα γνωρίζει ως τώρα ο Κωνσταντίνος:

Γνωρίζει τη θέση των τριών σημείων (κολόνες) Α, Β και Γ.

..

6. Με το δεδομένο ότι ο θησαυρός είναι τοποθετημένος σε ίσες αποστάσεις από τα σημεία Α, Β, Γ, να καταγράψετε τα (γεωμετρικά) βήματα που είναι απαραίτητα για την εύρεση του θησαυρού και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7. Γιατί πιστεύετε ότι ο αρχικός κάτοχος του θησαυρού επέλεξε αυτή τη μέθοδο για να τον κρύψει;

4Β. ΧΑΡΑΣΣΟΝΤΑΣ ΚΑΘΕΤΕΣ ΣΤΑ ΜΕΣΑ ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Ο Κωνσταντίνος είναι ιστορικός-ερευνητής. Καθώς ξεφυλλίζει ένα παλιό βιβλίο, συναντά ένα απόκομμα με τις χειρόγραφες οδηγίες μιας γεωμετρικής κατασκευής.

i. Δίνονται δύο σημεία Α και Β.
ii. Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.
iii. Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα μεγαλύτερη από τη μισή απόσταση ΑΒ.
iv. Με την ίδια ακτίνα και κέντρο το Β χαράσσουμε νέο κύκλο.
v. Ονομάζουμε Γ και Δ τα σημεία όπου τέμνονται οι δύο κύκλοι και Μ το σημείο όπου η ΓΔ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα.

1. Να ακολουθήσετε τα βήματα της κατασκευής στο παρακάτω σχέδιο:

2. Μελετώντας το σχέδιο ο Κωνσταντίνος ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΔ είναι ίσα. Συμφωνείτε; Να το αποδείξετε.

▪ Να γράψετε τις πληροφορίες που παίρνουμε από αυτή την ισότητα τριγώνων.

3. Στο κάτω μέρος του αποκόμματος ο Κωνσταντίνος διακρίνει την πρόταση:

Τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΒΓΜ είναι ίσα.

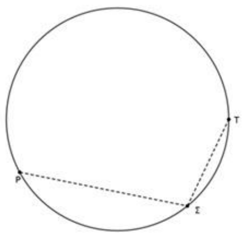
Συμφωνείτε με την πρόταση αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
▪ Αν τα τρίγωνα είναι ίσα, τι συμπεραίνετε για τις γωνίες $A\widehat{M}\Gamma$ και $B\widehat{M}\Gamma$;
▪ Τι συνεπάγεται (σε ποιο συμπέρασμα οδηγεί) αυτό για τη θέση της ευθείας ΓΔ σε σχέση με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;

4. Στο πίσω μέρος του αποκόμματος ο Κωνσταντίνος βρίσκει κάποιες μισοσβησμένες προτάσεις.
Μπορείτε να τον βοηθήσετε να συμπληρώσει τις σβησμένες προτάσεις έτσι, ώστε αυτές να είναι αληθείς; Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Μεσοκάθετος ονομάζεται
##################
Η ΓΔ είναι
μεσοκ#####ευθυγράμμου###########
Όταν ένα σημείο βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο
του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ,
τότε###############

5. Στην επόμενη σελίδα του βιβλίου ο Κωνσταντίνος συναντά το σχέδιο ενός κυκλικού αρχαίου ναού. Οι θέσεις τριών κιόνων σημειώνονται πάνω στην περιφέρειά του στα σημεία Ρ, Σ, Τ. Κάτω από το σχέδιο υπάρχει και μια υποσημείωση:
«Στο κέντρο του ναού βρίσκεται θαμμένο το αγαλματίδιο μιας σημαντικής θεάς.»
Δυστυχώς η σελίδα με τις οδηγίες για την εύρεση του κέντρου του κύκλου έχει σκιστεί.

Ο Κωνσταντίνος αναλαμβάνει την αποστολή να προσδιορίσει το κέντρο του κυκλικού ναού και να ανακαλύψει το αγαλματίδιο. Η δική σας αποστολή είναι να τον βοηθήσετε γράφοντας τις οδηγίες για τη γεωμετρική κατασκευή του κέντρου του κύκλου.



► Σκέψου τι ισχύει για την απόσταση του κέντρου από τα σημεία του κύκλο

5Α. Η ΕΞΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΑΠΟΣΤΟΛΗ ΤΗΣ ΜΥΡΤΩΣ:
ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΣΕ ΧΑΡΤΗ

Η Μυρτώ είναι μια νεαρή εξερευνήτρια και έχει αποστολή να σχεδιάσει μια ασφαλή διαδρομή μέσα στο δάσος από το σημείο Α, το καταφύγιο «Αγράμπελη», στο σημείο Ε, το καταφύγιο «Εντελβάις».

Θυμάμαι-Σκέφτομαι

▪ Η Μυρτώ ξεκίνησε από το σημείο Α και περπάτησε **300 m προς τον Βορρά**, φτάνοντας στο σημείο Β.
▪ Από το σημείο Β έστριψε **ανατολικά** και διέσχισε **400 m** μέχρι το σημείο Γ.
▪ Στη συνέχεια στράφηκε προς τα **βορειοανατολικά** και περπάτησε **500 m** μέχρι το Δ.
▪ Από το Δ έστριψε ξανά **ανατολικά** και προχώρησε **300 m** μέχρι το σημείο Ε.

(α) Ποιο είναι το συνολικό μήκος της διαδρομής που διένυσε η Μυρτώ;

(β) Η απόσταση που διένυσε η Μυρτώ είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την πραγματική απόσταση των σημείων Α και Ε;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

► Αν δυσκολευτείς, απάντησε στο ερώτημα (β), αφού σχεδιάσεις τη διαδρομή στο ερώτημα (γ).

(γ) Να σχεδιάσετε τη διαδρομή της Μυρτώς με κλίμακα 1cm προς 100 m.

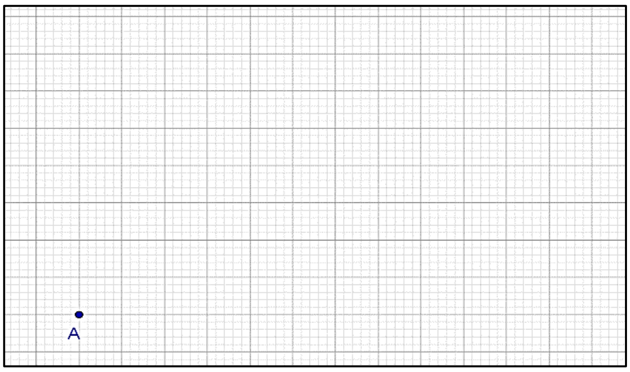
κλίμακα : η αναλογία ανάμεσα στη διάσταση που απεικονίζεται σε έναν χάρτη (ή σχέδιο) και στην πραγματική.

(δ) Αφού παρατηρήσετε προσεκτικά το σχέδιο, να εξηγήσετε γιατί οι γωνίες ΒΓΔ και ΓΔΕ είναι ίσες.

(ε) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών ΒΓΔ και ΓΔΕ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

► Όταν υπολογίζουμε το μέτρο μιας γωνίας χρησιμοποιούμε τις γεωμετρικές μας γνώσεις και όχι το μοιρογνωμόνιο.

(στ) Ποια είναι η πραγματική απόσταση μεταξύ των καταφυγίων «Αγράμπελη» και «Εντελβάις»; Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΕ.
▪ Στρογγυλοποιήστε το στο πλησιέστερο μέτρο (m).
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή (κομπιουτεράκι) για τους υπολογισμούς σας.



5Β. ΣΤΑ ΧΝΑΡΙΑ ΤΗΣ ΦΩΤΕΙΝΗΣ

Θυμάμαι-Σκέφτομαι

Η Φωτεινή μια έξυπνη μαθήτρια Γυμνασίου, ακολούθησε την περασμένη Τρίτη μια ιδιαίτερη διαδρομή στην πόλη της καταγράφοντας την πορεία της σε έναν χάρτη (ο οποίος δίνεται στο τέλος της άσκησης).

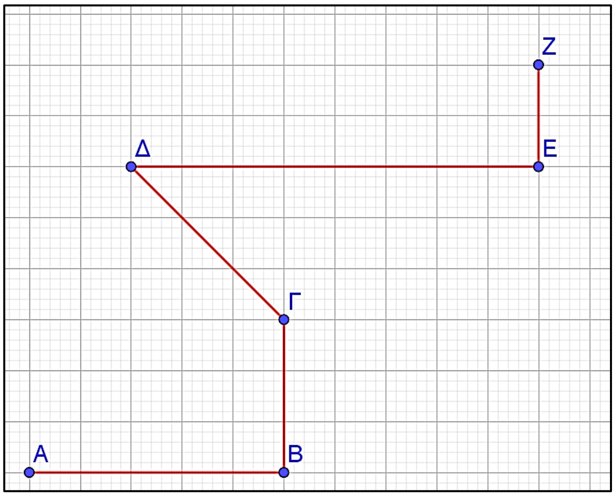
(α) Μελετήστε τον χάρτη και υπολογίστε το μέτρο της γωνίας ΓΔΕ που εμφανίζεται στη διαδρομή της Φωτεινής. Εξηγήστε τη μέθοδο που χρησιμοποιήσατε.

► Όταν υπολογίζουμε το μέτρο μιας γωνίας χρησιμοποιούμε τις γεωμετρικές μας γνώσεις και όχι το μοιρογνωμόνιο.

(β) Επιλέξετε μια κλίμακα που σας φαίνεται κατάλληλη για τον χάρτη.
Μήπως υπάρχει κάποια ασάφεια;
Δίνεται ότι η απόσταση ΑΒ είναι 500 m
Επιλέξτε τώρα την κλίμακα και υπολογίστε τις πραγματικές αποστάσεις που διένυσε η Φωτεινή μεταξύ των σημείων Α και Ζ. Στρογγυλοποιήστε τα αποτελέσματα στον πλησιέστερο ακέραιο
(γ) Δημιουργήστε μια ιστορία που να ταιριάζει με τη διαδρομή της Φωτεινής:
▪ Περιγράψτε με λεπτομέρεια τα βήματά της.
▪ Αποκαλύψτε τι υπάρχει στα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ της πορείας της.
▪ Εξηγήστε τι έκανε η Φωτεινή σε κάθε στάση της στα σημεία αυτά και ποιος ήταν ο τελικός προορισμός της.

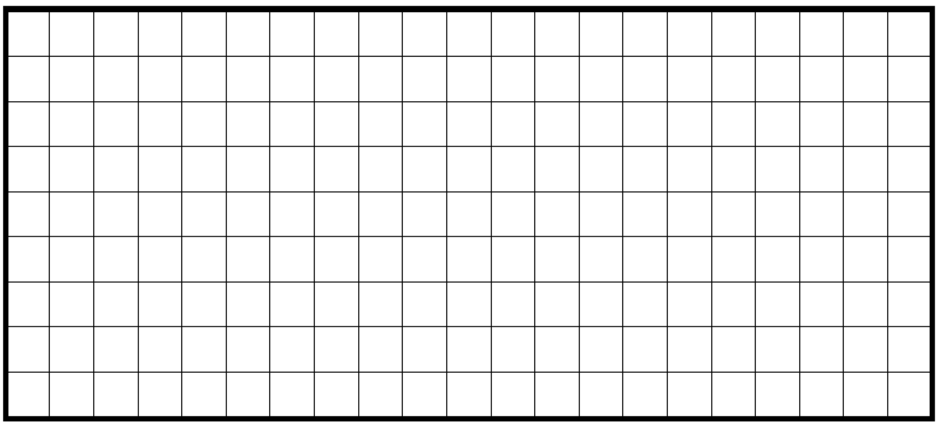
κλίμακα : η αναλογία ανάμεσα στη διάσταση που απεικονίζεται σε έναν χάρτη (ή σχέδιο) και στην πραγματική. *Για παράδειγμα, η κλίμακα 1:50000 δηλώνει ότι 1 cm στο χάρτη είναι 50000 cm στην πραγματικότητα.*

► Να περιγράψεις δηλαδή την κατεύθυνση που πήρε κάθε φορά η Φωτεινή, τις αποστάσεις που διένυσε, τις στάσεις – τα σημεία αλλαγής της πορείας της - τις γωνίες στροφής.



6Α. ΑΡΑΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΤΡΑΠΕΖΙΑ ΓΙΑ ΕΝΑ ΠΑΡΤΥ - Ι

Η Αριάδνη σχεδιάζει να γιορτάσει τα γενέθλιά της με ένα μεγάλο πάρτυ στον κήπο της, που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου όπως φαίνεται στο σχήμα:



Ο ΚΗΠΟΣ ΤΗΣ ΑΡΙΑΔΝΗΣ

Η εταιρεία που ανέλαβε την οργάνωση του πάρτυ διαθέτει δύο είδη τραπεζιών: το τετράγωνο τραπέζι για 4 άτομα και το μεγαλύτερο ορθογώνιο τραπέζι για 6 άτομα.

1. Να σχεδιάσετε 5 τετράγωνα τραπέζια σε χρώμα κόκκινο και 4 ορθογώνια τραπέζια σε χρώμα μπλε στο τετραγωνισμένο πλαίσιο που δίνεται (σχήμα).
Να λάβετε υπόψη σας τα εξής:

- *Κάθε τραπέζι αποτελείται από τόσα τετραγωνάκια όσα είναι και τα άτομα που κάθονται σε αυτό.*
- *Το πλάτος του ορθογωνίου τραπεζιού είναι ίσο με την πλευρά του τετραγώνου.*
- *Κάθε τραπέζι πρέπει να απέχει δύο τετραγωνάκια από το διπλανό του και τουλάχιστον ένα τετραγωνάκι από την άκρη του πλαισίου.*
- *Οι πλευρές των τραπεζιών πρέπει να είναι παράλληλες προς τις πλευρές της περίφραξης του κήπου.*

Υπάρχει μοναδικός τρόπος για να τοποθετήσετε τα τραπέζια στον κήπο;

2. ▪ Πόσα άτομα μπορούν να καθίσουν συνολικά στα τραπέζια που σχεδιάσατε;
▪ Να γράψετε την παράσταση που υπολογίζει το συνολικό αριθμό ατόμων στα τραπέζια.
▪ Πόσα άτομα θα μπορούσαν να καθίσουν συνολικά, αν είχαμε 7 τετράγωνα τραπέζια και 3 ορθογώνια;

3. Οι μεταβλητές x και y αντιπροσωπεύουν το πλήθος των τετραγώνων και των ορθογωνίων τραπεζιών αντίστοιχα.
▪ Να γράψετε την παράσταση που υπολογίζει τον συνολικό αριθμό ατόμων που μπορούν να καθίσουν σε x τετράγωνα και y ορθογώνια τραπέζια.
▪ Τι είδους αριθμούς αντιπροσωπεύουν οι μεταβλητές x και y; Υπάρχουν περιορισμοί που αφορούν σε αυτούς τους αριθμούς;

4. Η Αριάδνη προσκάλεσε στο πάρτυ της 50 άτομα.
Να γράψετε την ισότητα που δηλώνει ότι ο συνολικός αριθμός ατόμων που θα καθίσουν σε x τετράγωνα και y ορθογώνια τραπέζια είναι 50.
▪Να παρουσιάσετε σε ένα πινακάκι τους διαφορετικούς σχηματισμούς (που υπάρχουν) από τετράγωνα και ορθογώνια τραπέζια ώστε να καθίσουν ακριβώς 50 άτομα και να σημειώσετε δίπλα από κάθε σχηματισμό, αν τα τραπέζια του χωράνε στον κήπο της Αριάδνης (σύμφωνα με τις προϋποθέσεις του ερωτήματος 1).

Θυμάμαι-Σκέφτομαι

► Σκέψου:
▪ Πόσα άτομα μπορούν να καθίσουν σε x τετράγωνα τραπέζια;
▪ Πόσα άτομα μπορούν να καθίσουν σε y ορθογώνια τραπέζια;

► Σκέψου ποιες διαφορετικές συνθέσεις από τετράγωνα και ορθογώνια τραπέζια οδηγούν σε ακριβώς 50 θέσεις
► Δοκίμασε να σχεδιάσεις τις διαφορετικές συνθέσεις στον κήπο της Αριάδνης. Πραγματοποιούνται όλες;

5. Τι παριστάνει η παραπάνω ισότητα σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων; Να κάνετε το σχήμα.

▪ Πώς μπορείτε σε αυτό το σχήμα να εντοπίσετε τις λύσεις του προβλήματος;

► Σκέψου ποια είναι η αναπαράσταση μιας ισότητας που περιέχει δύο αγνώστους (μεταβλητές) και ποια είναι η απεικόνιση των λύσεων;

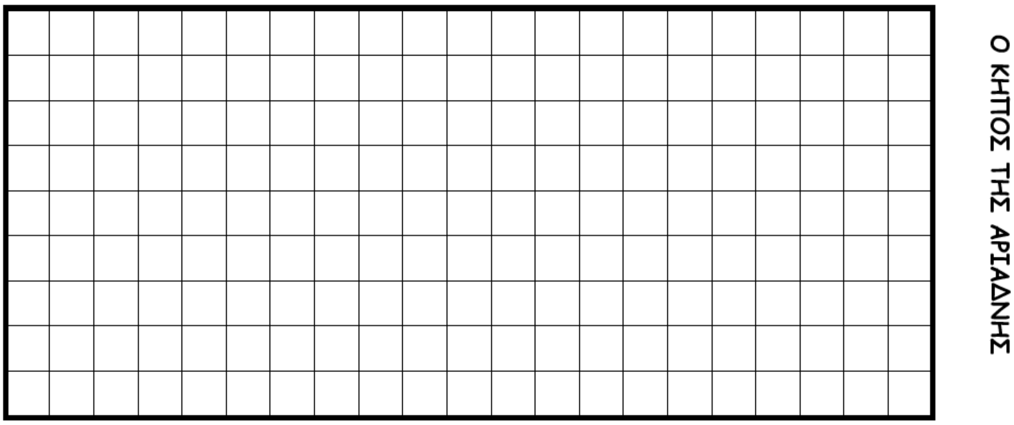
6. Τροποποιώντας το προηγούμενο πρόβλημα, βρείτε όλους τους δυνατούς σχηματισμούς τραπεζιών ώστε να καθίσουν ακριβώς 54 καλεσμένοι στον κήπο της Αριάδνης.

▪ Ποιον τρόπο προτείνετε στην εταιρεία ώστε να επιλύει το πρόβλημα των τραπεζιών;

► Σκέψου ποιοι σχηματισμοί τραπεζιών για 54 καλεσμένους χωράνε στον κήπο της Αριάδνης.

6Β. ΑΡΑΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΤΡΑΠΕΖΙΑ ΓΙΑ ΕΝΑ ΠΑΡΤΥ - ΙΙ

Η Αριάδνη σχεδιάζει να γιορτάσει τα γενέθλιά της με ένα μεγάλο πάρτυ στον κήπο της, στο οποίο θα έρθουν 50 καλεσμένοι/ες.

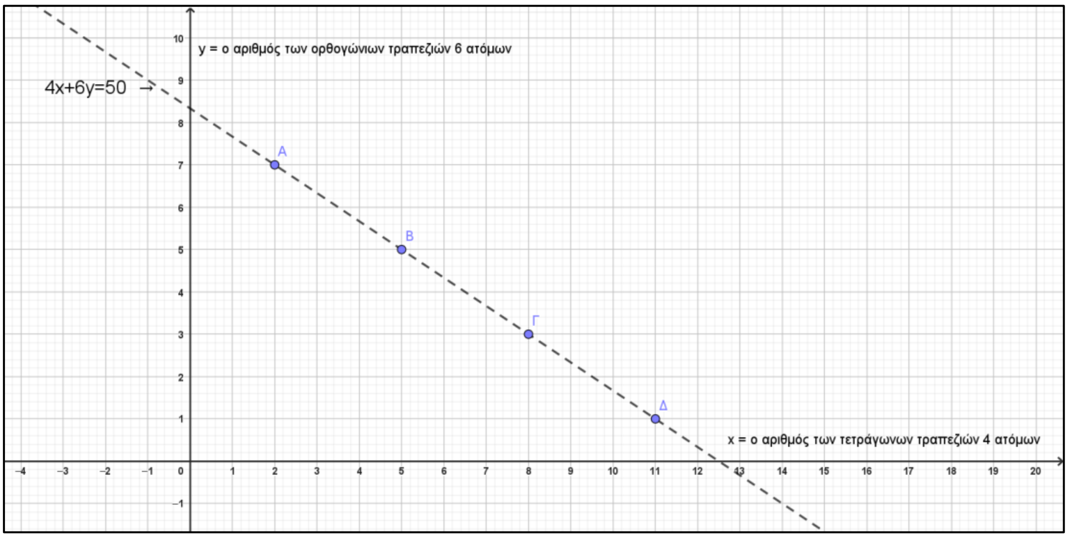


Η εταιρεία που ανέλαβε την οργάνωση του πάρτυ διαθέτει δύο είδη τραπεζιών: το **τετράγωνο τραπέζι για 4 άτομα** και το μεγαλύτερο **ορθογώνιο τραπέζι για 6 άτομα**.

Η Αριάδνη θέλει να επιλέξει τα τραπέζια έτσι, ώστε να κάθονται όλοι/ες και να μην μένουν κενές θέσεις.

Για την τοποθέτηση των τραπεζιών στο σχέδιο-κήπος ισχύουν τα εξής:

- *Κάθε τραπέζι αποτελείται από τόσα τετραγωνάκια όσα είναι και τα άτομα που κάθονται σε αυτό.*
- *Το πλάτος του ορθογωνίου τραπεζιού είναι ίσο με την πλευρά του τετραγώνου.*
- *Κάθε τραπέζι πρέπει να απέχει δύο τετραγωνάκια από το διπλανό του και τουλάχιστον ένα τετραγωνάκι από την άκρη του πλαισίου.*
- *Οι πλευρές των τραπεζιών πρέπει να είναι παράλληλες προς τις πλευρές της περίφραξης του κήπου.*



1. Η εταιρεία δίνει το παραπάνω διάγραμμα στην Αριάδνη:

Ποιες πληροφορίες αντλούμε από το διάγραμμα;

2. Η Αριάδνη επέλεξε να έχει <u>5 τετράγωνα τραπέζια.</u>
Πόσα ορθογώνια τραπέζια χρειάζονται ακόμα για να καθίσουν ακριβώς οι 50 καλεσμένοι/ες της;

3. Η Αριάδνη γνωρίζει ότι κάθε τετράγωνο τραπέζι κοστίζει 20 ευρώ και κάθε ορθογώνιο 25 ευρώ. Μπορεί να διαθέσει έως 225 ευρώ.
Θα της φτάσουν τα χρήματα για τις επιλογές που έκανε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Τελευταία στιγμή φτάνουν από το εξωτερικό για το πάρτυ δύο ακόμη φίλοι της Αριάδνης. Η εταιρεία πληροφορεί την Αριάδνη ότι εκείνη τη μέρα υπάρχουν διαθέσιμα για ενοικίαση 7 τετράγωνα και 8 ορθογώνια τραπέζια.
Πόσα από αυτά τα τραπέζια θα επιλέγατε εσείς και γιατί, αν ήσασταν στη θέση της Αριάδνης;

Θυμάμαι-Σκέφτομαι

αντλώ πληροφορίες : βρίσκω στοιχεία, συλλέγω δεδομένα

► «Διάβασε» το διάγραμμα και απάντησε σε ερωτήσεις όπως:
Τι αντιπροσωπεύει ο άξονας x και τι ο άξονας y;
Τι δείχνει η ευθεία;
Γιατί μόνο ορισμένα σημεία της ευθείας είναι λύσεις;
Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος τετράγωνων τραπεζιών που μπορούμε να έχουμε;

► Σκέψου τους περιορισμούς που υπάρχουν στα διαθέσιμα τραπέζια, τον χώρο και τον προϋπολογισμό.

Κάποιες από τις παραπάνω προτεινόμενες δραστηριότητες δοκιμάστηκαν στην πράξη σε μαθητές/τριες Γυμνασίου. Πολλές από τις υποδείξεις στο τμήμα «Θυμάμαι – σκέφτομαι» τροποποιήθηκαν με βάση αυτές τις δοκιμές.

Συμπεράσματα

Η κατανόηση και η παραγωγή μαθηματικού λόγου συνιστούν αλληλένδετες και αμοιβαία ενισχυόμενες δεξιότητες και θεμελιώδη εργαλεία για τη συμμετοχή στη σύγχρονη κοινωνία της γνώσης. Η συστηματική τους ένταξη στη διδακτική πράξη μπορεί να ενισχύσει ουσιαστικά την εννοιολογική κατανόηση, την κριτική σκέψη και την ικανότητα επικοινωνίας των μαθητών/τριών και να συμβάλει στην καλλιέργεια μαθηματικού γραμματισμού. Η προσχεδιασμένη ύπαρξη ασαφειών στα προβλήματα αποτελεί στρατηγική επιλογή. Ωστόσο δεν πρέπει να γίνεται κατάχρηση και η άρση της ασάφειας δεν πρέπει να παραλείπεται.

Βιβλιογραφία

Αβούρη, Ε. (2015). *Η κατανόηση του μαθηματικού κειμένου του σχολικού εγχειριδίου από τους μαθητές: Πόσο εύκολο είναι το θέμα της θεωρίας;* (Διπλωματική εργασία). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα. Ανακτήθηκε από το αποθετήριο «Πέργαμος».

Belano, R. M. (2024). Students' oral reading level and mathematics performance: A correlational study. *International Journal of Novel Research and Development*, 9(6).

Bergqvist, E., & Österholm, M. (2010). A theoretical model of the connection between the process of reading and the process of solving mathematical tasks. In *Mathematics and mathematics education: Cultural and social dimensions. Proceedings of MADIF 7, the seventh mathematics education research seminar* (pp. 31–40). Linköping, Sweden: Svensk förening för matematikdidaktisk forskning. Ανακτήθηκε 27 Σεπτεμβρίου 2025 από https://www.researchgate.net/publication/266485625_A_Theoretical_Model_of_the_Connection_Between_the_Process_of_Reading_and_the_Process_of_Solving_Mathematical_Tasks

Erath, K., Prediger, S., Quasthoff, U., & Heller, V. (2018). Discourse competence as important part of academic language proficiency in mathematics classrooms. *ZDM Mathematics Education, 50*(6), 1113–1127. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0964-3

Θωμαΐδης Γιάννης, (2025) Επίλυση προβλήματος στην Ελληνική μαθηματική εκπαίδευση τις τελευταίες δεκαετίες: Τι δείχνουν οι έρευνες, οι διεθνείς αξιολογήσεις και τα γραπτά των πανελλαδικών εξετάσεων, *2ο συνέδριο για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους ελληνογαλλική σχολή Καλαμαρί*. https://kalamari.gr/images/2025/Praktika%202025%20v.2.pdf Σελ. 71-93

King, B., Raposo, D., & Gimenez, M. (2020). Promoting student buy-in: Using writing to develop mathematical understanding. *PRIMUS, 30*(7), 803–822. https://doi.org/10.1080/10511970.2019.1640792

Lenz, K., Obersteiner, A., & Wittmann, G. (2021). Who benefits most from language-responsive learning materials in mathematics? *ZDM Mathematics Education, 53*(6), 1467–1480. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01259-0

Menezes, L., & Costa, A. M. (2019). Writing to learn mathematics. In *EDULEARN19 Proceedings* (pp. 1043–1050). IATED. https://doi.org/10.21125/edulearn.2019.0345

Moschkovich, J. N. (2024). *Language and learning mathematics: A sociocultural approach to academic literacy in mathematics*. In Proceedings of the 14th International Congress on Mathematics Education (pp. 459-470). World Scientific Publishing Company. https://doi.org/10.1142/9789811287183_0031

Österholm, M. (2006). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 325–346. https://doi.org/10.1007/s10649-005-9016-y

Papadopoulos, I., & Kyriakopoulou, P. (2022). Reading mathematical texts as a problem-solving activity. CEPS journal, volume 12, issue 1, str. 35-53. URN:NBN:SI:doc-R4A38RNZ from http://www.dlib.si

Peng, P., Lin, X., Ünal, Z. E., Lee, K., Namkung, J., Chow, J., & Sales, A. (2020). Examining the mutual relations between language and mathematics. *Psychological Bulletin, 146*(7), 595–634. https://doi.org/10.1037/bul0000234

Planas, N., & Pimm, D. (2023). Mathematics education research on language and on communication. *Educational Studies in Mathematics, 112*(2), 165–185. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10195-9

Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly, 31*(3), 235–252. https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995

Tang, K. S., Lin, S. W., & Kaur, B. (2022). Mapping and extending perspectives of reading in science and mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics, 111*(1), 33–52. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10180-2

Wahyuni, P., Pangestu, S. A., Sabila, I. S. M., & Pangestu, A. (2021). The effect of mathematical language on learning mathematics. In *Proceedings of the International Conference on Science and Engineering* (Vol. 3, pp. 617-621). https://doi.org/10.14421/icse.v3.575

Τετραγωνίζειν ἐστί φιλοσοφεῖν:
Μια διεπιστημονική διδακτική πρόταση για το Λύκειο

Ανδρέας Λύκος[1], **Κυριακίτσα Παιδαράκη**[2]

[1]MSc Μαθηματικός, 3ο Πειραματικό ΓΕ.Λ. Κομοτηνής,
lykosand@gmail.com

[2]MSc Φιλόλογος, 1ο ΓΕ.Λ. Κομοτηνής,
kpaidaraki@gmail.com

Περίληψη

«Τι σχέση μπορεί να έχει η ηθική φιλοσοφία με την γεωμετρία»; «Πώς ένα γεωμετρικό πρόβλημα σχετίζεται με την ηθική»; «Η μαθηματική και η γεωμετρική εξάσκηση θα χαρίσουν σε έναν μαθητή τη δεξιότητα να ανακαλύψει τον εαυτό του ενώπιον μιας δύσκολης απόφασης ή ενός κρίσιμου ηθικού διλήμματος»; Τις απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα προσπαθήσαμε να δώσουμε με ένα σενάριο μαθήματος βασισμένο στις αρχές της διεπιστημονικής διδασκαλίας που παραγματοποιήθηκε σε πραγματικές συνθήκες σε τμήμα της Β τάξης του 3ου Πειραματικού ΓΕΛ Κομοτηνής. Ο μαθηματικός ξεκινά με τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος που είναι ο διπλασιασμός του εμβαδού του τετραγώνου. Παράλληλα, η φιλόλογος εντοπίζει τα βασικά στοιχεία της Σωκρατικής σκέψης και της σωκρατικής μεθόδου. Βασικό διδακτικό εργαλείο: ο πλατωνικός διάλογος "Μένων", που ανήκει στα έργα της περιόδου κατά την οποία ο Πλάτωνας ιδρύει την Ακαδημία το 387 π.Χ και έχει κεντρικό θέμα την πολιτική αρετή και αν αυτή μπορεί να διδαχθεί.

Λέξεις κλειδιά: γεωμετρία, εμβαδόν, ανάμνηση, μαιευτική μέθοδος, ηθική.

Περιγραφή Εκπαιδευτικού Σεναρίου

Πρόκειται για ένα εκπαιδευτικό σενάριο βασισμένο στις αρχές της διεπιστημονικής διδασκαλίας με σκοπό τη διασύνδεση της γεωμετρίας με τη φιλοσοφία. Για να κατανοήσουμε τον κοινωνικό και τον φυσικό κόσμο, αλλά και την αλληλεπίδρασή τους, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές οπτικές θέασης, οι οποίες εκφράζονται από τους διαφορετικούς κλάδους της επιστήμης, της τέχνης, της τεχνολογίας και της ηθικής. Αυτή η παρατήρηση οδήγησε την εκπαίδευση στη διεπιστημονική προσέγγιση της γνώσης (Ματσαγγούρας 2011). Σύμφωνα με τις αρχές της διεπιστημονικότητας η διδασκαλία επικεντρώνεται σε μία έννοια, η οποία και προσεγγίζεται με πολλαπλούς τρόπους μέσα από σχετικές έννοιες και δραστηριότητες, οι οποίες πιθανόν να ανήκουν σε διαφορετικούς τομείς της ανθρώπινης σκέψης (Μπελεσιώτης - Τριανταφύλλου 2008).

Προαπαιτούμενες γνώσεις σε επίπεδο γεωμετρίας ήταν οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού γεωμετρικών σχημάτων και ειδικότερα του τετραγώνου και σε επίπεδο φιλοσοφίας η θεωρία της ψυχής και των ιδεών του Πλάτωνα, καθώς και οι πηγές της γνώσης.

Ταυτότητα σεναρίου: Σχολείο: 3ο Πειραματικό ΓΕ.Λ. Κομοτηνής,

Τάξη και τμήμα : Β5 (σχολικό έτος 2022-2023)

Στόχοι της διαθεματικής διδασκαλίας αποτελούν στο επίπεδο της φιλοσοφίας οι μαθητές να κατανοήσουν:

1. την έννοια της προεμπειρικής γνώσης και τη θεωρία της ανάμνησης του Πλάτωνα(η αναζήτηση και η μάθηση είναι ανάμνηση),
2. τη θεωρία των ιδεών και τη θεωρία της ψυχής,
3. το βασικό κέντρο της πλατωνικής φιλοσοφίας που είναι η ορθολογιστική ηθική,
4. βασικούς όρους της φιλοσοφίας: Σωκρατική ειρωνεία, ελεγκτική μέθοδος, απορία και αδιέξοδο, Μαιευτική μέθοδος, ανάμνηση,
5. τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος και στη λήψη αποφάσεων απέναντι σε ένα ηθικό δίλημμα (σχέση επιστήμης και ηθικής). (ηλεκτρονικό βιβλίο Φιλοσοφίας Β΄ Λυκείου)

και στο επίπεδο της γεωμετρίας οι μαθητές να κατανοήσουν:

1. την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος: του διπλασιασμού του εμβαδού του τετραγώνου, την αναλυτική γεωμετρική προσέγγιση,
2. την απόκτηση μέσα από τη μαθηματική και τη γεωμετρική εξάσκηση δεξιοτήτων ζωής. (ηλεκτρονικό βιβλίο Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου).

Βασικό διδακτικό εργαλείο: ο πλατωνικός διάλογος "Μένων", που ανήκει στα έργα της περιόδου κατά την οποία ο Πλάτωνας ιδρύει την Ακαδημία το 387 π.Χ και έχει κεντρικό θέμα την πολιτική αρετή και αν αυτή μπορεί να διδαχθεί. Τους απασχολούσε τόσο πολύ, αφενός γιατί αφορούσε το πώς πρέπει να ζει κανείς και αφετέρου γιατί σχετιζόταν με τον τρόπο άσκησης της πολιτικής και με τον αγώνα ενάντια στη δημοκρατικοφανή φαυλοκρατία. Για τους ίδιους λόγους γενικώς αγγίζει και αξίζει να αγγίζει τους σημερινούς ανθρώπους (Δικτυογραφία 2). Πρόσωπα του διαλόγου: **Σωκράτης:** ο φιλόσοφος που αγνοεί τα πάντα και αναλαμβάνει το ρόλο του διαλογικού ερευνητή γύρω από το διδακτό της αρετής. Εφαρμόζει τη μαιευτική μέθοδο για τη λύση του μαθηματικού προβλήματος. **Μένων:** νέος Θεσσαλός αριστοκράτης, που προέρχεται από τον χώρο της αρετής και δίνει αποσπασματικούς ορισμούς. **Άνυτος:** ημιμαθής πλούσιος Αθηναίος αστός που στέκεται προκατειλημμένα απέναντι στην διεισδυτική σκέψη και καταδικαζει οτιδήποτε καινοτόμο. **Δούλος:** χρησιμοποιείται για να φωτιστεί η ισχύς και η εγκυρότητα της ανάμνησης. Δεν έχει διδαχθεί ποτέ την γεωμετρική και την μαθηματική επιστήμη.

Ο Μένων έχει δώσει διάφορους ορισμούς για το τι είναι αρετή, αλλά ο Σωκράτης τους έχει απορρίψει όλους. Ο Μένων πείστηκε τώρα πια ότι δεν γνωρίζει τι είναι αρετή ενώ πριν νόμιζε πως ήξερε. Ρωτάει λοιπόν τον Σωκράτη: «Με ποιον τρόπο, Σωκράτη, θ' αναζητήσεις τούτο που αγνοείς παντελώς τι είναι; Ποιο απ' όσα δεν γνωρίζεις θα θέσεις ως στόχο σου και θ' αναζητήσεις; Ή, ακόμα κι αν κατά τύχη το βρεις, πώς θα ξέρεις ότι είναι αυτό το οποίο εσύ δεν γνώριζες;» **80d**. Ο Σωκράτης αναγνωρίζει στα λεγόμενα του Μένωνα ένα εριστικό επιχείρημα, ότι ο άνθρωπος δεν μπορεί να αναζητά ***ούτε αυτό που γνωρίζει ούτε αυτό που δεν γνωρίζει***. Γιατί, αν το γνωρίζει δεν υπάρχει λόγος να το αναζητά, και αν δεν το γνωρίζει δεν ξέρει τι να ψάξει, ούτε θα το αναγνωρίσει αν το συναντήσει κατά τύχη.

Για να απαντήσει σε αυτήν τη σοφιστεία, ο Σωκράτης χρησιμοποιεί τη θεωρία της ανάμνησης που δίδασκε ο Εμπεδοκλής, σύμφωνα με την οποία η ανθρώπινη ψυχή είναι αθάνατη, και όταν το σώμα πεθαίνει αυτή ξαναγεννιέται και κατοικεί σε νέο σώμα. Στο ενδιάμεσο, γίνεται μάρτυρας αυτών που αργότερα ο Πλάτωνας ονόμασε **Ιδέες**, δηλαδή των πραγματικών, απόλυτων εννοιών και πραγμάτων, των οποίων «σκιές» μόνο υπάρχουν στον κόσμο που ζουν οι άνθρωποι. Με αυτόν τον τρόπο, η ψυχή γνωρίζει τα πάντα. Με τη μετοίκηση όμως σε νέο σώμα τα «ξεχνάει», και το μόνο που μπορεί να κάνει τώρα είναι να τα θυμηθεί. Έτσι, οποιαδήποτε μάθηση, είτε για την αρετή είτε για οτιδήποτε άλλο, μεταφράζεται σε ανάμνηση. **«Η αναζήτηση και η μάθηση είναι γενικά ανάμνηση» 81d** (Δικτυογραφία 1).

Επιδεικνύει την θεωρία αυτή, καλώντας έναν δούλο του Μένωνα και βοηθώντας τον να θυμηθεί κάτι που η ψυχή του είχε μάθει πριν αυτός γεννηθεί. Σχεδιάζει ένα τετράγωνο με πλευρά 2 πόδες. Ρωτάει τον δούλο τι εμβαδόν έχει και του απαντάει 4. Του ζητάει στη συνέχεια να του πει τι μήκος θα έχει η πλευρά ενός τετραγώνου το οποίο θα έχει διπλάσιο εμβαδόν από το αρχικό τετράγωνο, δηλαδή 8. Ο δούλος βιάζεται να απαντήσει ότι η πλευρά του νέου τετραγώνου πρέπει να είναι 4 (διπλάσια της πλευράς του πρώτου), αλλά ο Σωκράτης τον παροτρύνει με τον ίδιο τρόπο όπως για το αρχικό τετράγωνο, να υπολογίσει το νέο εμβαδόν, που ισούται με 16 (τέσσερα επί τέσσερα). Ο δούλος πλέον παραδέχεται ότι δεν γνωρίζει την απάντηση, κι ας του φαινόταν προφανής αρχικά.

Η μέθοδος και η οργάνωση της διδασκαλίας στηρίχθηκε σε: φύλλα εργασίας με ατομικές και ομαδικές εργασίες συμμετοχικού/ ενεργητικού, διερευνητικού, ανακαλυπτικού και βιωματικού χαρακτήρα(βασισμένα στην πορεία του διαλόγου) και σε πολυμεσικό υλικό, ενώ ως εκπαιδευτικά μέσα και εργαλεία χρησιμοποιήθηκαν: ανοιχτοί εκπαιδευτικοί πόροι, εξωτερικοί σύνδεσμοι και εκπαιδευτικές πλατφόρμες.

Αξιολόγηση: Μετά το πέρας της διδασκαλίας πραγματοποιήθηκε αξιολόγηση και ανατροφοδότηση μέσω ερωτηματολογίων που δόθηκαν στους συμμετέχοντες μαθητές και στους εκπαιδευτικούς που παρακολούθησαν τις διδασκαλίες.

Συμπεράσματα

Η διδασκαλία απέκτησε εργαστηριακή και ευρηματική μορφή, καθώς οι μαθητές χωρισμένοι σε ομάδες αναζήτησαν απαντήσεις σε μαθηματικά και φιλοσοφικά ερωτήματα και εξοικειώθηκαν με την μέθοδο project. Η αυτενέργεια των μαθητών κατά τη διδασκαλία οδήγησε σε βιωματική μάθηση και σε αυτοπραγμάτωση. Ουσιαστικά πραγματοποιήθηκε μια ομαδική διδασκαλία που οδήγησε στη μάθηση μέσω μιας συγκεκριμένης ακολουθίας ενεργειών και βιωμάτων (Frey 1986). Οι μαθητές κλήθηκαν να προσεγγίσουν το θέμα σε μια διαδικασία αυθεντικής και ολιστικής επικοινωνίας με το περιβάλλον, χωρίς να εντάσσουν απαραίτητα τις δράσεις τους σε κάποιο επιστημονικό κλάδο κάθε φορά (Κούσουλας 2004). Μέσα από αυτή τη μαθησιακή διαδικασία οι μαθητές πραγμάτωσαν τις αληθινές τους δυνατότητες (αυτοπραγμάτωση) και ανέπτυξαν την προσωπικότητά τους προβληματιζομενοι σε καίρια ζητήματα φιλοσοφικής ηθικής. Η διαθεματικότητα και η διεπιστημονικότητα απέκτησαν "σάρκα και οστά" μέσα στην αίθουσα των μαθηματικών μέσα από τη σφαιρική μελέτη θεμάτων καθολικού ενδιαφέροντος (Ματσαγγούρας 2002). Το σχολείο έγινε εργαστήριο, οι μαθητές βίωσαν νέες εμπειρίες μέσα από σύνθετα σχήματα αλληλεπίδρασης και η εκπαίδευση δεν αποσκοπούσε πια στη ζωή, αλλά ήταν η ίδια η ζωή (Θεοφιλίδης 1987).

«Αν πιστεύαμε πως πρέπει να αναζητούμε όσα δεν γνωρίζουμε, θα γινόμαστε καλύτεροι, πιο θαρραλέοι και λιγότερο νωθροί» Πλάτων, Μένων, 86b (Δικτυογραφία 1). Αυτό είναι ένα από τα βασικά μηνύματα που προβλήθηκαν στους μαθητές. Μήνυμα ζωής που έγινε δεκτό από μαθητές που ασχολήθηκαν ουσιαστικά με κάποιες πτυχές του διαλόγου Μένων.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Frey K., *Η « Μέθοδος Project»*, εκδ. Αφών Κυριακίδη , Θεσσαλονίκη 1986.

Γιακουμή Ρ., *Μεταφυσικές και γνωσιολογικές πλαισιώσεις της ηθικής στον πλατωνικό διάλογο Μένων*, Διπλωματική Εργασία στο Τμήμα Φιλοσοφίας Πατρών, Πάτρα 2014.

Θεοφιλίδη Χ., *Διαθεματική Προσέγγιση της Διδασκαλίας*, αυτοέκδοση, Λευκωσία 1987.

Κούσουλας Φ., *Σχεδιασμός και εφαρμογή διαθεματικής διδασκαλίας,* εκδ. Ατραπός, Αθήνα 2004

Ματσαγγούρας Η.*, Η διαθεματικότητα στη σχολική γνώση,* εκδ. Γρηγόρη, Αθήνα 2002.

Ματσαγγούρας, Η., *Η καινοτομία των ερευνητικών εργασιών στο Νέο Λύκειο*. ΟΕΔΒ, Αθήνα 2011.

Μπελεσιώτης, Β.Σ. - Τριανταφύλλου Α., *Η Διαθεματικότητα και το σύστημα αξιολόγησης*. 25ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Εταιρείας, 401-408, Βόλος 2008.

«Σύγχρονη Εκπαίδευση», περιοδικό, *Αφιέρωμα στη διαθεματικότητα*, τχ.131, σσ. 25- 78, Αθήνα 2003.

Ψηφιακά σχολικά βιβλία

Ευκλείδεια Γεωμετρία, τεύχος Β, Κεφάλαιο 10: Εμβαδά.

http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2694/Geometria_B-Lykeiou_html-empl/

Αρχές Φιλοσοφίας, Β΄Γενικού Λυκείου, Κεφάλαιο 3: Αναζητώντας τη γνώση

http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2664/Arches-Filosofias_B-Lykeiou_html-apli/index3.html

Δικτυογραφία

https://eranistis.net/wordpress/2015/05/07/socrates-virtue-menon/

(ημερομηνία προσπέλασης 05/10/2025)

https://hegel-platon.blogspot.com/2021/09/blog-post_18.html?m=1&fbclid=IwAR2ejm4oBRvstHiKOtnQJ2_V_i05mKIJfWznh-nYD0WoI9CdmzmIGQAB1Ww

(ημερομηνία προσπέλασης 05/10/2025)

Παράρτημα
Τίτλος διδακτικού σεναρίου:
Τετραγωνίζειν ἐστί φιλοσοφεῖν: Μια διεπιστημονική διδακτική πρόταση για το Λύκειο
Εκτιμώμενη διάρκεια διδακτικού σεναρίου
2 διδακτικά δίωρα, συνολικά 4 διδακτικές ώρες
Ένταξη του διδακτικού σεναρίου στο πρόγραμμα σπουδών/προαπαιτούμενες γνώσεις
Φιλοσοφία, Β΄Λυκείου, 3η Θεματική ενότητα : Κατανοώντας την πραγματικότητα: οι απόψεις του Πλάτωνα για την πηγή της γνώσης
Γεωμετρία, Β΄ Λυκείου, Εμβαδά βασικών επίπεδων σχημάτων
Σκοποί και στόχοι του διδακτικού σεναρίου
Βασικός σκοπός της διδασκαλίας είναι η διεπιστημονική προσέγγιση της γνώσης και η ανάδειξη της σχέσης της φιλοσοφίας με τη γεωμετρία.
Οι στόχοι της διδασκαλίας έχουν αναφερθεί στο κύριο μέρος.
Περιγραφή του διδακτικού σεναρίου
Αναφέρεται στο κύριο μέρος.
Χρήση Η.Υ., ΤΠΕ, καθώς και άλλων μέσων για το διδακτικό σενάριο
Φύλλο εργασίας, παρουσίαση ppt, αρχείο Geogebra στο οποίο κατασκευάζεται βήμα προς βήμα η γεωμετρική προσέγγιση του προβλήματος.
Αναπαραστάσεις των μαθητών/πρόβλεψη δυσκολιών στο διδακτικό σενάριο
Δυσκολία στην κατανόηση του πλατωνικού κειμένου «Μένων»
Υποκείμενη θεωρία μάθησης
Διαθεματικότητα, διεπιστημονικότητα και ομαδοσυνεργατικότητα.

Αξιολόγηση
Ερωτηματολόγιο για τους εκπαιδευτικούς που παρακολούθησαν την καινοτόμα δράση:
1. Παρουσίασαν με σαφήνεια (α) τους στόχους, (β) τις διαδικασίες μαθήματος;
2. Καθοδήγησαν τους μαθητές, στο πλαίσιο: (α) της εμπέδωσης (β) της κριτικής /συνδυαστικής σκέψης (γ) της παραγωγής νέας πρωτότυπης γνώσης;
3. Υπέβαλαν ερωτήματα στους μαθητές, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, στο πλαίσιο: (α) εμπέδωσης (β) κριτικής /συνδυαστικής σκέψης (γ) της παραγωγής νέας πρωτότυπης γνώσης;
4. Απάντησαν στους μαθητές με κατάλληλες νύξεις στο πλαίσιο: (α) εμπέδωσης (β) κριτικής σκέψης (γ) της παραγωγής νέας γνώσης;
5. Χρησιμοποίησαν γλωσσικό κώδικα που προωθεί την επιστήμη και τη σκέψη των μαθητών;
6. Τα διδακτικά μέσα (α) και η χρήση τους (β) ήταν ανάλογα με τους διδακτικούς στόχους / ανάγκες των μαθητών;
7. Είχαν καλή γνώση του γνωστικού αντικειμένου: -(α) σε περιεχόμενο -(β) σε παιδαγωγική;
8. Οι οδηγίες προς τους μαθητές ήταν σαφείς και με παραδείγματα;
9. Κινήθηκαν ανάμεσα στους μαθητές και καθοδήγησαν / εμψύχωσαν κατά τη διάρκεια του μαθήματος;

10. Το μάθημα ήταν δομημένο έτσι ώστε η ροή της διδασκαλίας και η μετάβαση από δραστηριότητα σε δραστηριότητα να είναι ευδιάκριτη και στρωτή;
11. Μετέφεραν προσωπικό ενθουσιασμό στους μαθητές;
12. Θεωρείτε ότι μια τέτοιου είδους διεπιστημονική /διαθεματική διδασκαλία έχει θέση στο ωρολόγιο πρόγραμμα του σχολείου;

Ερωτηματολόγιο για τους μαθητές:
1. Θεωρείτε τη δραστηριότητα/διδασκαλία που παρακολουθήσατε ενδιαφέρουσα;
2. Σε ποιο βαθμό κατανοήσατε

Α) το αρχικό γεωμετρικό πρόβλημα
Β)την αναλυτική γεωμετρική προσέγγιση (πριν την τελική λύση)
Γ) την τελική λύση του γεωμετρικού προβλήματος
Δ) τον βασικό στόχο της διαλεκτικής-μαιευτικής μεθόδου του Σωκράτη
Ε) τη σχέση επιστήμης και ηθικής

Σημαντική παρατήρηση: Όλες οι ερωτήσεις απαντήθηκαν σε πενταβάθμια κλίμακα (1 = καθόλου, 5 = πάρα πολύ)

Πρόταση για περαιτέρω δραστηριότητα
Δραματοποίηση διαλόγου από τους ίδιους τους μαθητές.

Ακολουθεί το φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές.

Φύλλο Εργασίας: Πλατωνικός διάλογος «Μένων» (82b - 85b)

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Πες μου, τέκνο μου, γνωρίζεις ότι το τετράγωνο επίπεδο είναι τέτοιο;
ΔΟΥΛΟΣ: Βέβαια το γνωρίζω.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: [82c] Υπάρχει λοιπόν, τετράγωνο επίπεδο που να έχει ίσες αυτές τις γραμμές, που είναι τέσσερις;
ΔΟΥΛΟΣ: Μάλιστα.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν είναι και αυτές που το διασχίζουν στην μέση ίσες;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν θα μπορούσε λοιπόν τέτοιο τετράγωνο να είναι και μεγάλο και μικρό;
ΔΟΥΛΟΣ: Μάλιστα.

- **Ποιο σχήμα φαίνεται να γνωρίζει ο δούλος;**

………………………………………………………………………………………………………

- **Πώς χωρίζει το αρχικό σχήμα ο Σωκράτης;**

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Αν λοιπόν αυτή η πλευρά ήταν δύο πόδια και αυτή δύο, πόσα πόδια θα ήταν όλο συλλήβδην; Εξέτασέ το: αν αυτή ήταν δύο πόδια, ενώ αυτή μόνον ένα πόδι, όλο συλλήβδην δεν θα ήταν δύο πόδια το τετράγωνο;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: [82d] Επειδή όμως δύο πόδια έχει και αυτή, δεν γίνεται δύο φορές δύο πόδια;
ΔΟΥΛΟΣ: Γίνεται.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Γίνεται, επομένως, δύο φορές δύο πόδια.
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Και πόσα λοιπόν είναι δύο φορές δύο πόδια; Υπολόγισε και πες.
ΔΟΥΛΟΣ: Τέσσερα, Σωκράτη.

- **Τι υπολογίζει ο δούλος με τη βοήθεια του Σωκράτη;**

……………………………………………………………………………………………………
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν θα μπορούσε λοιπόν να είναι ένα άλλο διπλάσιο αυτού του τετραγώνου, τέτοιο που να έχει ίσες όλες τις γραμμές, όπως και αυτό; ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Και πόσων ποδιών λοιπόν θα είναι;
ΔΟΥΛΟΣ: Οκτώ.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Προσπάθησε να μου πεις πόσο θα είναι [82e] η κάθε γραμμή του τετραγώνου; Η μία εδώ είναι δύο πόδια. Πόσο θα είναι η γραμμή του διπλάσιου;
ΔΟΥΛΟΣ: Είναι προφανές, Σωκράτη ότι θα είναι η διπλάσια.

- **Ποιος είναι ο βασικός γεωμετρικός προβληματισμός του Σωκράτη, που καλείται να απαντήσει ο δούλος;**

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

- **Να σχεδιάσετε στο σχήμα την απάντηση που προτείνει ο δούλος.**

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Βλέπεις, Μένων, πως εγώ τίποτα δεν τον διδάσκω αυτόν, αλλά τον ρωτώ σε όλα; Και τώρα αυτός νομίζει ότι γνωρίζει ποιά είναι η γραμμή από την οποία θα γίνει το τετράγωνο των οκτώ ποδιών, ή δεν έχεις την γνώμη ότι θα είναι έτσι;
ΜΕΝΩΝ: Νομίζω, βέβαια.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Γνωρίζει, λοιπόν;
ΜΕΝΩΝ: Όχι δεν γνωρίζει.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Νομίζει, δηλαδή, ότι θα γίνει από την διπλάσια (γραμμή);
ΜΕΝΩΝ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Παρατήρησε λοιπόν αυτόν που θα ανακαλέσει στην μνήμη εκ νέου, όπως πρέπει να ανακαλεί στην μνήμη.

- **Τι πιστεύετε επιδιώκει ο Σωκράτης να κάνει;**

α) Να διδάξει τις γνώσεις του στον δούλο.
β) Να αποδείξει στον Μένωνα ότι οι δούλοι δεν μπορούν να κατανοήσουν μαθηματικές ιδέες.
γ) Να βοηθήσει τον δούλο να θυμηθεί τις γνώσεις που η ψυχή του κατέχει.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Εσύ τώρα πες μου. [83a] Από την διπλάσια γραμμή ισχυρίζεσαι ότι γίνεται το διπλάσιο τετράγωνο; Και λέω αυτό, όχι να είναι αυτή (η γραμμή), από την μια, μακρά και, από την άλλη, βραχεία, αλλά να είναι ίσες παντού, όπως είναι αυτό εδώ,

το διπλάσιο όμως από αυτό, δηλαδή οκτώ πόδια. Αλλά δες αν ακόμη έχεις την γνώμη ότι θα γίνει από την διπλάσια.
ΔΟΥΛΟΣ: Έχω αυτή την γνώμη.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν γίνεται λοιπόν αυτή διπλάσια αυτής, αν προσθέσουμε σε αυτήν εδώ μια άλλη την ίδια;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι Βέβαια.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Από αυτή λοιπόν, ισχυρίζεσαι, θα είναι το οκτώ ποδιών τετράγωνο, αν αυτές είναι τέσσερις;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: [83b] Να χαράξουμε λοιπόν από αυτή τέσσερις ίσες γραμμές. Δεν θα ήταν αυτό που ισχυρίζεσαι ότι είναι οκτώ ποδιών;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι βέβαια.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν είναι σε αυτό με τις τέσσερις γραμμές, η κάθε μία από τις οποίες είναι ίσες με αυτό των τεσσάρων ποδιών;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Πόσο γίνεται λοιπόν; Δεν θα είναι τέσσερις φορές τόσο;
ΔΟΥΛΟΣ: Πώς δεν θα είναι;
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Διπλάσιο θα είναι λοιπόν το τέσσερις φορές τόσο;
ΔΟΥΛΟΣ: Όχι μα τον Δία.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Αλλά ποσαπλάσιο;
ΔΟΥΛΟΣ: Τετραπλάσιο.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: [83c] Άρα, από την διπλάσια γραμμή, τέκνο, όχι το διπλάσιο αλλά γίνεται το τετραπλάσιο τετράγωνο.
ΔΟΥΛΟΣ: Αληθή λόγο διατυπώνεις.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Λοιπόν τέσσερις φορές το τέσσερα είναι δεκαέξι. Δεν είναι;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.

- **Σχεδιάστε στο σχήμα τα δεκαέξι μικρά τετράγωνα που δημιουργήθηκαν μετά από την πρόταση που έκανε ο δούλος.**

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Και το οκτώ ποδιών τετράγωνο από ποια γραμμή; Δεν είναι από αυτήν το τετραπλάσιο;
ΔΟΥΛΟΣ: Αυτό ισχυρίζομαι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Και το τεσσάρων ποδιών από την ημίσεα αυτής εδώ;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Άνετα εξελίσσεται η σκέψη. Το οκτώ ποδιών τετράγωνο δεν είναι αυτού εδώ το διπλάσιο ενώ αυτού το ήμισυ;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν θα είναι από αυτό μεγαλύτερο από αυτήν τη γραμμή, [83d] και μικρότερη από αυτήν εδώ, ή όχι;
ΔΟΥΛΟΣ: Έχω την εντύπωση πως έτσι είναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Ωραία. Αυτό για το οποίο έχεις γνώμη, αυτό απάντα. Και πες μου, δεν είναι αυτή δύο ποδιών ενώ η άλλη τεσσάρων;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Επομένως, πόσο πρέπει να είναι η γραμμή του οκτώ ποδιών; [83e] Προσπάθησε να αποτυπώσεις πόσο ισχυρίζεσαι ότι είναι αυτή;

ΔΟΥΛΟΣ: Τρία πόδια.

- **Ποιες ανισοτικές σχέσεις προσπαθεί να εκμαιεύσει ο Σωκράτης από τον δούλο;**

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Αν λοιπόν είναι τρία πόδια, δεν θα προσθέσουμε το ήμισυ αυτής και θα είναι τρία πόδια; Από τη μια, δύο αυτές και αυτό εδώ το ένα. Και από την άλλη, τις δύο αυτές και το ένα. Και γίνεται αυτό το τετράγωνο που ισχυρίζεσαι.
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Αν λοιπόν είναι αυτή τρία πόδια και αυτή εδώ τρία πόδια, ολόκληρο το επίπεδο δεν είναι τρεις φορές τρία πόδια;
ΔΟΥΛΟΣ: Έτσι φαίνεται.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Τρεις φορές το τρία πόσα πόδια είναι;
ΔΟΥΛΟΣ: Εννέα.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Πόσα πόδια έπρεπε να είναι το διπλάσιο;
ΔΟΥΛΟΣ: Οκτώ.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Επομένως, δεν γίνεται από τα τρία πόδια το οκτώ ποδιών τετράγωνο.
ΔΟΥΛΟΣ: Όχι δεν γίνεται.

- **Προς ποια κατεύθυνση οδήγησε ο Σωκράτης τον δούλο;**

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Αλλά από πόσα; Προσπάθησε να μας πεις ακριβώς. Και αν δεν θες να μετρήσεις, τότε δείξε μας από ποιά γραμμή;
ΔΟΥΛΟΣ: Όμως, μα τον Δία, Σωκράτη, εγώ δεν γνωρίζω.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Αντιλαμβάνεσαι πάλι, Μένων, δεν είναι ήδη προκεχωρημένος προς το να ανακαλέσει στην μνήμη; Διότι, ενώ αρχικά δεν γνώριζε, ποια είναι η γραμμή του οκτάποδου επιπέδου, όπως ούτε τώρα γνωρίζει, είχε τη γνώμη πως γνώριζε για αυτήν την γραμμή και με θάρρος απαντούσε σαν να γνώριζε και δεν πίστευε ότι ήταν σε κατάσταση απορίας. Τώρα όμως ήδη πιστεύει ότι βρίσκεται σε κατάσταση απορίας, σαν να μην γνωρίζει, ούτε νομίζει ότι [84b] γνωρίζει.
ΜΕΝΩΝ: Αληθή λόγο διατυπώνεις.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν είναι λοιπόν πιο σωστά για το πράγμα το οποίο δεν γνώριζε;
ΜΕΝΩΝ: Αυτήν την γνώμη έχω.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Οδηγώντας τον λοιπόν να ευρίσκεται σε κατάσταση απορίας και νάρκωσης, σαν την νάρκη, τον βλάψαμε;
ΜΕΝΩΝ: Δεν νομίζω.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Είχαμε ένα ορισμένο όφελος, όπως φαίνεται, ως προς το να ανακαλύψει τι ισχύει. Διότι τώρα με ευχαρίστηση θα μπορούσε να ερευνήσει, εφόσον δεν γνωρίζει, και έτσι με ευκολία ενώπιον πολλών και [84c] πολλές φορές θα είχε την

εντύπωση ότι διατυπώνει ορθούς ισχυρισμούς σχετικά με το διπλάσιο τετράγωνο, που πρέπει να έχει το διπλάσιο της γραμμής μήκος.
ΜΕΝΩΝ: Έτσι φαίνεται.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Έχεις την εντύπωση, λοιπόν, ότι αυτός θα επιχειρούσε καταρχάς να ερευνήσει ή να μάθει αυτό το οποίο νόμιζε πως γνώριζε, ενώ δεν το γνωρίζει, προτού να βρεθεί σε κατάσταση απορίας, αφού νόμισε ότι δεν γνώριζε, και (προτού να) ποθήσει το να γνωρίσει;
ΜΕΝΩΝ: Δεν έχω αυτήν την εντύπωση, Σωκράτη.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Επομένως, αφού βρέθηκε σε κατάσταση νάρκης, ωφελήθηκε;
ΜΕΝΩΝ: Αυτήν την γνώμη έχω.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Εξέτασε από αυτήν την κατάσταση απορίας αυτό που θα ανακαλύψει αφού ερευνήσει μαζί μου, χωρίς τίποτε άλλο παρά μόνο θα διατυπώνω ερωτήσεις και [84d] δεν θα διδάσκω. Πρόσεξε αν κάπου ανακαλύψεις εμένα να τον διδάσκω και να του εξηγώ, και να μην διατυπώνω ερωτήσεις στις γνώμες του.

- **Σε ποιο συμπέρασμα οδηγήθηκε ο Μένων με τη βοήθεια του Σωκράτη;**

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Πες μου λοιπόν εσύ. Δεν έχουμε το τετράγωνο των τεσσάρων ποδιών; Κατανοείς;
ΔΟΥΛΟΣ: Βέβαια, κατανοώ.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε σε αυτό εδώ ένα άλλο ίσο;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Και ένα τρίτο ίσο με καθένα από αυτά;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν θα μπορούσαμε να συμπληρώσουμε αυτό εδώ στη γωνία;
ΔΟΥΛΟΣ: Μάλιστα.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Γίνονται λοιπόν αυτά εδώ τέσσερα τετράγωνα;
ΔΟΥΛΟΣ: [84e] Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Τι λοιπόν; Αυτό εδώ το σύνολο πόσο μεγαλύτερο αυτού εδώ γίνεται;
ΔΟΥΛΟΣ: Τετραπλάσιο.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Έπρεπε λοιπόν να έχουμε το διπλάσιο, ή δεν το θυμάσαι;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι μάλιστα το θυμάμαι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν είναι λοιπόν αυτή η γραμμή από την μια γωνία στην άλλη [85a] [αυτή] που τέμνει στα δύο κάθε ένα από αυτά τα τετράγωνα;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Αυτές οι τέσσερις γραμμές που αποτελούν αυτό εδώ το τετράγωνο, δεν είναι λοιπόν ίσες;
ΔΟΥΛΟΣ: Είναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Εξέτασε λοιπόν. Πόσο μεγάλο είναι αυτό το τετράγωνο;
ΔΟΥΛΟΣ: Δεν καταλαβαίνω.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Δεν είναι αυτά τα τέσσερα και η κάθε γραμμή χώρισε εντός τους το κάθε ένα σε ήμισυ; ή όχι;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Πόσα ημίσεα λοιπόν υπάρχουν σε αυτό το τετράγωνο;
ΔΟΥΛΟΣ: Τέσσερα
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Και πόσα είναι σε αυτό εδώ;
ΔΟΥΛΟΣ: Δύο.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Το τέσσερα τι είναι στο δύο;
ΔΟΥΛΟΣ: Διπλάσιο.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: [85b] Και αυτό εδώ πόσα γίνεται;
ΔΟΥΛΟΣ: Οκτώ ποδιών
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Από ποιά γραμμή;
ΔΟΥΛΟΣ: Από αυτή.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Από αυτήν που τείνει από γωνία σε γωνία του τεσσάρων ποδιών τετραγώνου;
ΔΟΥΛΟΣ: Ναι.
ΣΩΚΡΑΤΗΣ: Οι σοφιστές την αποκαλούν διάμετρο, ώστε, αν αυτής το όνομα είναι διάμετρος, τότε από την διάμετρο, όπως ισχυρίζεσαι, τέκνο του Μένωνος, θα μπορούσε να γίνει το διπλάσιο τετράγωνο.
ΔΟΥΛΟΣ: Βέβαια, Σωκράτη.

- **Να σχεδιάσετε στο σχήμα το διπλάσιο τετράγωνο, όπως τελικά το προτείνει ο Σωκράτης στον δούλο.**
- **Να αποδείξετε χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θεώρημα ότι το τετράγωνο που έχει πλευρά τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, θα έχει διπλάσιο εμβαδό από το αρχικό τετράγωνο.**

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Εργασίες για το σπίτι

1. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη ένα τετράγωνο που έχει τριπλάσιο εμβαδό από ένα άλλο τετράγωνο πλευράς α.
2. Να μελετήσετε το Δήλιο πρόβλημα.

Α' ομάδα (περιγραφή προβλήματος, ιστορικά στοιχεία, προσπάθειες επίλυσης με κανόνα και διαβήτη, τελικό συμπέρασμα: λύνεται;).
Β' ομάδα (παρουσίαση δύο τουλάχιστον λύσεων: π.χ. λύση Μέναιχμου, λύση Νεύτωνα-Νικόμηδου)

Εννοιολογικές και διαδικαστικές όψεις της κατανόησης των μαθηματικών κειμένων

Γιάννης Θωμαΐδης

Δρ. Μαθηματικών – τ. Σχολικός Σύμβουλος
gthom54@gmail.com

Περίληψη

Στην εισήγηση θα προσεγγίσουμε το ζήτημα της κατανόησης των μαθηματικών κειμένων με αφετηρία δύο βασικές αρχές των νέων προγραμμάτων σπουδών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, που αφορούν διδακτικές και μαθησιακές δραστηριότητες υψηλού επιπέδου. Για το σκοπό αυτό θα αξιοποιήσουμε μια κλασική θεωρητική έννοια της διδακτικής των Μαθηματικών, τη διάκριση μεταξύ εννοιολογικής και διαδικαστικής κατανόησης. Θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε τη σχέση αυτής της διάκρισης με το ζήτημα της κατανόησης των μαθηματικών κειμένων, χρησιμοποιώντας εμπειρικά δεδομένα από έρευνες της διδακτικής και από την αξιολόγηση των γραπτών των πανελλαδικών εξετάσεων στα βαθμολογικά κέντρα.

Λέξεις κλειδιά: Εννοιολογική και διαδικαστική κατανόηση, Άλγεβρα Α΄ Λυκείου, Πανελλαδικές εξετάσεις

Εισαγωγή

Στα νέα προγράμματα σπουδών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχουν ενσωματωθεί ορισμένες γενικές αρχές της διδακτικής των Μαθηματικών που βρίσκονται στο προσκήνιο της έρευνας τις τελευταίες δεκαετίες. Τα επόμενα είναι δύο χαρακτηριστικά αποσπάσματα που επαναλαμβάνονται αυτούσια στα προγράμματα του Δημοτικού, Γυμνασίου και Λυκείου (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, 2023 · η έμφαση δική μας):

> [το Π.Σ.] … υποστηρίζει την **ανάπτυξη υψηλού επιπέδου μαθηματικού συλλογισμού**, μαθηματικών ικανοτήτων διατύπωσης και επίλυσης ολοένα και πιο περίπλοκων προβλημάτων, τη διαμόρφωση στάσεων και πεποιθήσεων που βοηθούν τους/τις μαθητές/-τριες να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα στα Μαθηματικά, όπως και εκτός αυτών. Σε αυτήν την κατεύθυνση, το Π.Σ. για τα Μαθηματικά αναγνωρίζει ως σημαντική **την ανάδειξη των μαθηματικών πρακτικών ταυτόχρονα με τη μάθηση του μαθηματικού περιεχομένου.**
>
> … κάθε μαθητής και μαθήτρια, ανάλογα με τις γνωστικές ή άλλες ανάγκες του/της, προσκαλείται να εμπλακεί σε έργα μάθησης που οδηγούν σε **αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα**, η οποία προσφέρει προκλήσεις ανάπτυξης της

> μαθηματικής του/της σκέψης και συμβάλλουν στη συλλογική συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος μέσα από τη συμμετοχή του/της στα δρώμενα της τάξης.

Η αναφορά στην «ανάδειξη των μαθηματικών πρακτικών ταυτόχρονα με τη μάθηση του μαθηματικού περιεχομένου» παραπέμπει άμεσα στην κλασική διάκριση μεταξύ «εννοιολογικής» και «διαδικαστικής κατανόησης» (conceptual and procedural understanding), μια θεωρητική έννοια της διδακτικής η επίδραση της οποίας άρχισε να γίνεται εμφανής στα προγράμματα σπουδών διεθνώς ήδη από τις αρχές αυτού του αιώνα (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p.20).

Είναι αξιοσημείωτο ότι παρόμοιες γενικές αρχές φαίνεται να παίζουν κυρίαρχο ρόλο σε απαιτητικά διεθνή προγράμματα σπουδών που δεν αφορούν μόνο τα Μαθηματικά. Σε κείμενο που περιγράφει τις υποχρεώσεις των εκπαιδευτικών που θα διδάξουν στο Διεθνές Απολυτήριο (I.B.) αναφέρονται τα εξής (Σιακαβάρας 2025):

> Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να εφαρμόζουν τις παιδαγωγικές αρχές του I.B., συμπεριλαμβανομένων της:
>
> - διερευνητικής μάθησης (Inquiry-based learning).
> - εννοιολογικής κατανόησης (Conceptual understanding).
> - διαθεματικής και διερευνητικής διδασκαλίας.
>
> Οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να τηρούν τις αρχές δεοντολογίας και τις πολιτικές του I.B., διασφαλίζοντας την ακαδημαϊκή ακεραιότητα κατά τις εξετάσεις και παρέχοντας κατάλληλη υποστήριξη στους/στις μαθητές/τριες.[4]

Η ευρεία υιοθέτηση των προηγούμενων γενικών αρχών από τους συντάκτες των προγραμμάτων σπουδών δημιουργεί ένα νέο πλαίσιο συζήτησης και ανάλυσης των προβλημάτων της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών, ακόμη και εκείνων που αφορούν άμεσα την καθημερινή διδακτική πρακτική. Χρησιμοποιώντας αυτό το πλαίσιο θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια να προσεγγίσουμε το ζήτημα της κατανόησης των σχολικών μαθηματικών κειμένων, ιδιαίτερα των διδακτικών βιβλίων. Συγκεκριμένα, θα αξιοποιήσουμε το δίπολο «εννοιολογική κατανόηση» – «διαδικαστική κατανόηση» για να εξετάσουμε τη σχέση ορισμένων διαδεδομένων παρανοήσεων των μαθητών με τον τρόπο που οι μαθηματικές έννοιες εισάγονται και αναπτύσσονται στα διδακτικά βιβλία.

1. Οι δύο όψεις της κατανόησης στα Μαθηματικά

Στα μέσα της δεκαετίας του 1970, ο Άγγλος μαθηματικός και ψυχολόγος Richard Skemp χρησιμοποίησε τους όρους “instrumental understanding” και “relational understanding” για τη μελέτη ενός διαχρονικού προβλήματος της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών. Με απλά λόγια, πρόκειται για τη διάκριση ανάμεσα σε

[4] Το συγκεκριμένο κείμενο κυκλοφόρησε ενόψει της εφαρμογής του Προγράμματος I.B. από το σχολικό έτος 2026-27 σε 13 δημόσιες σχολικές μονάδες (μεταξύ των οποίων και το Πειραματικό ΓΕ.Λ. του Πανεπιστημίου Μακεδονίας). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι οι προωθημένες αντιλήψεις για τη διδασκαλία και μάθηση συνδέονται άμεσα με την υποστήριξη που οφείλουν να παρέχουν οι εκπαιδευτικοί στους μαθητές για τις εξετάσεις του I.B., οι οποίες αφορούν τη μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

δύο τύπους μαθηματικής δραστηριότητας, την πρώτη από τις οποίες χαρακτηρίζει η ικανότητα εκτέλεσης διαδικασιών και τη δεύτερη η ικανότητα σύλληψης των σχέσεων μεταξύ των εννοιών. Το διδακτικό πρόβλημα συνδέεται βέβαια με το γεγονός ότι για τη μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η σχέση με τα Μαθηματικά περιορίζεται στον πρώτο τύπο δραστηριότητας. Η έκταση και η οξύτητα αυτού του προβλήματος συνέβαλε, τουλάχιστον σε ένα αρχικό στάδιο, στη δημιουργία της αντίληψης ότι οι όροι του Skemp δεν περιγράφουν απλά μία διάκριση αλλά μία διχοτόμηση (περίπου στα όρια «καλού-κακού») στο χώρο της διδασκαλίας και μάθησης.

Οι δύο έννοιες που εισήγαγε ο Skemp έτυχαν ευρείας αποδοχής στο χώρο της διδακτικής έρευνας, ιδιαίτερα σε χώρες με παράδοση υιοθέτησης των αρχών του συμπεριφορισμού στην εκπαίδευση όπως το Ηνωμένο Βασίλειο και οι Η.Π.Α., και καθιερώθηκαν ως εργαλεία μελέτης των λεπτών ζητημάτων που συνδέονται με την κατανόηση των Μαθηματικών (Hiebert & Lefevre, 1986˙ Hiebert & Carpenter, 1992). Σήμερα η σημασία τους έχει διευρυνθεί σημαντικά, ένα γεγονός που αποτυπώνεται και στη χρήση των επιθέτων «διαδικαστική» (ή «εργαλειακή») και «εννοιολογική» (ή «συσχετιστική»), όχι μόνο για το χαρακτηρισμό της κατανόησης αλλά και της μαθηματικής γνώσης γενικότερα. Η σημαντικότερη όμως εξέλιξη είναι ότι οι δύο τύποι κατανόησης ή γνώσης θεωρούνται πλέον ότι λειτουργούν συμπληρωματικά και όχι ανταγωνιστικά στη μάθηση των Μαθηματικών (Star, 2020). Η εξέλιξη αυτή εκδηλώνεται ιδιαίτερα όταν οι δύο έννοιες χρησιμοποιούνται για την ανάλυση των ανώτερων επιπέδων μαθηματικής σκέψης. Εξετάζοντας τα δομικά στοιχεία και την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, ο Ervynck αναφέρει χαρακτηριστικά τα εξής (1991, p.48):

> Με τον όρο κατανόηση, εννοούμε όχι μόνο την *εργαλειακή* κατανόηση που εμπλέκεται στην ικανότητα εκτέλεσης διαδικασιών, αλλά και τη *σχεσιακή* κατανόηση, με την έννοια του Skemp (1976), η οποία περιλαμβάνει μια ουσιαστική σύλληψη των σχέσεων μεταξύ των εννοιών. Ακόμα και αυτό δεν είναι αρκετό, καθώς υποδηλώνει μια ουσιαστική σχέση μεταξύ των εννοιών στο πλαίσιο που είναι γνωστές επί του παρόντος. Η δημιουργικότητα απαιτεί μια επέκταση αυτού του πλαισίου με τρόπο που δεν είχε γίνει αντιληπτός μέχρι τώρα. Επομένως, απαιτεί από το άτομο να δημιουργήσει νέες ιδέες και να συνδυάσει παλιές ιδέες με έναν νέο τρόπο. Αυτό δεν είναι κάτι που μπορεί να εκτελεστεί κατά παραγγελία.

Σε μια ανασκόπηση του ζητήματος, από την σκοπιά της σύνδεσης των ερευνητικών αποτελεσμάτων με την εφαρμογή τους στη διδακτική πράξη, ο Siegler επισημαίνει τα εξής (2003, p.296):

> Σε όλη τη διάρκεια του 20ού αιώνα, η έμφαση που έδιναν οι διάφορες εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις ταλαντευόταν μεταξύ κατανόησης γεγονότων και διαδικασιών από τη μια μεριά, και κατανόησης εννοιών από την άλλη. Λίγοι

σήμερα θα συμφωνούσαν ότι πρέπει να διδάσκεται αποκλειστικά ο ένας μόνο από τους δύο τύπους μαθηματικής γνώσης. Πολύ λιγότερη συμφωνία υπάρχει, ωστόσο, σχετικά με την ισορροπία που πρέπει να επιδιωχθεί μεταξύ των δύο ή με τον τρόπο που πρέπει να σχεδιαστεί η διδασκαλία ώστε να ενσταλάξει και τους δύο τύπους γνώσης.

Θεωρούμε ότι για το σκοπό αυτής της εργασίας δεν είναι απαραίτητο να επεκταθούμε σε περαιτέρω ανάλυση αυτών των δύο συμπληρωματικών όψεων που παρουσιάζει η κατανόηση της μαθηματικής γνώσης.[5] Στις δύο επόμενες ενότητες θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε τη σημασία της για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών με τη βοήθεια ορισμένων χαρακτηριστικών παραδειγμάτων.

2. Δύο κλασικά παραδείγματα από την ύλη του Δημοτικού και του Γυμνασίου

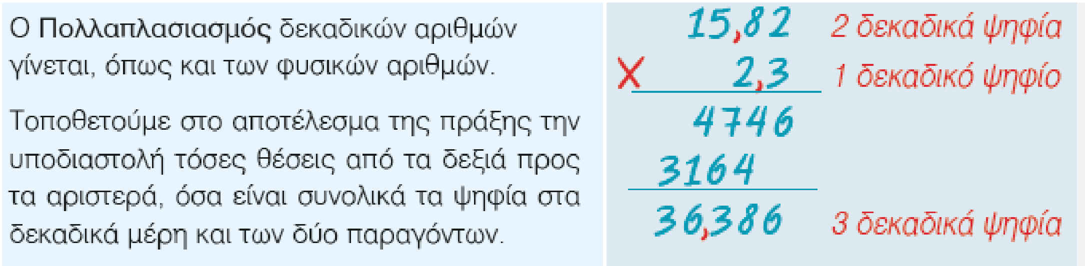
Υπάρχουν αναρίθμητα παραδείγματα που επιβεβαιώνουν την κυριαρχία της διαδικαστικής γνώσης και κατανόησης των σχολικών Μαθηματικών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η δεκαδική αναπαράσταση των κλασμάτων, την οποία η καθιερωμένη διδασκαλία εμφανίζει ως ένα νέο είδος μαθηματικού αντικειμένου, τον «δεκαδικό αριθμό».

Η διαδικαστική γνώση αυτών των «αριθμών», δηλαδή η μηχανική εφαρμογή των κανόνων εκτέλεσης πράξεων καθώς και ορισμένες γνώσεις-εμπόδια (π.χ. «ο πολλαπλασιασμός προκαλεί πάντοτε αύξηση»), υποκαθιστούν την εννοιολογική κατανόησή τους. Έτσι παρουσιάζεται π.χ. το φαινόμενο να εκτελούν πολλοί μαθητές (όχι μόνο του Δημοτικού) πολλαπλασιασμούς μεταξύ απλών «δεκαδικών» με τον ακόλουθο, σύντομο και φαινομενικά απλό, τρόπο:

$$0{,}3\times0{,}5 = 0{,}15 \quad \text{ή} \quad 0{,}2\times0{,}3 = 0{,}6$$

Η τρόπος αυτός δίνει ορθό αποτέλεσμα μόνο στην πρώτη περίπτωση, κάτι που προφανώς δεν αντιλαμβάνονται οι μαθητές. Σε αυτή τη συμπεριφορά συμβάλει ασφαλώς σημαντικά η προσπάθεια που καταβάλλει το σύστημα της διδασκαλίας να καταστήσει την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων μια διαδικασία διαδοχικών βημάτων. Στο βιβλίο Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου η διαδικασία εκτέλεσης του πολλαπλασιασμού δύο «δεκαδικών» περιγράφεται υποδειγματικά, συνδυάζοντας τη γενική διατύπωση του κανόνα με συγκεκριμένο παράδειγμα. Απουσιάζει όμως από αυτή την περιγραφή οποιαδήποτε αναφορά στα στοιχεία που συνιστούν τον πυρήνα της εννοιολογικής κατανόησης του κανόνα (Βανδουλάκης, κ.α., 2025, σ.60):

[5] Για τους αναγνώστες που ενδιαφέρονται να εμβαθύνουν σε πιο εξειδικευμένες όψεις του ζητήματος, με εφαρμογές στη μελέτη ιδιαίτερων προβλημάτων της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην ελληνική εκπαίδευση, συνιστούμε τη μελέτη των εισηγήσεων της ημερίδας με θέμα «Η εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών ως πρόκληση στο σύγχρονο σχολείο (Δημοτικό – Γυμνάσιο – Λύκειο)» που διοργάνωσε η Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί το Μάρτιο του 2018. Από τη σκοπιά που υιοθετούμε σε αυτή την εργασία βλ. ιδιαίτερα τις εισηγήσεις των Ζαχαριάδη, Θωμαΐδη, Καλφοπούλου και Μαρκάδα.



Ο Πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών γίνεται, όπως και των φυσικών αριθμών.

Τοποθετούμε στο αποτέλεσμα της πράξης την υποδιαστολή τόσες θέσεις από τα δεξιά προς τα αριστερά, όσα είναι συνολικά τα ψηφία στα δεκαδικά μέρη και των δύο παραγόντων.

Από όλα τα προηγούμενα, φαίνεται ότι στη διαδικαστική γνώση που αποκτούν οι μαθητές ενσωματώνεται μόνο η φράση «ο πολλαπλασιασμός δεκαδικών αριθμών γίνεται όπως και των φυσικών αριθμών» καθώς και μια υπεραπλουστευμένη αντίληψη για το ρόλο της υποδιαστολής. Αντίθετα, η εννοιολογική κατανόηση θα διατηρούσε σε εγρήγορση τη σχέση της δεκαδικής αναπαράστασης με την έννοια του κλάσματος, σύμφωνα με την οποία η σημασία των δύο προηγούμενων πολλαπλασιασμών αναδεικνύεται από τις ισότητες

$$0{,}3\times 0{,}5=\frac{3}{10}\times\frac{5}{10}=\frac{15}{100}=0{,}15 \quad \text{και} \quad 0{,}2\times 0{,}3=\frac{2}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{6}{100}=0{,}06\,.$$

Μια πιο προωθημένη μορφή εννοιολογικής κατανόησης συνδέεται επίσης με το γεγονός ότι το γινόμενο δύο θετικών αριθμών μικρότερων της μονάδας είναι, όχι μόνο μικρότερο της μονάδας αλλά και μικρότερο από κάθε παράγοντα του γινομένου (το αποτέλεσμα 0,6 είναι μεγαλύτερο από τους παράγοντες 0,2 και 0,3).[6]

Ένα άλλο κλασικό παράδειγμα για το ζήτημα που εξετάζουμε αποτελεί ο λεγόμενος «κανόνας των προσήμων» του πολλαπλασιασμού των αρνητικών αριθμών, και ιδιαίτερα η περιβόητη φράση «μείον επί μείον κάνει συν» που εκφράζεται συμβολικά με την «ισότητα» (–)×(–) = (+). Αυτός είναι ένας σαφής και απλός κανόνας, η τυπική εφαρμογή του οποίου (σε αντίθεση με τον προηγούμενο του πολλαπλασιασμού των «δεκαδικών») δεν παρουσιάζει κάποια δυσκολία.[7] Από την άλλη μεριά, είναι διαχρονική και πασίγνωστη η δυσκολία να δοθεί κάποια πειστική ερμηνεία του, ιδιαίτερα στους μαθητές που τον συναντούν για πρώτη φορά.

Εδώ και αιώνες οι συγγραφείς διδακτικών βιβλίων έχουν επινοήσει αναρίθμητα τεχνάσματα με τα οποία επιχειρούν να αιτιολογήσουν αυτό το παράδοξο αποτέλεσμα. Στο βιβλίο Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, οι συγγραφείς επιχειρούν να πείσουν τους μαθητές για την αναγκαιότητα του κανόνα με τον εξής τρόπο (Βανδουλάκης, κ.α., 2025, σ.129):

[6] Επειδή οι δεκαδικές αναπαραστάσεις συνδέονται στενά με τις μετρήσεις, η επίπτωση του λάθους 0,2×0,3 = 0,6 μπορεί να εκτιμηθεί αν λάβουμε υπόψη την επίδρασή του στον υπολογισμό των σύνθετων γινομένων που εμφανίζονται συχνά στην πράξη, όπως π.χ. το 130×(0,2×0,3). Αρκεί να συγκρίνουμε το ορθό αποτέλεσμα 130×0,06 = 7,8 με το λανθασμένο 130×0,6 = 78.

[7] Εμπειρικές έρευνες μεγάλης κλίμακας σε διάφορες χώρες έχουν δείξει ότι οι μαθητές Γυμνασίου αντιμετωπίζουν πολύ μεγαλύτερη δυσκολία στην εκτέλεση της αφαίρεσης δύο αρνητικών αριθμών παρά στον πολλαπλασιασμό τους. Βλ. ενδεικτικά (Θωμαΐδης, 2009, σ.201).

Ας δούμε τώρα πώς βρίσκουμε το γινόμενο δύο **αρνητικών** ακεραίων.

$(-10) \cdot (+9) = -90$	
$(-10) \cdot (+8) = -80$	Σημειώνουμε τους πολλαπλασιασμούς δύο παραγόντων,
$(-10) \cdot (+7) = -70$	από τους οποίους ο ένας μένει σταθερός, το -10, και ο
$(-10) \cdot (+6) = -60$	άλλος μειώνεται διαδοχικά κατά 1 κάθε φορά.
$(-10) \cdot (+5) = -50$	
$(-10) \cdot (+4) = -40$	Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα αυξάνονται διαδοχικά κατά 10.
$(-10) \cdot (+3) = -30$	
$(-10) \cdot (+2) = -20$	Αν υποθέσουμε ότι και μετά το μηδενισμό του δεύτερου
$(-10) \cdot (+1) = -10$	παράγοντα τα γινόμενα συνεχίζουν να αυξάνονται με τον
$(-10) \cdot 0 = 0$	ίδιο τρόπο, πρέπει να ορίσουμε ότι:
$(-10) \cdot (-1) =$;	$(-10) \cdot (-1) = +10 = +(10 \cdot 1)$
$(-10) \cdot (-2) =$;	$(-10) \cdot (-2) = +20 = +(10 \cdot 2)$
$(-10) \cdot (-3) =$;	$(-10) \cdot (-3) = +30 = +(10 \cdot 3)$
$(-10) \cdot (-4) =$;	$(-10) \cdot (-4) = +40 = +(10 \cdot 4)$
....	....

Η συγκεκριμένη αιτιολόγηση, η οποία στηρίζεται εμμέσως στην ιδιότητα ότι τα γινόμενα των όρων μιας αριθμητικής προόδου με έναν αριθμό αποτελούν επίσης αριθμητική πρόοδο, δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι συμβάλει στην εννοιολογική κατανόηση του πολλαπλασιασμού των αρνητικών αριθμών. Αυτό είναι προφανές με αμιγώς μαθηματικά κριτήρια, αλλά παράλληλα εγείρονται πολλές αμφιβολίες για τη διδακτική σκοπιμότητά της. Αν προσεγγίσουμε το προηγούμενο μαθηματικό κείμενο ως «άσκηση» ανάγνωσης και κατανόησης στο πλαίσιο μιας σχετικής δραστηριότητας στη σχολική τάξη, θα μπορούσαμε να θέσουμε πολλά κριτικά ερωτήματα, όπως π.χ. τα εξής:

- Πώς εξηγείται λογικά ότι μετά το μηδενισμό του δεύτερου παράγοντα τα γινόμενα θα συνεχίσουν να αυξάνονται με τον ίδιο τρόπο;
- Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί ανακάλυψαν τους κανόνες του πολλαπλασιασμού των αρνητικών αριθμών;
- Ποια είναι η χρησιμότητα του πολλαπλασιασμού των αρνητικών αριθμών;

Οι απαντήσεις στα συγκεκριμένα ερωτήματα συνδέονται με πολλές όψεις της εννοιολογικής κατανόησης των αρνητικών αριθμών, και φυσικά είναι αδύνατο να συζητηθούν (και να αφομοιωθούν) όλα από τους μαθητές που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή μαζί τους.[8]

[8] Ο καθηγητής Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Κύπρου Γ.-Σ. Σμυρλής περιγράφει με γλαφυρό τρόπο μια συζήτηση με τον Μητροπολίτη Πάφου Χρυσόστομο, η οποία προκλήθηκε όταν ο τελευταίος του ζήτησε ουσιαστικά μια απάντηση στο τελευταίο από τα προηγούμενα ερωτήματα με «χειροπιαστό παράδειγμα» (Σμυρλής, 2001, σσ.48-49). Η παρατήρηση αυτή δείχνει ότι η εννοιολογική κατανόηση απαιτεί συχνά ένα γνωστικό επίπεδο που δεν είναι συμβατό με την ηλικία που έχουν οι μαθητές όταν εισάγονται για πρώτη φορά σε μια μαθηματική έννοια. Άρα η διδασκαλία οφείλει να προβλέπει «επαναλήψεις προηγούμενων γνώσεων» που έχουν αποκλειστικό στόχο την ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης.

Τα παραδείγματα που αναφέραμε σε αυτή την ενότητα δημιουργούν την αίσθηση ότι τα κείμενα των διδακτικών βιβλίων, στις χαμηλότερες τουλάχιστον βαθμίδες της εκπαίδευσης, καλλιεργούν κυρίως τη διαδικαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και ελάχιστα την εννοιολογική κατανόηση.
Στην επόμενη ενότητα θα επιχειρήσουμε να εμβαθύνουμε σε αυτό το ζήτημα εξετάζοντας ένα παράδειγμα από την ύλη των πανελλαδικών εξετάσεων της Γ΄ Λυκείου.

3. Ένα παράδειγμα από τις πανελλαδικές εξετάσεις

Μετά την αντικατάσταση του συστήματος των Κατευθύνσεων από το σύστημα των Προσανατολισμών το 2015-16, σημειώθηκε μία στροφή στην επιλογή των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων της Γ΄ Λυκείου, ιδιαίτερα στα ερωτήματα με τα οποία επιχειρείται η λεπτή διάκριση των πράγματι αριστούχων υποψήφιων. Αντί για τις εξεζητημένες συνθέσεις από ετερόκλητες ενότητες της διδακτέας ύλης που κυριαρχούσαν στο παρελθόν (και η αντιμετώπισή τους απαιτούσε εξειδικευμένη «μεθοδολογία»), οι θεματοδότες άρχισαν να επιλέγουν ασκήσεις του σχολικού βιβλίου και να διαμορφώνουν ερωτήματα που απαιτούσαν εννοιολογική και όχι μόνο διαδικαστική κατανόηση της αντίστοιχης ύλης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το πρώτο ερώτημα του θέματος Δ των εξετάσεων του 2017:

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,\ 0) \\ e^x \eta\mu x, & x\in[0,\pi] \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα [–1, π] και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της. (Μονάδες 5]

Η συνάρτηση f δημιουργήθηκε από τους θεματοδότες με αξιοποίηση των συναρτήσεων από δύο ασκήσεις της ενότητας 2.3 «Κανόνες Παραγώγισης» του σχολικού βιβλίου (Ανδρεαδάκης κ.α, 2025, σ.120 &122). Η παραγώγιση του πρώτου κλάδου απαιτεί αρχικά το μετασχηματισμό της ρίζας σε δύναμη με ρητό εκθέτη και στη συνέχεια την εφαρμογή του κανόνα για την παράγωγο δύναμης, ενώ η παραγώγιση του δεύτερου κλάδου γίνεται με άμεση εφαρμογή του κανόνα για την παράγωγο γινομένου.

Οι θεματοδότες τοποθέτησαν τη ρίζα $\sqrt[3]{x^4}$ στον πρώτο κλάδο της συνάρτησης που ορίζεται σε ένα διάστημα αρνητικών αριθμών, με προφανή στόχο να ελέγξουν τον ορθό μετασχηματισμό της σε δύναμη με ρητό εκθέτη (η οποία ορίζεται στο Λύκειο μόνο όταν η βάση είναι θετικός αριθμός). Πράγματι, η μεγάλη πλειοψηφία των υποψηφίων που ασχολήθηκαν με το ερώτημα Δ1 έγραψε

$$\left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \text{ αντί του ορθού } \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)' = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$$

Η λανθασμένη εύρεση τη παραγώγου της συνάρτησης f ήταν η μία από τις κύριες αιτίες[9] της μεγάλης αποτυχίας των υποψηφίων να απαντήσουν ορθά στο ερώτημα Δ1, η οποία απεικονίζεται στον επόμενο πίνακα (Μανάρας κ.α., 2018, σσ.682-683˙ Ευαγγελόπουλος, 2022, σ.35):

Η επίδοση στο ερώτημα Δ1/2017 σε τρία Βαθμολογικά Κέντρα με διαφορετική προέλευση γραπτών[10]

Μονάδες	0	1	2	3	4	5
Β.Κ. Δυτ. Θεσ/νίκης	42,5%	31,19%	15,82%	5,6%	2,69%	2,2%
Β.Κ. Ανατ. Θεσ/νίκης	38,99%	28%	11,86%	10,58%	6,52%	4,04%
Β.Κ. Ημαθίας	32%	40%	16%	2,5%	4%	5,5%

Η αποτυχία των αποφοίτων της Γ΄ Λυκείου να χρησιμοποιήσουν με ορθό τρόπο την έννοια «δύναμη με ρητό εκθέτη» που εισάγεται στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου και επαναλαμβάνεται στην επόμενη τάξη (στην εισαγωγή της εκθετικής συνάρτησης), είναι ενδεικτική για το ζήτημα που εξετάζουμε. Στο βιβλίο της Α΄ Λυκείου, ύστερα από μια σύντομη αλλά ενδιαφέρουσα από διδακτική άποψη εισαγωγή, δίνεται ο ακόλουθος ορισμός (Ανδρεαδάκης κ.α., 2025, σ.72):

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Οι πολλοί υποψήφιοι που έγραψαν τον αλγεβρικό τύπο $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$ χωρίς να λάβουν υπόψη τον περιορισμό για τη θετικότητα της βάσης, έδειξαν ότι γνώριζαν το «διαδικαστικό» σκέλος του ορισμού της δύναμης με ρητό εκθέτη αλλά αγνοούσαν τα υπόλοιπα στοιχεία που συνιστούν την «εννοιολογική» κατανόησή του.[11]

[9] Η άλλη αιτία ήταν η αδυναμία επίλυσης της τριγωνομετρικής εξίσωσης ημx + συνx = 0, $x \in (0, \pi)$ για την εύρεση των ριζών της παραγώγου της συνάρτησης f.

[10] Για την ορθή ανάγνωση του πίνακα ο αναγνώστης πρέπει να έχει υπόψη την κατανομή των 5 μονάδων που υιοθετήθηκε από τους συντονιστές των Βαθμολογικών Κέντρων: μία για τη μελέτη της συνέχειας στο διάστημα $[-1, \pi]$, μία για την εύρεση της παραγώγου στο $[-1, 0)\cup(0, \pi]$, μία για τη μελέτη της παραγωγισιμότητας στο 0, μία για την εύρεση των ριζών της παραγώγου και μία για την αναγραφή των κρίσιμων σημείων.

[11] Στην αντίθετη κατεύθυνση, ένας πολύ μικρός αριθμός υποψηφίων έδειξε υψηλό επίπεδο εννοιολογικής κατανόησης (που περικλείει στοιχεία δημιουργικής σκέψης), μετασχηματίζοντας τον πρώτο κλάδο της συνάρτησης f στη μορφή

$$\sqrt[3]{x^4} = \left(x^4\right)^{\frac{1}{3}}$$

Η προηγούμενη συμπεριφορά δεν αφορά μόνο τις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών από τις προηγούμενες τάξεις, αλλά σχετίζεται με την έννοια «ισότητα συναρτήσεων» που είχαν διδαχθεί στην Γ΄ Λυκείου. Στο ερώτημα «Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;» (που τέθηκε στις πανελλαδικές εξετάσεις το 2004 και το 2016), πολλοί μαθητές έδιναν την απάντηση «Όταν ισχύει f(x) = g(x)» χωρίς το κρίσιμο συμπλήρωμα «για κάθε x που ανήκει στα αντίστοιχα πεδία ορισμού».
Το παράδειγμα που αναπτύξαμε σε αυτή την ενότητα (θα μπορούσαν να αναφερθούν πολλά παρόμοια από την πλούσια «συγκομιδή» των πανελλαδικών εξετάσεων) αφορά μαθητές που είχαν υποστεί πολύωρη προετοιμασία, τόσο ενδοσχολική όσο και εξωσχολική, και διέθεταν ισχυρά κίνητρα διάκρισης. Το γεγονός αυτό καθιστά πολύ ενδιαφέρουσα τη μελέτη των σχολικών μαθηματικών κειμένων με τα οποία οι συγκεκριμένοι μαθητές διδάχθηκαν την έννοια «δύναμη» στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Στην επόμενη ενότητα θα επιχειρήσουμε μια κριτική ανάγνωση των σχετικών αποσπασμάτων από δύο διδακτικά βιβλία του Γυμνασίου και του Λυκείου.

4. Μια «άσκηση» κατανόησης μαθηματικών κειμένων από δύο διδακτικά βιβλία

Η διδασκαλία της έννοιας «δύναμη» στα σχολικά βιβλία ακολουθεί μια κλασική σπειροειδή ανάπτυξη με διαδοχικές επεκτάσεις, που αρχίζουν στην Α΄ Γυμνασίου και ολοκληρώνονται στη Β' Λυκείου. Στο βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου η σχετική ενότητα αρχίζει με ένα σύντομο κείμενο επανάληψης των γνώσεων που έχουν αποκτήσει οι μαθητές στο Γυμνάσιο (Ανδρεαδάκης, κ.α., 2025, σ.46):

> **Δυνάμεις**
> Είναι γνωστή από το Γυμνάσιο η έννοια της δύναμης αριθμού με εκθέτη ακέραιο. Συγκεκριμένα, αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:
>
> $$\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παραγοντες}} \text{ για } \nu>1 \text{ και } \alpha^{1}=\alpha \text{ για } \nu=1$$
>
> Αν επιπλέον είναι $\alpha \neq 0$, τότε ορίσαμε ότι:
>
> $$\alpha^{0}=1 \quad \text{και} \quad \alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}.$$

Αν οι μαθητές που διαβάζουν τα παραπάνω ανατρέξουν (μόνοι τους ή με προτροπή του διδάσκοντα) στις ενότητες 7.8 «Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό» και 7.9 «Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο» του βιβλίου Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, θα συναντήσουν μεταξύ άλλων το ακόλουθο κείμενο (Βανδουλάκης, κ.α., 2025, σ.140· η έμφαση δική μας):[12]

[12] Οι συγκεκριμένες παράγραφοι του βιβλίου διδάσκονται στην αρχή της Β΄ Γυμνασίου.

Θυμόμαστε – Μαθαίνουμε

Σύμφωνα με τον κανόνα της διαίρεσης των δυνάμεων με την ίδια βάση, που μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι:

$\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^0$, γνωρίζουμε ότι είναι και $\frac{5^7}{5^7} = 1$ **επομένως** $5^0 = 1$.

Με την έννοια αυτή ορίζουμε:

Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα. $\boxed{\alpha^0 = 1}$

Επίσης, θα είναι:

$\frac{5^7}{5^8} = 5^{7-8} = 5^{-1}$, γνωρίζουμε ότι είναι και $\frac{5^7}{5^8} = \frac{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{1}{5}$, **άρα** $5^{-1} = \frac{1}{5}$

$\frac{5^6}{5^8} = 5^{6-8} = 5^{-2}$, γνωρίζουμε ότι είναι και $\frac{5^6}{5^8} = \frac{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5}{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{1}{5^2}$, **άρα** $5^{-2} = \frac{1}{5^2}$ κ.ο.κ .

Με την έννοια αυτή ορίζουμε:

Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη. $\boxed{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu}$

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό, που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

Ένα βασικό σχόλιο για το προηγούμενο κείμενο είναι ότι στον ορισμό της δύναμης με εκθέτη μηδέν ή αρνητικό ακέραιο χρησιμοποιήθηκε έμμεσα η λεγόμενη «αρχή της διατήρησης». Η αρχή αυτή αποτελεί ένα κριτήριο επιλογής ορισμών που δεν είναι αυθαίρετοι αλλά διατηρούν, στο πλαίσιο της Αριθμητικής ή της Άλγεβρας, τις αρχικές ιδιότητες μιας έννοιας καθώς αυτή επεκτείνεται σε ένα ευρύτερο σύνολο αριθμών. Ενώ ο ρόλος της είναι καθαρά ευρετικός, η χρήση της σε ένα διδακτικό κείμενο (ιδιαίτερα του Γυμνασίου) μπορεί να οδηγήσει σε σοβαρές παρανοήσεις. Πράγματι, στο προηγούμενο κείμενο η χρήση των συμπερασματικών συνδέσμων «επομένως» και «άρα» δημιουργεί την ψευδαίσθηση ότι οι ισότητες

$$\alpha^0 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu},$$

αποδεικνύονται από τον κανόνα της διαίρεσης των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό αριθμό που έχουν ίδια βάση

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}.$$

Μια τέτοια εξέλιξη δεν συμβάλει προφανώς στην κατανόηση της έννοιας του μαθηματικού ορισμού και μάλλον γίνεται αφορμή παρανοήσεων για τη σχέση μεταξύ «ορισμού» και «απόδειξης». [13]

Επιστρέφοντας στο βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου διαπιστώνουμε ότι η «αρχή της διατήρησης» εφαρμόζεται εκεί με άμεσο τρόπο για να οριστεί η έννοια της δύναμης με ρητό εκθέτη (Ανδρεαδάκης, κ.α., 2025, σ.72˙ η έμφαση δική μας):

> **Δυνάμεις με ρητό εκθέτη**
>
> Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου α > 0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τις οποίες θα ονομάσουμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να **διατηρούνται** οι γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη.
>
> Τι θα πρέπει, για παράδειγμα, να σημαίνει το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $\left(\alpha^{p}\right)^{q} = \alpha^{pq}$ και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα πρέπει να είναι
>
> $$\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^{5} = 3^{\frac{2}{5}\cdot 5} = 3^{2}.$$
>
> Άρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^{5} = 3^{2}$.
>
> Δηλαδή πρέπει να είναι $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{2}}$. Γενικά:
>
> ΟΡΙΣΜΟΣ
>
> Αν α > 0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Όπως βλέπουμε, στο κείμενο αυτό γίνεται μία αρκετά προσεκτική εφαρμογή της «αρχής της διατήρησης» κατά την αναζήτηση της σημασίας του συμβόλου $3^{\frac{2}{5}}$, αλλά κανένα σχόλιο για την σκοπιμότητα του περιορισμού σε θετικές μόνο βάσεις.

Γενικότερα, στις δύο ενότητες του βιβλίου της Α΄ Λυκείου δεν υπάρχει καμία αναφορά στους λόγους που επιβάλουν τις διαδοχικές επεκτάσεις της έννοιας «δύναμη», ούτε στην απώλεια του αρχικού νοήματος της έννοιας («γινόμενο ίσων παραγόντων») που αυτές συνεπάγονται. Ο φυσικός εκθέτης ν, που υποδηλώνει το πλήθος των ίσων παραγόντων στη δύναμη α^{ν}, έχει χάσει πλέον αυτή τη σημασία στις δυνάμεις με εκθέτη το μηδέν ή αρνητικό ακέραιο.

[13] Στο Βιβλίο Εκπαιδευτικού που συνοδεύει το βιβλίο Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου, οι οδηγίες για τις ενότητες 7.8 και 7.9 εξαντλούνται στην κατανομή των διδακτικών ωρών και την κατηγοριοποίηση των ασκήσεων, χωρίς αναφορές στα προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης που έχουν καταγραφεί εδώ και αρκετές δεκαετίες από τις έρευνες της διδακτικής.

Μια αμυδρή εικόνα αποκτούν ενδεχομένως οι μαθητές από την παρατήρηση με την οποία κλείνει η προηγούμενη ενότητα (ό.π., σ.72):

> Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη.
>
> Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με ριζικά .

Στις εφαρμογές και ασκήσεις που ακολουθούν, η συγκεκριμένη «διευκόλυνση» χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό παραστάσεων που περιέχουν ριζικά με υπόρριζα συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς, και επομένως απαιτούν μόνο το «διαδικαστικό» σκέλος του ορισμού της έννοιας «δύναμη με ρητό εκθέτη».

Ορισμένες εξελίξεις στο ζήτημα αυτό σημειώθηκαν το 2016, στο πλαίσιο μιας «δράσης εξορθολογισμού» της διδακτέας ύλης από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, η οποία οδήγησε σε περικοπές με στόχο να δοθεί μεγαλύτερη βαρύτητα στην εμβάθυνση.[14] Στις «Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών» του σχολικού έτους 2016-17 αναφέρεται ότι δεν θα διδαχθούν οι ιδιότητες των ριζών $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$ και $\sqrt[\mu\cdot\rho]{\alpha^{\nu\cdot\rho}} = \sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$ με το επιχείρημα ότι

> … καλύπτονται πλήρως από τη χρήση των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και μάλιστα με μικρότερες δυσκολίες χειρισμών. (Υ.Α.150652/Δ2/15-09-2016, σ.5).

Στις ίδιες οδηγίες εντάχθηκε επίσης το ακόλουθο κείμενο:

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Στο ερώτημα ποιον αριθμό εκφράζει η παράσταση $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2$ δόθηκαν δυο διαφορετικές απαντήσεις. Να εξετάσετε που βρίσκεται το πρόβλημα.

1η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{2\frac{1}{4}}\right]^2 = \left[\left[(-2)^2\right]^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$

2η απάντηση: $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = (-2)^{\frac{2}{4}\cdot 2} = (-2)^1 = -2$. (ό.π., σ.6)

Υποθέτουμε ότι αυτή η δραστηριότητα, η οποία αναδεικνύει τις αντιφάσεις που δημιουργεί η αποδοχή δυνάμεων με αρνητική βάση και ρητό εκθέτη, εντάχθηκε στις Οδηγίες ως αντίβαρο στις περικοπές της ύλης και με την προοπτική να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στην «εμβάθυνση». Εκπλήσσει όμως το γεγονός ότι δεν υπάρχει καμία αναφορά στη σκοποθεσία, ούτε κάποια οδηγία για τη διδακτική διαχείρισή της. Είναι χαρακτηριστικό ότι ενώ η αφαίρεση από τη διδακτέα ύλη των δύο ιδιοτήτων των ριζών ενσωματώθηκε αμέσως στη διδακτική πράξη (π.χ. είναι αδύνατο να τεθούν σε διαγωνίσματα ή σε ενδοσχολικές εξετάσεις), δεν υπάρχουν ενδείξεις

[14] Για τα χαρακτηριστικά αυτής της «δράσης εξορθολογισμού» στην οποία έλαβε μέρος μεγάλος αριθμός στελεχών της εκπαίδευσης , βλ. (Θωμαΐδης, 2023, σσ.375-376).

ότι η προηγούμενη δραστηριότητα αξιοποιήθηκε με ανάλογο τρόπο στη διδασκαλία της έννοιας «δύναμη με ρητό εκθέτη».[15]

Συμπεράσματα

Τα παραδείγματα που εξετάσαμε στις προηγούμενες ενότητες αναδεικνύουν τη σημασία του δίπολου «εννοιολογική» και «διαδικαστική κατανόηση» για τη θεωρητική ανάλυση αλλά και την πρακτική αντιμετώπιση των προβλημάτων της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών.

Δεν χρειάζονται ιδιαίτερα επιχειρήματα για να υποστηρίξει κανείς ότι το καθιερωμένο σύστημα της διδασκαλίας στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευσης προωθεί, σχεδόν αποκλειστικά, τη διαδικαστική γνώση.

Η συστηματική αξιοποίηση δραστηριοτήτων που συνδέονται άμεσα με το ζήτημα της «εννοιολογικής κατανόησης» απαιτεί ένα διαφορετικό προσανατολισμό της διδασκαλίας. Εκτός από την παραγωγή του αναγκαίου εκπαιδευτικού υλικού (π.χ. την ένταξη σχετικών κειμένων στα διδακτικά βιβλία), χρειάζεται επίσης να δοθούν παραδείγματα ρεαλιστικών διδακτικών παρεμβάσεων, και όλα αυτά να συνδεθούν οργανικά με την αξιολόγηση των μαθητών (στη μορφή ασκήσεων, προβλημάτων και ερευνητικών εργασιών). Ένα κρίσιμο ρόλο σε αυτό το νέο πλαίσιο διδασκαλίας μπορεί να παίξει η χρήση κριτικών ερωτημάτων που θα γίνουν αντικείμενο προβληματισμού και συζήτησης με τους μαθητές.

Για παράδειγμα, κατά την εισαγωγή ή την επανάληψη της έννοιας «δύναμη» και των επεκτάσεων της στο Γυμνάσιο ή το Λύκειο, ορισμένα ερωτήματα αυτού του είδους που αναδύονται από τα σχολικά κείμενα που εξετάσαμε, είναι τα εξής:

- Γιατί ονομάζεται «δύναμη» του αριθμού α ένα γινόμενο παραγόντων ίσων με το α;
- Γιατί στις δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη δεν χρησιμοποιούμε τους ορισμούς $\alpha^0 = 0$ και $\alpha^{-\nu} = -\alpha^{\nu}$;
- Γιατί δεν ορίζεται η δύναμη 0^0 ;
- Γιατί η δύναμη ενός αριθμού με ρητό εκθέτη ορίζεται μόνο στους θετικούς;

Στο καθιερωμένο (και εκ φύσεως συντηρητικό) σύστημα διδασκαλίας των Μαθηματικών, τέτοιου είδους ερωτήματα θεωρούνται συνήθως «αιρετικά», και οι προτάσεις για τη διδακτική τους αξιοποίηση μη ρεαλιστικές και ανεφάρμοστες. Ήταν όμως αρκετό ένα ερώτημα των πανελλαδικών εξετάσεων για να αναδειχθούν οι ανεπάρκειες των «ρεαλιστικών» παραδοσιακών μεθόδων διδασκαλίας.

---

[15] Αυτή είναι βέβαια μία εμπειρική διαπίστωση από προσωπικές παρατηρήσεις και πληροφορίες κατά την άσκηση καθοδηγητικού έργου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Από κάθε άποψη όμως, παρουσιάζει ενδιαφέρον η διεξαγωγή μιας έρευνας που θα μελετήσει την έκταση και τον τρόπο αξιοποίησης από τους διδάσκοντες του υλικού των σχολικών βιβλίων και των επίσημων οδηγιών διδασκαλίας στο συγκεκριμένο ζήτημα.

Η διαπραγμάτευση των προηγούμενων ερωτημάτων στη σχολική τάξη είναι απολύτως συμβατή με τις απαιτήσεις των νέων προγραμμάτων σπουδών για την ανάπτυξη διδακτικών και μαθησιακών δραστηριοτήτων υψηλού επιπέδου (όπως αυτές που αναφέραμε στην εισαγωγή). Επειδή όμως η πορεία από τα ασφαλή μετόπισθεν του εκπαιδευτικού σχεδιασμού μέχρι την εμπροσθοφυλακή της εκπαιδευτικής πράξης είναι δύσβατη και αχαρτογράφητη, αναδύεται ένα άλλο κριτικό ερώτημα: Έχει τη δυνατότητα το καθιερωμένο σύστημα διδασκαλίας στην Ελλάδα να υλοποιήσει υπερβάσεις αυτού του είδους;

Βιβλιογραφία

Ervynck, C. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 42–53. Dordrecht: Kluwer.

Hiebert, J. & Lefevre P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, 1–27. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum.

Hiebert, J. & Carpenter, Th. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 65–97. New York: Macmillan.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Siegler, R.S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. In J. Kilpatrick, W. Gary Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, 289–303. Reston, VA: NCTM.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 1–7.

Star, I. (2020) Instrumental and relational understanding in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, 389–392. Second Edition. Cham: Springer.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., Σβέρκος, Α., Αδαμόπουλος, Λ. & Δαμιανού, Χ. (2025). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου*. Αθήνα, Ι.Τ.Υ.Ε. «Διόφαντος».

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β. Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. & Πολύζος, Γ. (2025). *Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής*. Αθήνα, Ι.Τ.Υ.Ε. «Διόφαντος».

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν. & Φερεντίνος, Σ. (2025). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*. Αθήνα, Ι.Τ.Υ.Ε. «Διόφαντος».

Ευαγγελόπουλος, Α. (2022). *Επιδόσεις υποψηφίων στις Πανελλαδικές εξετάσεις των Μαθηματικών την περίοδο 2016-2021*. Αθήνα, Εκδόσεις Διηνεκές.

Ζαχαριάδης, Θ. (2018). Η σημασία της εννοιολογικής κατανόησης στη διδασκαλία των Μαθηματικών κατά τη μετάβαση από το σχολείο στο πανεπιστήμιο. Στο Ι. Σαράφης & Α. Πέρδος (Επιμ.), *Η εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών ως πρόκληση στο* *σύγχρονο σχολείο (Δημοτικό-Γυμνάσιο-Λύκειο)*, 56–64. Εισηγήσεις 8ης Ημερίδας Μαθηματικών (10-3-2018). Θεσσαλονίκη: Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί.

Θωμαΐδης, Γ. (2009). Η Ιστορία των Μαθηματικών ως πηγή ιδεών και υλικού για διδακτικές επιλογές και δραστηριότητες: Η περίπτωση των αρνητικών αριθμών. Στο Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών (Επιμ.), *Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*, 193–219. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη.

Θωμαΐδης, Γ. (2018). Η εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών ως βασικό προαπαιτούμενο στη διδασκαλία και μάθηση της Ανάλυσης. Στο Ι. Σαράφης & Α. Πέρδος (Επιμ.), *Η εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών ως πρόκληση στο σύγχρονο σχολείο (Δημοτικό-Γυμνάσιο-Λύκειο)*, 49–55. Εισηγήσεις 8ης Ημερίδας Μαθηματικών (10-3-2018). Θεσσαλονίκη: Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί.

Θωμαΐδης, Γ. (2023). Το μακροβιότερο διδακτικό βιβλίο Μαθηματικών στην ελληνική εκπαίδευση. Στο Α. Μαστραπάς [Επιμ.] *Αναζητώντας τη γνώση: Τα σχολικά εγχειρίδια στο Ελληνικό Κράτος*, 364–378. Πρακτικά του Συνεδρίου του Ι.Ε.Π. για το 200 χρόνια από την Ελληνική Επανάσταση (Αθήνα, 17 - 19 Δεκεμβρίου 2021). Αθήνα: Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Καλφοπούλου, Κ. Η επικράτεια των αλγορίθμων στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο. Στο Ι. Σαράφης & Α. Πέρδος (Επιμ.), *Η εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών ως πρόκληση στο σύγχρονο σχολείο (Δημοτικό-Γυμνάσιο-Λύκειο)*, 19–24. Εισηγήσεις 8ης Ημερίδας Μαθηματικών (10-3-2018). Θεσσαλονίκη: Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί.

Μανάρας, Ν., Μπαρούτης, Δ. & Χριστοδουλίδης, Γ. (2018). Πανελλαδικές Εξετάσεις 2017 Στατιστική Έρευνα Γραπτών Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών και Οικονομικών Σπουδών 53ου Βαθμολογικού Κέντρου. *Πρακτικά 10ης Μαθηματικής Εβδομάδας*, 674–686. Θεσσαλονίκη, Παράρτημα Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Μαρκάδας, Σ. (2018). Η εννοιολογική κατανόηση και η διαδικαστική γνώση στα Μαθηματικά: μια διαρκώς παρούσα διελκυστίνδα στη διδασκαλία τους. Στο Ι. Σαράφης & Α. Πέρδος (Επιμ.), *Η εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών ως πρόκληση στο σύγχρονο σχολείο (Δημοτικό – Γυμνάσιο – Λύκειο)*, 3–18. Εισηγήσεις 8ης Ημερίδας Μαθηματικών (10-3-2018). Θεσσαλονίκη: Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί.

Skemp, R.R. (1996). Εννοιολογική κατανόηση και εργαλειακή κατανόηση (Χ. Σταθοπούλου, Μετ. & Τ. Πατρώνης, Επιμ.). *Ευκλείδης γ'*, 46, 20–35.

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων του Γυμνασίου*. Φ.Ε.Κ. Β' 235, 20 Ιανουαρίου 2023, 2727–2748. Αθήνα: Εθνικό Τυπογραφείο.

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο*. Φ.Ε.Κ. Β' 508, 2 Φεβρουαρίου 2023, 4873–4915. Αθήνα: Εθνικό Τυπογραφείο.

Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β' 1326, 8 Μαρτίου 2023, 11561–11587. Αθήνα: Εθνικό Τυπογραφείο.

Σιακαβάρας, Χ. (2025). Διεθνές Απολυτήριο: Τι πρέπει να γνωρίζουν οι μαθητές/τριες. Ποιες είναι οι υποχρεώσεις των εκπαιδευτικών που θα διδάξουν στα τμήματα του Διεθνούς Απολυτηρίου. Ανακτήθηκε από: https://www.esos.gr/arthra/94173/diethnes-apolytirio-ti-prepei-na-gnorizoyn-oi-mathitestries

Σμυρλής, Γ. – Σ. (2001). Οι συνέπειες από την κατάργηση της Ευκλειδείου Γεωμετρίας στη μέση εκπαίδευση της Κύπρου ή Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης; *Μαθηματική Επιθεώρηση* 55, 45–56.

Όψεις της Μαθηματικής Ορολογίας από μια ιστορική, ετυμολογική και διδακτική σκοπιά

Νίκος Καστάνης[1], Νίκος Τερψιάδης[2]

[1] Δρ. Μαθηματικών, πρ. μέλος ΔΕΠ, Τμήμα Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
nioka47@gmail.com
[2] Μαθηματικός M.Ed., Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας
n.terpsiadis@gmail.com

Περίληψη

Πολλοί μαθηματικοί όροι είναι ακατανόητοι από τους μαθητές και γενικά από τους μη ειδήμονες. Δεν μπορούν να συσχετισθούν, καθόλου εύκολα, τα σημαίνοντα με τα σημαινόμενά τους, με μια διαισθητική και εμπειρική αντίληψη. Το γεγονός αυτό μπορεί να ωθήσει κάποιους ευαίσθητους εκπαιδευτικούς στο γνωστικό και γλωσσολογικό παρασκήνιο της γέννησης και της ανάπτυξης των μαθηματικών όρων, για να βοηθήσουν τη διδακτική τους εξοικείωση. Για τους εκπαιδευτικούς αυτούς, προκαλείται, με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, μια διείσδυση στο ιστορικό και επιστημολογικό υπόβαθρο του μαθηματικού λεξιλογίου, με σκοπό να εμπλουτίσουν τις μαθησιακές διαδικασίες των μαθητών τους, αλλά και να συνειδητοποιήσουν οι ίδιοι το γίγνεσθαι της μαθηματικής ορολογίας. Σε μια τέτοια διείσδυση αποσκοπεί αυτή η εισήγηση.

Λέξεις κλειδιά: Μαθηματική ορολογία, εννοιολογικές αλλαγές, ιστορικό και επιστημολογικό υπόβαθρο.

Εισαγωγή

Στα σχολικά μας Μαθηματικά, οι όροι "υποτείνουσα" και "ρίζα εξίσωσης" είναι συνηθισμένοι. Οι όροι αυτοί, όπως και οι άλλοι μαθηματικοί όροι, εισάγονται με ορισμούς, ίσως και κάποια παραδείγματα, αλλά συχνά χωρίς διευκρινίσεις. Εύλογα μπορεί να δημιουργηθεί η απορία σε έναν μαθητή ή μαθηματικό της εκπαίδευσης: τι σχέση έχει η μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου με το τέντωμα ή τι σχέση έχει η λύση μιας εξίσωσης με τη ρίζα ενός δένδρου ή ενός φυτού;

Στην καθημερινή εκπαιδευτική πρακτική υπάρχει συχνά μία de facto αποδοχή των μαθηματικών όρων, χωρίς ενδιαφέρον για το γλωσσικό τους υπόβαθρο, που μπορεί να εμποδίζει την μαθηματική κατανόηση και την ανάπτυξη της μαθηματικής μόρφωσης γενικότερα. Έχει διαπιστωθεί ότι δεν προάγεται η κριτική σκέψη και ότι πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να προωθήσουν μια επιτυχημένη μελέτη των Μαθηματικών, γιατί δεν καταλαβαίνουν τη σημασία των περισσότερων μαθηματικών όρων, οι οποίοι έχουν μια ιδιαιτερότητά και μια αποκλειστικότητα (Ασημάκης, 2015; Τρούλης, 1991). Αλλά και οι μαθηματικοί της εκπαίδευσης, αν και μπορεί να διαπιστώνουν γλωσσικά ελλείματα των μαθητών, δεν είναι προσανατολισμένοι, ούτε διαθέτουν εργαλεία και υποστήριξη για την αντιμετώπιση αυτών των γλωσσικών προβλημάτων στη διδακτική τους δραστηριότητα. Έχει επισημανθεί ότι η μάθηση και η κατανόηση του μαθηματικού λεξιλογίου από τους μαθητές δεν μπορεί να αγνοηθεί, γιατί παίζει σημαντικότατο ρόλο στην ανάπτυξη της σχολικής μαθηματικής τους σκέψης και δραστηριότητας και ότι η μαθηματική ορολογία απαρτίζεται από όρους που χαρακτηρίζουν μαθηματικές έννοιες, οι περισσότερες από τις οποίες δεν αναφέρονται σε αντικείμενα (Monroe & Orme,2002).

Για να φωτιστούν οι ιδιόρρυθμοι μαθηματικοί όροι, όπως η “υποτείνουσα” και η “ρίζα εξίσωσης” είναι αναγκαία μια διείσδυση στο ιστορικό τους παρασκήνιο. Μια τέτοια, όμως, προσέγγιση θα είναι αρκετά φτωχή αν είναι μόνο περιγραφική. Κι αυτό γιατί οι μαθηματικοί όροι νοηματοδοτούν αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες, οι οποίες δεν παραμένουν σταθερές και αμετάβλητες στην πορεία του χρόνου, αλλά αναδιοργανώνονται, δηλαδή τροποποιούνται οι σημασίες τους, μ’ αποτέλεσμα να προκαλούν αλλαγές στα σημαινόμενα των αντίστοιχων μαθηματικών όρων. Οι σημασιολογικές μεταβολές των μαθηματικών όρων συνυφαίνονται με τις εννοιολογικές αλλαγές των Μαθηματικών (Becker, 2005). Ωστόσο, το μαθηματικό λεξιλόγιο αναμορφώνεται, μεταξύ άλλων, και από ιστορικο-πολιτισμικούς παράγοντες. Για παράδειγμα, στην Ελληνική ιστορία τα τσακίσματα ή τζακίσματα, της πρώτης μεταβυζαντινής περιόδου, μετονομάστηκαν σε κλάσματα, από τα μέσα του $18^{ου}$ αιώνα.

-Το πρώτο ερώτημα που δημιουργείται είναι το εξής: ποιες είναι οι απαρχές και η ανάπτυξη μαθηματικών όρων σε σχέση με τις ιστορικο-επιστημολογικές και τις ιστορικο-πολιτισμικές αλλαγές των Μαθηματικών;

Μια επίσης σημαντική διάσταση της μαθηματικής ορολογίας είναι το γλωσσολογικό της υπόστρωμα. Η ετυμολογία, ως κλάδος της σημασιολογίας, εξετάζει τα ζητήματα της αρχικής ονοματοθεσίας των λέξεων και των μεταβολών τους, που έχουν υποστεί στο πέρασμα του χρόνου. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις ετυμολογικές μελέτες είναι τα ζητήματα της μετωνυμίας και της μεταφοράς στη σημασιολογική διαμόρφωση και αλλαγή των μαθηματικών όρων μέσω γλωσσικών δανείων. Για παράδειγμα, ο (γεωμετρικός) μηνίσκος (είναι γνωστοί οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη του Χίου, $5^{ος}$ αιώνας π.Χ.) είναι μεταφορά της λέξης μηνίσκος που σήμαινε το σχήμα της Σελήνης σε κάποιες φάσεις της. Ο όρος μηνίσκος ήταν υποκοριστικό του αρχαίου ονόματος μήνη ή μην, που σήμαινε Σελήνη στην πρώιμη αρχαιότητα και οι μήνες εξέφραζαν τα μέρη του σεληνιακού ημερολογίου (Κέντρο Λεξικολογίας, 2021).

-Το δεύτερο ερώτημα που ανακύπτει είναι το εξής: ποιες είναι οι ετυμολογικές όψεις, δηλαδή οι σημασιολογικές αφετηρίες, οι μετωνυμίες και οι μεταφορές, των μαθηματικών όρων;

Όλος αυτός ο προβληματισμός δεν αποσκοπεί απλά σε μια ακαδημαϊκή συζήτηση, αλλά στους παιδαγωγικά ευαίσθητους μαθηματικούς της εκπαίδευσης (Mulcrone, 1958; Riccomini, 2015).

Μια προσέγγιση στο ιστορικο-επιστημολογικό υπόβαθρο των μαθηματικών όρων

Το καλοκαίρι του 2025 ο γερμανικός εκδοτικός οίκος Springer Verlag προανήγγειλε την κυκλοφορία, από τις θυγατρικές του εκδόσεις Birkhäuser, ενός δίτομου Ιστορικού Λεξικού των Μαθηματικών Όρων, μέχρι τα τέλη του 2025. Διαφαίνεται ότι είναι ένα πολύ ενδιαφέρον έργο, που δυστυχώς δεν έχουμε πληροφορίες για το περιεχόμενό του. Έχουμε, όμως, κάποια στοιχεία των προδιαθέσεων του συγγραφέα του, Holger Becker, από τη διατριβή του, που είχε για θέμα του τις "Σημασιολογικές και λεξιλογικές πτυχές της μαθηματικής ορολογίας του 19ου αιώνα" (Becker, 2005). Όπως επισήμανε στην εισαγωγή του, ένας από τους κύριους προσανατολισμούς του ήταν (και μάλλον εξακολουθεί να είναι) "η αποτύπωση της σημασιολογικής αλλαγής σε μια επιστημονική γλώσσα, ειδικά όσον αφορά τις διάφορες μορφές της σημασιολογικής αλλαγής (όπως μεταφορές ή επεκτάσεις νοήματος) και τους παράγοντες που τις προκάλεσαν" (Becker, 2005). Και διευκρίνιζε ότι έδωσε έμφαση στη "μαθηματική ορολογία όπως αναπτύχθηκε τον 19ο και στις αρχές του 20ου αιώνα", θεωρώντας ότι "κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου σημαντικά νέα αντικείμενα εισήχθησαν στα Μαθηματικά, ιδιαίτερα οι 'δομές' " (Becker, 2005).

Διαφαίνεται λοιπόν ότι το νέο ιστορικό λεξικό των μαθηματικών όρων θα έχει έναν **ιστορικο-επιστημολογικό προσανατολισμό**, δηλαδή ότι θα είναι κάτι παραπάνω από μια περιγραφική ετυμολογική καταγραφή. Μ' αυτή την αφορμή, αναδεικνύεται το ζήτημα της **επιστημολογικής διάστασης** της **Ιστορίας των Μαθηματικών** και κατά συνέπεια της ιστορικής ανάπτυξης της μαθηματικής ορολογίας.

Μια όψη των Μαθηματικών από τη σκοπιά της **ιστορικής επιστημολογίας** επισημαίνεται ως εξής:

> Η ιστορική πορεία ανάπτυξης των Μαθηματικών έγκειται στη **μετάβαση** από **τη σκέψη σε αντικείμενα και τις ιδιότητες τους** [δηλ. από σκέψη προσανατολισμένη αποκλείστηκα σε συγκεκριμένα αντικείμενα ή σε εγγενείς ιδιότητες τους] **στη θεωρητική σκέψη**, που διαπλάθεται από σχέσεις αντικειμένων (Otte, 1990; Steinbring, 2005, σ. 19-20).

Αυτό σημαίνει ότι η μαθηματική γνώση αναπλάστηκε, στην πορεία της ιστορικής της ανάπτυξης, σε θεωρητική μαθηματική γνώση και ότι οι αντίστοιχες θεωρητικές έννοιες αναφέρονται σε σχέσεις και, κατά συνέπεια, δεν είναι εμπειρικές έννοιες. Σ' αυτή την ιστορική μετάβαση, ένας **θεωρητικός όρος** διαμορφώνει το γνωστικό του περιεχόμενο και τη σημασία του μόνο από τη σχέση του με τις άλλες έννοιες. Με άλλα λόγια, τα ζητήματα του νοήματος ενός θεωρητικού όρου προσδιορίζονται από τη θέση του στην ιστορική και τη γνωστική του συγκυρία (context) (Otte, 1990).

Οι επισημάνσεις αυτές έχουν ως βάση, κυρίως, τα μαθηματικά επιτεύγματα στα τέλη του 19^{ου} και στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Ωστόσο, είναι γνωστό ότι θεωρητικές έννοιες στα Μαθηματικά υπήρχαν από την Αρχαιότητα. Μάλιστα, θεωρείται πολύ σημαντικό το γεγονός της ανάπτυξης θεωρητικών εννοιών στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά. Ενδεικτικά να αναφερθούν δύο σχετικές ιστορικές παρατηρήσεις:

> "… η **θεωρητική γνώση** (στην περίπτωση των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών) εμφανίστηκε ως ένα σύνολο αποφάνσεων που στηρίζονται σε επιχειρήματα για θέματα που δεν μπορούν να παρατηρηθούν (ή να μετρηθούν)." (Panchenko, 2005)

> "… στους αρχαίους Ελληνικούς όρους (των Μαθηματικών) χρησιμοποιήθηκε (η λέξη) *άλογος* … ως **θεωρητικός όρος** κι όχι απλώς ως μια Αρχαία Ελληνική λέξη." (Plotnitsky, 2022)

Το ερώτημα που εγείρεται είναι: όταν στη μαθηματική σκέψη αναδύονται πρωτότυπες ιδέες και εμφανίζονται κάποια νέα στοιχεία που δεν είναι εμπειρικής φύσης, πως θα ονοματοθετηθούν; Ας δούμε τη συμπεριφορά του Ευκλείδη σε μια τέτοια περίπτωση. Συγκεκριμένα στο έργο τα *Φαινόμενα* υποστήριξε:

> "ἐὰν γὰρ κῶνος ἢ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ μὴ παρὰ τὴν βάσιν, ἡ τομὴ γίγνεται ὀξυγωνίου κώνου τομή, ἥτις ἐστὶν ὁμοία θυρεῷ." (Schironi, 2019)

Με απλά λόγια, η τομή κώνου μ' ένα επίπεδο μη παράλληλο προς τη βάση του είναι όμοια με **θυρεό** (δηλ. ένα είδος ασπίδας του 4^{ου} π.Χ. αιώνα, σε σχήμα πεπλατυσμένου κύκλου, που ο Απολλώνιος, αργότερα, το ονόμασε έλλειψη). Όπως καταλαβαίνουμε, το μυαλό του Ευκλείδη πήγε προς κάτι **ανάλογο** με το σχήμα που προσπαθούσε να αποδώσει, να εκφράσει, αξιοποιώντας την κοινή εμπειρία, δηλ. προς την ωοειδή ασπίδα. Μ' αυτό τον τρόπο έκανε μια **μεταφορά** του ονόματος θυρεός από στρατιωτική ορολογία στη γεωμετρία ορολογία.

Φαίνεται ότι ο Ευκλείδης στην προκειμένη περίπτωση οδηγήθηκε, για την εν λόγω ονοματοθεσία, με τη γνωστική λειτουργία της απλοϊκής οπτικοποίησης, δηλ. χρησιμοποιώντας ως μέσο την οπτική ομοιότητα. Κι αυτό ήταν ευνοϊκό για την προσοικείωση του θέματος από τους πρωτόπειρους, τους μη ειδικούς του σχετικού γνωστικού πεδίου. Αντίθετα ο Απολλώνιος εισήγαγε τον όρο έλλειψη χρησιμοποιώντας δεδομένα των γεωμετρικών συντεταγμένων, δηλ. συσχετίζοντας την τετμημένη και την τεταγμένη του εκάστοτε σημείου του σχήματος, που ήθελε να ονοματοθετήσει. Η προσέγγιση του ήταν έντεχνη, επιτηδευμένη και κατάλληλη για τους ειδήμονες, όχι για τους πρωτόπειρους. Στον καθημερινό άνθρωπο με το άκουσμα της λέξης έλλειψη, το μυαλό του πάει προς κάτι μειωμένο, ανεπαρκές και σε καμιά περίπτωση σ' ένα ειδικό γεωμετρικό σχήμα που μοιάζει με αυγό. Η ονοματοθεσία αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως ενδογενής γεωμετρικός προσδιορισμός, που δεν μπορεί να γίνει κατανοητός, χωρίς την προϋπόθεση κάποιου μαθηματικού συλλογισμού. Μήπως είχε δίκαιο ό Πάππος ο Αλεξανδρινός, μεταγενέστερος του Απολλώνιου, που τον θεωρούσε υπεροπτικό;

Είναι γεγονός ότι στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά χρησιμοποιήθηκαν οι λεκτικές μεταφορές για την ονοματοθεσία θεωρητικών όρων, είτε μέσω αναλογικών οπτικοποιήσεων, είτε μέσω αφηρημένων οπτικοποιήσεων, που συνδέουν τα σημαίνοντα των μαθηματικών όρων με αντίστοιχα σχήματα και με μαθηματικούς συλλογισμούς. Μερικά τέτοια παραδείγματα είναι: η κισσοειδής καμπύλη, η κογχοειδής καμπύλη, ο μηνίσκος, το ισοσκελές τρίγωνο, η άρβηλος.

Μέσα στην ίδια οπτική γωνία είναι κι ο όρος υποτείνουσα. Στο Ετυμολογικό Λεξικό των Αρχαίων Ελληνικών Όρων της Γεωμετρίας (Mugler, 1958), ο όρος υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου, αλλά είναι και η χορδή τόξου κύκλου ή καμπύλης.[16] Και σύμφωνα με το Ετυμολογικό Λεξικό της Ελληνικής Γλώσσας η λέξη υποτείνουσα είναι μετοχή του υποτείνω που σημαίνει τεντώνω από κάτω (Μπαμπινιώτη, 2010). Φαίνεται ότι ο όρος σχετίζεται με το τέντωμα της χορδής του κυνηγητικού ή πολεμικού τόξου, αν πάρουμε υπόψη μας τις μορφές των αρχαίων κυνηγητικών τόξων. Οπότε η λέξη υποτείνουσα μάλλον προέρχεται από το τέντωμα της χορδής κυνηγητικού τόξου, δηλαδή είναι μεταφορά, με φορέα την αναλογική οπτικοποίηση.

Αρχαία κυνηγητικά ή πολεμικά τόξα

Χορδή τόξου

Η πλευρά απέναντι από την ορθή γωνία

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην Αρχαία Ελληνική Γεωμετρία υπήρχαν και αρκετοί εμπειρικοί (περιγραφικοί) όροι, όπως π.χ. τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο, παραλληλόγραμμο, τετράεδρο, οκτάεδρο κ.ά.[17]

Η μαθηματική γνώση των Αρχαίων Ελλήνων εγκολπώθηκε, δημιουργικά, στην Αραβική παιδεία, που άνθισε μεταξύ 8ου και 12ου αιώνα μ.Χ. Λόγιοι της τότε Αραβικής επικράτειας μετάφρασαν, αποκατέστησαν, σχολίασαν και βελτίωσαν μαθηματικά έργα των Αρχαίων Ελλήνων, όπως του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου, του Πτολεμαίου κ.α. Ήταν ένθερμοι θαυμαστές της Αρχαίας Ελληνική Γεωμετρίας και ήθελαν να την επεκτείνουν και να την τελειοποιήσουν, όχι να την αλλάξουν (Hogendijk, 1996). Γι' αυτό το γεωμετρικό τους λεξιλόγιο διαμορφώθηκε, στην ουσία, αποδίδοντας τους Αρχαίους Ελληνικούς όρους στη γλώσσα τους. Ωστόσο, παράλληλα με τις μελέτες τους στην Αρχαία Ελληνική Γεωμετρία, ενδιαφέρθηκαν και για τα επιστημονικά έργα των Ινδών και μετάφρασαν, μελέτησαν και αξιοποίησαν κάποια απ΄ αυτά. Με την επίδραση των Ινδών, οι επιστήμονες της τότε Αραβικής επικράτειας συστηματοποίησαν την Πρακτική Αριθμητική, οργάνωσαν κι ανάπτυξαν την Άλγεβρα και την Τριγωνομετρία και βελτίωσαν τις υπολογιστικές τεχνικές στην Αστρονομία. Η ανανεωτική αυτή συμβολή τους προκάλεσε και έναν εμπλουτισμό της μαθηματικής ορολογίας, για παράδειγμα οι όροι αλ-ντζαμπρ και αλ-μουκαμπάλα, που είναι στον

[16] Ένα σχόλιο: στη σημερινή γεωμετρική μας παιδεία η υποτείνουσα είναι όρος αποκλειστικά για τη μεγάλη πλευρά του ορθογωνίου τρίγωνο. Είναι αξιοσημείωτο ότι στην Οδό Μαθηματικής του Μεθόδιου Ανθρακίτη και του Μπαλάνου Βασιλόπουλου [Β' τόμος, 1749, σελ. 393] εμφανίζεται η υποτείνουσα ως η ευθεία που ενώνει τα άκρα του τόξου (δηλ. ως χορδή). Φαίνεται ότι μετά το 1821, που η Γεωμετρία του Legendre είχε καθιερωθεί ως πρότυπο της Ελληνικής γεωμετρικής μόρφωσης, ο όρος υποτείνουσα περιορίστηκε μόνο στο ορθογώνιο τρίγωνο, όπως και στη Γεωμετρία του Legendre.

[17] Όταν η συστηματική μελέτη της ορολογίας των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών αναπτυχθεί, τότε θα φωτιστούν και πολλές ιδιαιτερότητες των ιδιόμορφων λέξεων που χρησιμοποιήθηκαν στα Μαθηματικά του Αρχαίου Ελληνικού πολιτισμού, όπως π.χ. οι όροι ιπποπέδη, νεύσις και ωκυτόκιο.

τίτλο του βιβλίου του σημαντικού μαθηματικού αλ- Χουαρίζμι (περ. 780-850 μ.Χ.): Κιτάπ αλ-ντζαμπρ αλ-μουκαμπάλα, (σε ελεύθερη μετάφραση, Βιβλίο για τον υπολογισμό με μεταφορά και απλοποίηση). Τόσο η λέξη αλ-ντζαμπρ, όσο κι λέξη αλ-μουκαμπάλα είναι νέοι μαθηματικοί όροι που εκφράζουν διαδικασίες επίλυσης εξισώσεων. Κι από την αρχή αυτού του βιβλίου τακτοποιούνται 6 περιπτώσεις εξισώσεων με όρους τετράγωνα ή “περιουσίες” (δηλ. ο άγνωστος στο τετράγωνο), ρίζες (δηλ. ο άγνωστος) και αριθμοί. Έτσι η πρώτη κατηγορία εξισώσεων που αναφέρει είναι η εξής: τετράγωνα (ή “περιουσίες”) ίσα με ρίζες (δηλαδή με σημερινή γραφή θα μπορούσε να αντιστοιχεί με την εξίσωση $αx^2=βx$).

Η λέξη “ρίζα”, που αναφέρθηκε, είναι η λατινική απόδοση της αραβικής λέξης “jadhr”, η οποία στα Αραβικά έχει διάφορες σημασίες, όπως “βάση” “θεμέλιο” “κατώτερο τμήμα”. Ο αλ- Χουαρίζμι χρησιμοποίησε τη λέξη αυτή με την έννοια “βάση τετραγώνου”, δηλ. με μια ανάλογη σημασία με την “πλευρά τετραγώνου”. Με την ίδια σημασία χρησιμοποιήθηκε αυτή η αραβική λέξη κι από τον μεταγενέστερο διακεκριμένο Άραβα μαθηματικό, Ομάρ Καγιάμ (1048-1131 μ.Χ.), για να εκφράσει τον “αριθμό βάσης” του “τετράγωνου αριθμού”. Όταν τα βιβλία του αλ-Χουαρίζμι μεταφράστηκαν στα λατινικά το 12^{ο} αιώνα, ο αραβικός όρος “jadhr” αποδόθηκε ως “ρίζα” και διαδόθηκε μέχρι τις μέρες μας, στην Άλγεβρα, ως ρίζα εξίσωσης (Rojas, 2025; English Language & Usage, 2020). Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι Κινέζοι και οι Ινδοί χρησιμοποιήσαν τον όρο “ρίζα” στα Μαθηματικά τους, πριν τον αλ-Χουαρίζμι, με την έννοια της αριθμητικής βάσης, της απαρχής των αριθμητικών ιδεών ή διαδικασιών, σε υπολογιστικές τους πρακτικές, όπως π.χ. της τετραγωνικής ρίζας.

Όταν τα Αραβικά μαθηματικά κείμενα και οι αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες και τεχνικές διείσδυσαν στην επιστημονική παιδεία της Δυτικής Ευρώπης και του Βυζαντίου, τον 12^{ο} και τον 13^{ο} αιώνα, υιοθετήθηκαν και καθιερώθηκαν αρκετοί μαθηματικοί τους όροι, όπως για παράδειγμα οι όροι: αλγόριθμος, Άλγεβρα, τζίφρα (δηλ. το μηδέν) και σίνους (δηλ. το ημίτονο).

Οι σημαντικοί λόγιοι της Δυτικής Ευρώπης, της περιόδου αυτής, που μετάφρασαν ένα μεγάλο μέρος των Αραβικών επιστημονικών κειμένων, όπως π.χ. ο Γεράρδος από την Κρεμόνα (περ. 1114 – 1187 μ.Χ.) κι ο Αδελάρδος από το Μπαθ (περ. 1080 – περ. 1150 μ.Χ.), απέδιδαν τους Αραβικούς όρους με τρεις τρόπους:

1) Κάποιοι τους μετάφραζαν με αντίστοιχους λατινικούς όρους που προϋπήρχαν στις Εγκυκλοπαίδειες και τις Ανθολογίες του Πρώιμου Μεσαίωνα, π.χ. τον Αραβικό όρο *al-muayyan* για τον ρόμβο τον μετάφρασαν ως rombus.
2) Άλλοι μετάφραζαν κυριολεκτικά τους Αραβικούς όρους, π.χ. τον όρο *al-munharifa* για το “κάθετο και κεκλιμένο προς τον μεσημβρινό” ηλιακό ρολόι (που κυριολεκτικά σημαίνει: αποκλίνον, κεκλιμένο) τον απέδωσαν ως *irregularis* (δηλαδή ως ακανόνιστο, παράτυπο).
3) Και κάποιοι άλλοι έκαναν ένα είδος μεταγραφής των Αραβικών γραμμάτων των Αραβικών όρων σε αντίστοιχους Λατινικούς χαρακτήρες π.χ. τον Αραβικό όρο *al-muayyan* για τον ρόμβο τον λατινοποίησαν ως *elmuain.* Μερικοί από τους μεταφραστές, που χρησιμοποιούσαν την λατινοποίηση των Αραβικών όρων, έδιναν συμπληρωματικά και κάποιες διευκρινίσεις (Folkerts, 2005).

Αυτή η συμπεριφορά των πρώτων μεταφραστών των Αραβικών Μαθηματικών στα Λατινικά εκφραζόταν κύρια στα γεωμετρικά θέματα, όπου υπήρχε μια παρακαταθήκη από την Αρχαία Ελληνική Γεωμετρία στα Ανθολόγια και τις Εγκυκλοπαίδειες του Πρώιμου Μεσαίωνα. Το μεταφραστικό τους, όμως, πρόβλημα ήταν πιο περίπλοκο και πιο δύσκολο στους νέους τομείς των Μαθηματικών που ανέπτυξαν οι Άραβες, δηλ. στην νέα αλγοριθμική Αριθμητική, στην Άλγεβρα, στην Πρακτική Γεωμετρία, στην Τριγωνομετρία και στη νέα υπολογιστική Αστρονομία.

Το μεταφραστικό κύμα του 12^{ου} και του 13^{ου} αιώνα δημιούργησε μια πολύ μεγάλη δεξαμενή νέας μαθηματικής γνώσης, Αραβικής προέλευσης. Η μαθηματική ορολογία διογκώθηκε υπέρμετρα, η οποία δεν ήταν μόνο πρωτάκουστη, αλλά και απροσάρμοστη, σε μεγάλο ποσοστό. Οι νέες έννοιες και τεχνικές, όπως το θεσιακό σύστημα αρίθμησης, οι αλγοριθμικοί αριθμητικοί υπολογισμοί και οι αλγεβρικές τεχνικές επίλυσης προβλημάτων, έπρεπε να αφομοιωθούν, να χρησιμοποιηθούν και να εναρμονιστούν μέσα στη νέα μαθηματική παιδεία της Δυτικής Ευρώπης, που τότε αναδύονταν.

Τον 12^{ο} αιώνα αναπτύχθηκε η πανεπιστημιακή εκπαίδευση στην Μπολόνια (που ήταν παλιότερη, από το 1150 περίπου), στο Παρίσι (περ. 1200), την Οξφόρδη (1220), το Μονπελλιέ (1220), την Πάδουα (1224) και σ’ άλλες πόλεις της Ιταλίας, της Γαλλίας, της Ισπανίας και της Αγγλίας. Την περίοδο αυτή, η διδασκαλία των Μαθηματικών στα πανεπιστήμια ήταν περιθωριακή και περιορίζονταν σε λίγη Γεωμετρία από τα Στοιχεία του Ευκλείδη, στην εκλαϊκευμένη Αστρονομία του μοναχού Ιωάννη Σακρομπόσκο (1195-1256 μ.Χ., περίπου) και στο Πασχάλιο (δηλ. τους υπολογισμούς για τον προσδιορισμό του Πάσχα). Η διδασκαλία τους δεν γινόταν από εξειδικευμένους καθηγητές (Schubring, 2021, σ. 95). Και σ’ αυτό το εκπαιδευτικό πλαίσιο καθιερώθηκε μια έντονα συντηρητική νοοτροπία η οποία δεν ευνοούσε καθόλου το ενδιαφέρον για βελτίωση της μαθηματικής γνώσης, της μαθηματικής ορολογίας και των μαθηματικών εφαρμογών.

Ένα άλλο εκπαιδευτικό ρεύμα, που αναπτύχθηκε, πρώτα και κύρια, στη Ιταλία, ήταν αυτό των αμπάκι. Πρόκειται για ένα νέο είδος παιδείας με τα σχολεία αμπάκι, τους δασκάλους αμπάκι και τα εγχειρίδια αμπάκι, τα οποία αναδύθηκαν μαζί με την αστικοποίηση μεγάλου μέρους της δημόσιας ζωής, την ανάπτυξη του εμπορίου και της βιοτεχνίας, και τη χρηματο-οικονομική δυναμική του ύστερου Μεσαίωνα. Ήταν ένα είδος ιδιωτικής εκπαίδευσης με κύριο άξονα μαθημάτων τη νέα Αριθμητική και των εφαρμογών της, όπου αξιοποιούνταν οι τεχνικές της Άλγεβρας και της Πρακτικής Γεωμετρίας. Ως πρώτο εγχειρίδιο αυτού του τύπου θεωρείται το *Λίμπερ Αμπάκι* του Λεονάρντο της Πίζα (γνωστός ως Φιμπονάτσι), που πρωτο-εμφανίστηκε το 1202. Η εκπαίδευση αυτή ήταν σε λαϊκή γλώσσα, αρκετά μαζική και ώθησε στην ομογενοποίηση της μαθηματικής ορολογίας, σε κάποια βήματα προς τη διαμόρφωση συμβολισμού, στη συστηματοποίηση της αριθμητικής πρακτικής και τη διεύρυνση των υπολογιστικών εφαρμογών της. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ουσιαστική τυποποίηση της μαθηματικής ορολογίας, μετά την εισαγωγή των νέων Αραβικών Μαθηματικών, προωθήθηκε από το κίνημα του ουμανισμού, παράλληλα με τη δημιουργία και τη ραγδαία ανάπτυξη της τυπογραφίας, από τον 15^{ο} αιώνα. Οι ουμανιστές διαπνέονταν από την ελληνορωμαϊκή μορφωτική και πολιτιστική κληρονομιά. Επιδίωκαν να βελτιώσουν και να ανανεώσουν τις πνευματικές και κοινωνικές αξίες, τα αισθητικά και πολιτιστικά ιδεώδη. Αυτός ο προσανατολισμός και οι επιδιώξεις τους δεν συμβιβαζόταν με τις ξενόφερτες γνωστικές και κοσμοθεωρητικές προσκολλήσεις. Έτσι ο αντιαραβισμός ήταν σύμφυτος με το πνεύμα του ουμανισμού της Αναγέννησης κι εκφραζόταν όχι με απόλυτη ομοφροσύνη, αλλά με κάποιες διαβαθμίσεις στις αντίστοιχες στάσεις και διαθέσεις των οπαδών και συνοδοιπόρων του.

Δύο σημαντικοί παράγοντες έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη του ουμανιστικού κινήματος: 1) η ευρεία διάδοση των Αρχαίων Ελληνικών χειρόγραφων, με την παράλληλη μετανάστευση αρκετών Βυζαντινών λογίων στη Δυτική Ευρώπη, μετά την πτώση της Κωνσταντινούπολης και 2) η ραγδαία εξέλιξη του έντυπου λόγου.

Οι ουμανιστές επεδίωξαν να καθαρίσουν ή έστω να προσομοιώσουν τις αραβικές επιρροές στην επιστημονική, φιλοσοφική και τη λογοτεχνική γλώσσα. Είναι πολύ χαρακτηριστικό το γεγονός ότι ο διαπρεπής μαθηματικός του 16^{ου} αιώνα Φραγκίσκος Βιετά (1540-1603)[18] θεωρούσε βάρβαρο τον όρο άλγεβρα και ονόμασε το αντίστοιχο έργο του *Αναλυτική Τέχνη*, προσαρμόζοντας τον με το πνεύμα του Αρχαίου Ελληνικού τρόπου σκέψης.

Για την έντονη αντιαραβική στάση του Βιετά είναι αρκετά ενδεικτικό ένα απόσπασμα από τον πρόλογο του περίφημου βιβλίου του *“In artem analyticem Isagoge”* (Εισαγωγή στην τέχνη της Ανάλυσης) (1591):

> “Η τέχνη που παρουσιάζω δεν είναι καινούργια αλλά στην πραγματικότητα τόσο παλιά, τόσο χαλασμένη και μολυσμένη από τους βαρβάρους, που θεωρώ απαραίτητο, για να εισαγάγω μια εντελώς νέα μορφή σε αυτήν, να σκεφτώ και να δημοσιεύσω ένα νέο λεξιλόγιο, έχοντας ξεφορτωθεί όλους τους ψευδο-τεχνικούς όρους της, για να μην διατηρήσει τη βρωμιά της και συνεχίσει να βρωμάει με τον παλιό τρόπο... Κι όμως, κάτω από την Άλγεβρα ή Αλουμκαμπάλα (sic) την οποία επαινούσαν και αποκαλούσαν «τη μεγάλη τέχνη», όλοι οι Μαθηματικοί αναγνώρισαν ότι κρυβόταν ασύγκριτος χρυσός.”
> (Le Noir, 1974)

Ένα ανάλογο ιστορικό επεισόδιο, της ίδιας περιόδου, ήταν η αντίδραση του Μπαρτολομέο Ζαμπέρτι (περ. 1473-μετά το 1543)[19] στον Καμπάνους της Νοβάρα (1220-1296), που μετάφρασε στα Λατινικά από τα Αραβικά και επιμελήθηκε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη,[20] γιατί χρησιμοποιούσε αραβικούς όρους (όπως π.χ. τον όρο *al-muayyan* για τον ρόμβο) (Axworthy, 2024, σ. 62).

Μια πιο μετριοπαθή στάση είχε ο Νικολό Ταρτάλια (1499-1557)[21], που μετάφρασε στα Ιταλικά και επιμελήθηκε τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, το 1543. Υποστήριξε ότι για την κατανόηση του Ευκλείδη από τους αρχάριους είναι προτιμότεροι οι πιο συνηθισμένοι όροι, γι’ αυτό ακολούθησε την εκδοχή των *Στοιχείων* του Κομπάνους και χρησιμοποιούσε αραβικούς όρους, ιταλοποιημένους (Axworthy, 2024, σ. 63).

[18] François Viète, σημαντικός Γάλλος ουμανιστής, μαθηματικός.

[19] Ιταλός ουμανιστής μεταφραστής Ελληνικών έργων και επιμελητής εκδόσεων στην Βενετία, μεταφραστής και επιμελητής της πρώτης τυπογραφικής έκδοσης των Στοιχείων του Ευκλείδη στα Λατινικά (από τα Ελληνικά), το 1482.

[20] Άρχισε να κυκλοφορεί γύρω στο 1260 ως χειρόγραφο κείμενο και ως έντυπη μορφή το 1485.

[21] Nicolo Tartaglia, σημαντικός Ιταλός μαθηματικός του 16^{ου} αιώνα.

Η αλήθεια είναι ότι, γενικά, υπήρχε, τότε, μια νοοτροπία αποαραβισμού της μαθηματικής ορολογίας και μια έμφαση στην Αρχαία Ελληνική καταγωγή της. Μια ένδειξη της στάσης αυτής είναι ότι το πρώτο Λεξικό Μαθηματικών Όρων που επιμελήθηκε ο Κορνάδος Δασυπόδιος (1531-1601)[22] και εκδόθηκε το 1573, περιλαμβάνει ένα Λατινικό κι ένα Ελληνικό ευρετήριο λέξεων και μια θεματική παρουσίαση των μαθηματικών ονομάτων κατά το πρότυπο του Λεξικού "Όροι των γεωμετρίας ονομάτων" του Ήρωνα του Αλεξανδρινού (1ος ή 2ος αιώνας μ.Χ.). Η ριζοσπαστική αυτή επιλογή να προβληθεί η μεγάλη σημασία των Αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών όρων στη Λατινική παιδεία του 16ου αιώνα, υποδεικνύει και την αντίθεση της, την παντελή απουσία αντίστοιχου Λατινο-Αραβικού Λεξικού (Korenjak, 2023).

Την περίοδο αυτή αναπτύχθηκαν νέοι κλάδοι των Μαθηματικών, όπως η Προοπτική, η Τριγωνομετρία, η Πρακτική Γεωμετρία, η Βλητική, η Ναυσιπλοΐα, η Χαρτογραφία, η Τοπογραφία, τα Εμπορικά και Λογιστικά Μαθηματικά. Επίσης εδραιώθηκαν κάποιες μαθηματικές έννοιες, π.χ. το μηδέν, ενώ κάποιες άλλες άρχισαν, τότε, να συζητιόνται, π.χ. οι αρνητικοί αριθμοί. Μέσα σ' αυτή τη συγκυρία, η μαθηματική ορολογία ήταν, γενικά, σε μια ρευστή κατάσταση. Όχι μόνο από τον εμπλουτισμό της με νέους όρους, αλλά και από την αλλαγή της σημασίας κάποιων από τους όρους που υπήρχαν.

Η πιο σημαντική αναθεώρηση της σημασίας μαθηματικού όρου ήταν αυτή του αριθμού. Πρόκειται, δηλαδή, για μια αξιοσημείωτη εννοιολογική αλλαγή. Δύο ιδιαίτερες παροτρύνσεις γι' αυτή την αλλαγή παρουσιάστηκαν την συγκεκριμένη περίοδο. Η πρώτη ήταν του Πέτρους Ράμους (1515-1572)[23] [που είχε ευρεία απήχηση την περίοδο εκείνη] ο οποίος υποστήριξε ότι ο αριθμός πρέπει να προηγείται των γεωμετρικών εννοιών κι ότι οι γεωμετρικές έννοιες, σ΄ αντίθεση με τον Ευκλείδη, πρέπει να συνδέονται με τους αριθμούς (Schubring, 2005, σ. 69; Otte, 1984). Προώθησε, δηλαδή, ένα είδος αριθμητικοποίησης της Γεωμετρίας. Η δεύτερη ήταν από τον Φραγκίσκο Βιετά, ο οποίος συνέβαλε αποφασιστικά στη θεωρητικοποίηση και συμβολικοποίηση της Άλγεβρας και μέσα στο πνεύμα της γενίκευσης της αλγεβρικής πρακτικής ώθησε και την ιδέα της γενίκευσης των αριθμητικών πράξεων στη Γεωμετρία, στα γεωμετρικά μεγέθη. Το σημαντικό βήμα του πολλαπλασιασμού μεγεθών πραγματοποιήθηκε από τον Καρτέσιο[24] στο κεφάλαιο για τη Γεωμετρία του φημισμένου βιβλίου του *Λόγος περί της Μεθόδου*, το 1637.

Με τη συμβολή αυτή, άρχισε να εδραιώνεται, στο πρώτο μισό του 17ου αιώνα, η αντιμετώπιση του λόγου δύο αριθμών ή μεγεθών ως γενικό κλάσμα (δηλ. κλάσμα με θετικούς ακέραιους ή άρρητους αριθμούς)[25], κι όχι ως σχέση αριθμών ή μεγεθών που όριζε ο Ευκλείδης (Bos, 2001).

[22] Konrad Dasypodius, Ελβετός μαθηματικός.

[23] Petrus Ramus, Γάλλος ουμανιστής και εκπαιδευτικός μεταρρυθμιστής, καθηγητής Ρητορικής και Φιλοσοφίας στα κολλέγια του Μανς και της Άβε Μαρία, που εξοντώθηκε τη νύχτα του Αγίου Βαρθολομαίου.

[24] René Descartes (1596-1650), σημαντικότατη προσωπικότητα του 17ου αιώνα.

[25] Αν και η άποψη αυτή υπήρχε από τον 16ο αιώνα, χωρίς ομοφωνία μέχρι και τα χρόνια του Νεύτωνα.

Τόσο ο Καρτέσιος όσο και ο Φερμά[26] συνέβαλαν σημαντικά στις εφαρμογές της Άλγεβρας στη Γεωμετρία κι άνοιξαν το δρόμο για την ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Έτσι νέα ορολογία προέκυψε από την μελέτη των καμπυλών, π.χ. τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας καμπύλης, από τη δημιουργία και χρησιμοποίηση νεών καμπυλών, π.χ. η κυκλοειδής καμπύλη και ο λημνίσκος του Μπερνούλι[27], όπως και κι από το νέο τρόπο πραγμάτευσης των καμπυλών, π.χ. η τετμημένη (abscissa) και η υποκάθετος.

Παράλληλα με τη σημαντική πρόοδο της αναλυτικής σκέψης, στο πρώτο μισό του 17^{ου} αιώνα μια νέα μαθηματική ιδέα, διαφορετικού είδους, προέκυψε κι αναπτύχθηκε: ο λογάριθμος. Ο Νάπιερ[28] ήταν ο πρωτοπόρος αυτής της μαθηματικής καινοτομίας, που εμφανίστηκε το 1614.[29] Όπως ήταν φυσικό μια συναφής ορολογία πρόβαλε, π.χ. λογαριθμικοί πίνακες, λογαριθμική καμπύλη και λογαριθμική έλικα (ή σπείρα). Ο όρος λογάριθμος ήταν ένας νεολογισμός που προέκυψε από τη σύνθεση των Ελληνικών λέξεων λόγος κι αριθμός (Θωμαΐδη, 1987, σ. 31).

Ο Νάπιερ για να διαμορφώσει την έννοια του λογαρίθμου χρησιμοποίησε την κίνηση, συσχετίζοντας μια ακολουθία σημείων αριθμητικής προόδου με μια ακολουθία σημείων γεωμετρικής προόδου και αξιοποιώντας τις έννοιες του λόγου και της αναλογίας του Ευκλείδη (Θωμαΐδης, 1987, σ. 29-32). Η χρήση αυτών των ευκλείδειων όρων για να εκφραστεί η κίνηση ήταν γνωστή ήδη τον 14^{ο} αιώνα, από τον Νικόλ Ορέμ (1320–1382)[30] στην Γαλλία και την ομάδα του Κολλεγίου Μέρτον στην Οξφόρδη[31]. Μια παρόμοια εννοιολογική συμπεριφορά είχε κι ο Γαλιλαίος[32], την ίδια περίοδο με τον Νάπιερ, στα ζητήματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης κινούμενων σωμάτων, ο οποίος παράλληλα με τη μαθηματική πραγμάτευση των θεμάτων της κίνησης χρησιμοποιούσε συστηματικά κι αντίστοιχα πειράματα. Και ήταν αυτός που συνέβαλε αποφασιστικά στην προώθηση του νέου επιστημονικού κλάδου, της Μαθηματικής Φυσικής. Ένας κλάδος που είχε ως κυρίαρχο θέμα την επιστημονική θεμελίωση της κίνησης και για την ανάπτυξη του προκλήθηκε η δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού.

Μια πληθώρα μαθηματικών όρων εμφανίστηκε τον 17^{ο} αιώνα στους διάφορους τομείς της Μαθηματικής Φυσικής και του Απειροστικού Λογισμού. Για παράδειγμα, κάποιοι όροι στη Μαθηματική Φυσική ήταν οι εξής: η αλυσοειδής καμπύλη

---

[26] Pierre de Fermat (1801-1665), Γάλλος νομικός, πολυμαθής και διακεκριμένος μαθηματικός του 17^{ου} αιώνα.

[27] Jakob Bernoulli (1655-1705), επιφανής Ελβετός μαθηματικός.

[28] John Napier (1550-1617), Σκωτσέζος ευγενής με μαθηματικά και αστρονομικά ενδιαφέροντα.

[29] Παρόμοιες ιδέες είχε κι ο Ελβετός Joost Bürgi (1552-1632), την ίδια χρονική περίοδο με τον Νάπιερ, αλλά καθυστέρησε να τις δημοσιεύσει.

[30] Nicola Oresme (1325-1382), Γάλλος φιλόσοφος του ύστερου Μεσαίωνα.

[31] Πρόκειται για την επιστημονική ομάδα του 14ου αιώνα που είχε ασχοληθεί με προβλήματα Μαθηματικών, Φιλοσοφίας και Λογικής κι αναφέρεται ως “Σχολή Μέρτον”.

[32] Galileo Galilei (1564-1642), σημαντικότατος Ιταλός επιστήμονας που είχε πρωταγωνιστικό ρόλο στη ριζοσπαστική αλλαγή της επιστήμης τον 17^{ο} αιώνα.

(Catenaria), η ισορροπία (Equilibrium), το μήκος κίνησης (Longitude), η ταλάντωση (Oscillation), η μεταβολή (Variation), οι ροπές (Moments), η ορμή (Momentum) (Harris, 1708). Και κάποιοι όροι στον Απειροστικό Λογισμό ήταν: η βραχυστόχρονη καμπύλη, η ισόχρονη καμπύλη, τα αδιαίρετα, τα απειροστά, η μεταβλητή, ο τετραγωνισμός, το ρέον, η ροή, το διαφορικό, το ολοκλήρωμα, η συνάρτηση.

Τα περισσότερα ονόματα των όρων αυτών έχουν περιγραφικό χαρακτήρα. Το ρέον και η ροή του Νεύτωνα είναι μεταφορές από την Υδροδυναμική. Και ο όρος τετραγωνισμός προέχεται από την Αρχαία Ελλάδα, που σήμαινε την κατασκευή ισοδύναμου τετράγωνου προς ένα καμπυλόγραμμο σχήμα για τον υπολογισμό του εμβαδού του, μετουσιώθηκε, την περίοδο της Αναγέννησης, στην εύρεση του εμβαδού κάτω από μία καμπύλη και έγινε συνώνυμο με τον υπολογισμό του "ορισμένου ολοκληρώματος", στα τέλη του 17^{ου} αιώνα.

Τον επόμενο αιώνα, ο Απειροστικός Λογισμός και η Θεωρητική Μηχανική αλγεβροποιήθηκαν στην κατεύθυνση του Λάιμπνιτς[33] και των Μπερνούλι[34]. Στη Γεωμετρία, το ενδιαφέρον προσανατολίστηκε, κύρια, στις αλγεβρικές μελέτες των καμπύλων (Gray, 1987) και στη συστηματική αξιοποίηση των απειροστικών μεθόδων (Struik, 1933). Στην Άλγεβρα, οι σκέψεις και οι διεισδύσεις επικεντρώνονταν πιο πολύ στις ιδιότητες των εξισώσεων και των λύσεων τους (Novy, 1973, σ. 15).

Επίσης, τον 18^{ο} αιώνα αναδύθηκαν νέοι κλάδοι των Μαθηματικών, όπως οι Άπειρες Σειρές, η Διαφορική Γεωμετρία, οι Διαφορικές Εξισώσεις, ο Λογισμός Μεταβολών, η Θεωρία Αριθμών και οι Πιθανότητες. Παράλληλα αναπτύχθηκαν τα Μαθηματικά σε διάφορους κλάδους των Θετικών Επιστημών, όπως στη Μετεωρολογία, την Τοπογραφία, τον Ηλεκτρισμό και τη Θεωρία της Παλλόμενης Χορδής. Αξιοσημείωτές ήταν οι διεισδύσεις, την περίοδο αυτή, των αρνητικών και των μιγαδικών αριθμών οι οποίοι χρησιμοποιούνταν χωρίς θεμελίωση. Υπήρξαν έντονες αντιθέσεις για τους αριθμούς αυτούς, όπως και για τα απειροστά.

Η μαθηματική ορολογία άρχισε να εκσυγχρονίζεται την περίοδο αυτή και σ' ένα μεγάλο μέρος της οφείλεται (Dunham, 1999) στον Όιλερ[35]. Ήταν στα μέσα του 18^{ου} αιώνα, που έγινε μια σημαντική αλλαγή στα Μαθηματικά, με πρωταγωνιστή τον Όιλερ. Η έμφαση, τότε, άρχισε να δίνεται στις τυπικές (τις φορμαλιστικές ή τυποκρατικές) μεθόδους στον Απειροστικό Λογισμό και στα Μαθηματικά γενικότερα, παραμερίζοντας τη γεωμετρική διαίσθηση και τις αντίστοιχες έννοιες. Αυτό σημαίνει ότι η μαθηματική πρακτική άρχισε τότε να στηρίζεται, πιο πολύ, στην Άλγεβρα και την Αριθμητική (Γιαννακούλιας, 2007). Έτσι προκλήθηκαν εννοιολογικές αλλαγές, δηλ. άλλαξε το περιεχόμενο κάποιων εννοιών, διατηρώντας τους ίδιους όρους ή δημιουργήθηκαν νέοι όροι. Για παράδειγμα, πολύ χαρακτηριστική ήταν η αλλαγή του περιεχομένου της συνάρτησης από τον Όιλερ, ο οποίος από μεταβλητή ποσότητα (σύμφωνα τον Λάιμπνιτς και τον Γιόχαν Μπερνούλι) την όρισε ως αναλυτική έκφραση, η οποία απαρτίζεται από οποιαδήποτε μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές. Και η διαφορά είναι ότι ο ορισμός του Λάιμπνιτς και του Γιόχαν Μπερνούλι είχε ως υπονοούμενο τις γεωμετρικές ποσότητες (π.χ. συντεταγμένες, εφαπτόμενες,

[33] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716),.διαπρεπής Γερμανός προτεστάντης διανοούμενος.
[34] Jacob Bernoulli (1655-1705) και Johann Bernoulli (1667-1748), σημαντικοί Ελβετοί μαθηματικοί.
[35] Leonard Euler (1707-1783), εξέχων Ελβετός μαθηματικός του 18^{ου} αιώνα.

ακτίνες καμπυλότητας), ενώ με τον ορισμό του Όιλερ έγινε μια απομάκρυνση της συνάρτησης από το γεωμετρικό παρασκήνιο της και υποδήλωνε, αμυδρά, σχέσεις μεταβλητών, με το χαρακτηρισμό "αναλυτική έκφραση" (Bos, 1974). Η στάση αυτή του Όιλερ δεν προέκυψε λόγω της ιδιορρυθμίας ή της παραξενιάς του, αλλά για να επεκτείνει την έννοια της συνάρτησης σε περιπτώσεις που θα περιλαμβάνουν περισσότερες μεταβλητές.

Εκτός της αλλαγής περιεχομένου των μαθηματικών όρων, την ίδια περίοδο δημιουργήθηκαν και νέοι μαθηματικοί όροι, όπως π.χ. η παράγωγος, το όριο, η σύγκλιση, η συνέχεια, οι νιοστές ρίζες της μονάδος, αναπτυσσόμενες επιφάνειες, ελάχιστη επιφάνεια. Διαφαίνεται ότι οι πιο πολλοί από αυτούς τους όρους είναι εσωστρεφείς, δηλαδή δεν σχετίζονται με ευρύτερα γνωστικά πλαίσια, εκτός από τα Μαθηματικά ή κάποιους εξειδικευμένους επιστημονικούς κλάδους.

Στα τέλη του 18ου αιώνα, μια σημαντική ώθηση για την παραπέρα καλλιέργεια της εσωστρέφειας στα Μαθηματικά επήλθε με τη Γαλλική Επανάσταση, η οποία πυροδότησε ριζοσπαστικές αλλαγές στη μαθηματική νοοτροπία. Τα Μαθηματικά είχαν μια καθοριστική θέση στα προγράμματα σπουδών της νέας επιστημονικής παιδείας, που θεσμοθετήθηκε για τη διαπαιδαγώγηση και την κατάρτιση των σύγχρονων δημοκρατικών πολιτών. Και όφειλαν να είναι καλά θεμελιωμένα, εκσυγχρονισμένα, εφαρμόσιμα (δηλαδή αξιοποιήσιμα στη σύγχρονη επαγγελματική και κοινωνική ζωή) και κατανοητά στους απλούς ανθρώπους. Στις προσδοκίες αυτές έγιναν αξιοσημείωτες καινοτομίες, όπως η εισαγωγή νέων μαθημάτων (π.χ. η Αναλυτική Γεωμετρία και η Παραστατική Γεωμετρία) και γράφτηκαν εξαιρετικά διδακτικά εγχειρίδια (π.χ. τα βιβλία του Λακρουά[36] και του Λεζάντρ[37]). Στο πλαίσιο αυτό ήταν έντονα τα διδακτικά προβλήματα των αρνητικών (Schubring, 2005, σ. 419) και των μιγαδικών αριθμών, όπως και των απειροστών, που απασχολούσαν τους μαθηματικούς όχι μόνο για επιστημονικούς λόγους αλλά και για τη βελτίωση της διδασκαλίας τους.

Είναι πολύ χαρακτηριστική η θεμελίωση των αρνητικών αριθμών, την τρίτη δεκαετία του 19ου αιώνα και μετά, ως επέκταση των θετικών αριθμών με τη διατήρηση των νόμων των αριθμητικών πράξεων (Schubring, 2005, σσ. 503-523), δηλαδή της επιμεριστικής, της προσεταιριστικής και της αντιμεταθετικής ιδιότητας. Αυτός ο έμμεσος τρόπος θεμελίωσης των αρνητικών αριθμών συνέβαλε στη θεωρητική (δηλαδή την μη εμπειρική) διάσταση της μαθηματικής γνώσης και κατά συνέπεια ήταν μια περαιτέρω εσωστρέφεια στα Μαθηματικά.

Παράλληλα υπήρχε και η εσωστρέφεια, που υποστηρίχθηκε, στο νέο μορφωτικό πλαίσιο της Γαλλίας στην αρχή του 19ου αιώνα, από τους Λαγκράνζ[38] και Λαπλάς[39], οι οποίοι ήταν επιφανείς μαθηματικοί και παράγοντες (μαζί με τον Μονζ[40]) της τότε

---

[36] Sylvestre François Lacroix (1765-1843), φημισμένος Γάλλος μαθηματικός και συγγραφέας πετυχημένων διδακτικών μαθηματικών βιβλίων.

[37] Adrien-Marie Legendre (1752-1833), διακεκριμένος Γάλλος μαθηματικός και συγγραφέας του πολύ διαδεδομένου διδακτικού εγχειριδίου (Συνθετικής) Γεωμετρίας.

[38] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), σημαντικός Ιταλός μαθηματικός που έζησε πολλά χρόνια στη Γαλλία και πολιτογραφήθηκε Γάλλος.

[39] Pierre-Simon Laplace (1749-1827), διαπρεπής Γάλλος μαθηματικός.

[40] Gaspard Monge (1746-1818), διακεκριμένος Γάλλος μαθηματικός.

Γαλλικής εκπαιδευτικής πολιτικής. Κι ο Λαγκράνζ κι ο Λαπλάς ήταν υπέρμαχοι της αλγεβροποίησης των Μαθηματικών και είχαν μια υποτίμηση στη γεωμετρική εποπτικότητα, σ' αντίθεση με τον Μονζ (Glas, 1986). Η επίδρασή τους ήταν καθοριστική και ιδιαίτερα ύστερα από την παλινόρθωση της μοναρχίας το 1815 και την εξορία του Μονζ.

Τη δεκαετία του 1840, μετά τη γνωστοποίηση της συμβολής του Γκαλουά[41] στο ζήτημα της επιλυσιμότητας των αλγεβρικών εξισώσεων, αναπτύχθηκε η δομική σκέψη η οποία ώθησε κι αυτή την εξάπλωση της εσωστρέφειας στα Μαθηματικά.

Από τα μέσα περίπου του 19^{ου} και στον 20^{ο} αιώνα η εσωστρέφεια στα Μαθηματικά αποκορυφώθηκε και συνυφάνθηκε με τα Καθαρά Μαθηματικά, που τότε αναδύθηκαν κι αποτέλεσαν τον κεντρικό άξονα των Μαθηματικών (Schubring, 1981).

Η ανάπτυξη των Μαθηματικών τον 19^{ο} αιώνα ήταν εκρηκτική. Τις πρώτες δεκαετίες τα Γαλλικά Μαθηματικά ήταν πρωτοπόρα και ώθησαν, εκτός από την ανάδειξη νέων κλάδων, τους εκσυγχρονισμένους επιστημολογικούς άξονες των Μαθηματικών, με κυριότερο τον άξονα της αυστηρής θεμελίωσης του Απειροστικού Λογισμού, όπου η συνάρτηση και το όριο αντικατέστησαν τη μεταβλητή και το απειροστό κι έτσι έγιναν τα πρώτα βήματα της μετάβασης του κλάδου προς τη Μαθηματική Ανάλυση. Την ίδια περίοδο η Γεωμετρία έκανε την υπέρβασή της από το στερεότυπο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι νέες ιδέες στη Γαλλική γεωμετρική σκέψη γονιμοποίησαν την Προβολική Γεωμετρία η οποία πρωτοεμφανίστηκε το 1822 με το "Εγχειρίδιο των Προβολικών Ιδιοτήτων των Σχημάτων" του Πονσελέ[42]. Και την μεγάλη αλλαγή στη γεωμετρική σκέψη επέφερε η Μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία του Λομπατσέφσκι[43], στα τέλη της δεκαετίας του 1820 και δημοσιεύτηκε πιο ολοκληρωμένα σε συνέχειες το 1836, 1837, 1838 με τον τίτλο "Νέα Στοιχεία της Γεωμετρίας με πλήρη θεωρία των παραλλήλων" (Λομπατσέφσκι, 2007).

Μια επίσης καινοτόμος εξέλιξη στο πρώτο μισό του 19^{ου} αιώνα ήταν η δημιουργία μιας νέας προσέγγισης της Άλγεβρας στην Αγγλία γύρω στο 1930, αυτή της Συμβολικής Άλγεβρας. Πρόκειται για μια πλήρως φορμαλιστική (τυποκρατική) Άλγεβρα, όπου χρησιμοποιούνταν τα σύμβολα ως αυθαίρετες σημειογραφικές μορφές (απεικονίσεις), οι οποίες διέπονται από συγκεκριμένους προκαθορισμένους κανόνες των σχέσεων τους. Η Άλγεβρα αυτή δεν έχει καμία οντολογική συσχέτιση και στηρίζονταν σε προκαθορισμένους κανόνες των συνδυασμών και των πράξεων των αυθαίρετων συμβόλων (Novy, 1973, σ.190-191; Pycior, 1981; Panteki, 1991). Αξίζει να επισημανθεί ότι η χρησιμοποίηση των πράξεων ως αφετηρία και βάση της Αριθμητικής και της Άλγεβρας πρόβαλε από τη δεκαετία του 1920, αλλά συσχετίζονταν με τα αριθμητικές πράξεις κι όχι με αυθαίρετούς συμβολικούς συνδυασμούς.

Στα μέσα του 19^{ου} αιώνα πρόβαλαν οι ιδέες της Γεωμετρίας Πολλών Διαστάσεων οι οποίες ήταν μέσα στο κλίμα της ιδεαλιστικής Γερμανικής Φιλοσοφίας (Chatelet, 1992; Torretti, 1978), των πρώτων δεκαετιών του 19^{ου} αιώνα, όπως και της μη εμπειρικής γεωμετρικής σκέψης, που ώθησε, λίγα χρόνια πριν, η Μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία του

[41] Évariste Galois (1811-1832), ιδιοφυής και ανήσυχος Γάλλος μαθηματικός.
[42] Jean Victor Poncelet (1788-1867), αξιόλογος Γάλλος μηχανικός και μαθηματικός.
[43] Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1782-1856), κορυφαίος Ρώσος μαθηματικός.

Λομπατσέφσκι (Richards, 1988; Kolmogorov & Yushkevich, 1996). Την ίδια περίοδο άρχισε να καλλιεργείται στην Άλγεβρα η ιδέα της ομάδας, η οποία στην αρχή αντιμετωπίζονταν, κύρια, σε σχέση με τις μεταθέσεις, δηλαδή στην αρχή είχε την ειδική μορφή της ομάδας μεταθέσεων. Γύρω στο 1872, η έννοια της ομάδας διαπλέχθηκε με τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και έτσι άρχισε να αποκτά μια πιο γενική σημασία. Στα τέλη του 19ου αιώνα διαμορφώθηκε η γενική σημασία της ομάδας κι άρχισε να είναι θεμελιώδης έννοια της Άλγεβρας και της Θεωρίας Αριθμών (Wussing, 2007). Αυτή η εξέλιξη αποτελεί μια σημαντική διάσταση στην ανάπτυξη του δομικού τρόπου σκέψης στα Μαθηματικά.

Ένας τρόπος σκέψης που αναπτύχθηκε από τη σημαντική συμβολή του Ντέντεκιντ[44], στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα. Μια από τις πρώτες του συνεισφορές ήταν η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών, το 1872, η οποία έπαιζε, τότε, καίριο ρόλο στην αριθμητικοποίηση της Μαθηματικής Ανάλυσης που ήταν σε πλήρη δυναμική ανάπτυξης την περίοδο εκείνη (Haffner, 2015). Ο τρόπος χειρισμού του ζητήματος αυτού ήταν με βάση το σύστημα των σχέσεων και με την ανάπτυξη μιας γενικής δομικής μεθοδολογίας (Ferreirσs & Reck, 2020). Στο πλαίσιο αυτό εισήγαγε νέες δομικές έννοιες, όπως το (αλγεβρικό) σώμα και το (αλγεβρικό) ιδεώδες.

Αξιοσημείωτη ήταν και η συμβολή του Ντέντεκιντ στη Θεωρία Συνόλων και μάλιστα θεωρείται συνιδρυτής μαζί με τον Κάντορ[45] αυτής της θεωρίας (Ferreiros, 2007). Η Θεωρία Συνόλων και ο δομικός τρόπος εννοιολογικής οργάνωσης και μεθοδολογίας αποτέλεσαν την πεμπτουσία των Καθαρών Μαθηματικών από τις αρχές του 20ου αιώνα. Με πρώτο πυλώνα ανάπτυξης και θεμελίωσης αυτής της σύγχρονης αντίληψης των Μαθηματικών τον Ντέντεκιντ, δεύτερο πυλώνα τον Χίλμπερτ[46] (την περίοδο της μετάβασης από το 19ο στον 20ο αιώνα) και τρίτο την ομάδα Μπουρμπακί[47] (από τη δεκαετία του 1930 και μετά). Αυτή η αντίληψη καθιερώθηκε διεθνώς στη πανεπιστημιακή μαθηματική παιδεία, από τα τέλη της δεκαετίας του 1960. Τότε πρόβαλε (και διατηρήθηκε μέχρι τη δεκαετία του 1980) η συνολο-δομική αντίληψη και στα σχολικά Μαθηματικά, με τη μεταρρύθμιση των Μοντέρνων Μαθηματικών (Βαϊνάς, 1997; Μπάλτζης, 2021).

Από τις τελευταίες δεκαετίες του 19ου αιώνα η διαχεόμενη εσωστρέφεια των Καθαρών Μαθηματικών δεν οριστικοποιήθηκε απλά, αλλά ισχυροποιήθηκε και άρχισε να επικρατεί ένα είδος αυτο-αναφοράς[48] (δηλαδή ένα χειρισμός και μια κατανόηση των Μαθηματικών μόνο από τα Μαθηματικά, χωρίς καμία μη-μαθηματική πρόσμιξη).

Όπως ήταν φυσικό, η μαθηματική ορολογία εκτινάχθηκε στα ύψη με πληθώρα νέων όρων, οι οποίοι είχαν μια γλωσσική ετερογένεια σε σχέση με το προηγούμενο λεξιλόγιο των Μαθηματικών. Ένα δείγμα μαθηματικών όρων αυτής της περιόδου είναι το εξής: τετραδικοί αριθμοί (ή τετραδόνια), αντιμεταθετική ιδιότητα,

[44] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), σημαντικός Γερμανός μαθηματικός.
[45] Georg Cantor (1845-1918), διάσημος Γερμανός μαθηματικός.
[46] David Hilbert (1862-1943), επιφανής Γερμανός μαθηματικός.
[47] Nicolas Bourbaki, διακεκριμένη ομάδα Γάλλων μαθηματικών που ιδρύθηκε το 1934-1935.
[48] Ένα βιβλίο που θίγει αυτή την ιδιαιτερότητα είναι το εξής: Hofstadter, D. R. (1979). *Gödel, Escher, Bach. An Eterna Goden Braid. A metaphorical fugue on minds and machines in the spirit of Lewis* Carroll. Penguin Edition.

προσεταιριστική ιδιότητα, επιμεριστική ιδιότητα, ουδέτερο στοιχείο, ομάδα, δακτύλιος, σώμα, ιδεώδη, κλάσεις ισοδυναμίας, ισομορφισμός, ομομορφισμός, σύνολο, ένωση συνόλων, τομή συνόλων, πίνακας, ορίζουσα, δυισμός, διάνυσμα, διανυσματικός χώρος, διανυσματικός λογισμός.

Κάποιους απ' αυτούς τους όρους είναι μεταφορές, π.χ. ο ισομορφισμός είναι μεταφορά από την Κρυσταλλογραφία, κάποιοι άλλοι γενικεύτηκαν, π.χ. η ομάδα ήταν αρχικά ομάδα μεταθέσεων στον Κωσύ[49] και τον Γκαλουά έγινε όρος αφηρημένης δομής στον Ντέντεκιντ, κάποιοι άλλοι άλλαξαν περιεχόμενο, π.χ. οι ιδεώδεις αριθμοί στον Κούμερ[50] μεταλλάχθηκαν σε ιδεώδη συνολοθεωρητικές δομές στον Ντέντεκιντ και κάποιοι άλλοι είναι δάνεια από αντίστοιχους όρους άλλων επιστημονικών κλάδων, π.χ. ο όρος σώμα, ο οποίος έκτος από την ανατομία ήταν όρος της Γεωμετρίας (στο Ευκλείδη υπάρχει ως στερεό σώμα) και χρησιμοποιήθηκε με τελείως διαφορετικό περιεχόμενο από τον Ντέντεκιντ, ως αφηρημένο σύστημα στοιχείων με κάποιες ιδιότητες (Becker, 2005).

Η νέα μαθηματική ορολογία, που δημιουργήθηκε τον 19^{ο} αιώνα και εμπλουτίστηκε τον 20^{ο} αιώνα, δεν ήταν μια απλή διεύρυνση της προηγούμενης ορολογίας, αλλά πρόβαλε στο πλαίσιο μιας ριζοσπαστικής γνωστικής αλλαγής των Μαθηματικών, αυτή της θεωρητικής (δηλαδή της μη εμπειρικής) μαθηματικής σκέψης. Και στη συγκεκριμένη συγκυρία, η νέα μαθηματική γλώσσα αναπτύχθηκε ως δομικό εκφραστικό μέσο με υπόβαθρο την συντακτική της λειτουργία κι όχι τη σημασιολογική της υφή. Όπως ήταν φυσικό και η νέα μαθηματική ορολογία ακολούθησε τον αντίστοιχο φορμαλιστικό (ή τυποκρατικό) γλωσσικό φορέα.

Μέχρι τη δεκαετία του 1980 ήταν κυρίαρχο αυτό το επιστημολογικό και γλωσσικό είδος της μαθηματικής σκέψης. Από το 1990 και μετά εισήλθαν ορμητικά οι Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές οι οποίοι συμπαρέσυραν και το δικό τους γνωστικό υπόβαθρο, που εν πολλοίς είναι η αλγοριθμική σκέψη, χωρίς να απεμπολείται το δομικό παρασκήνιο των Μαθηματικών.

Είναι αυτονόητο ότι αυτή η συμβολή δεν θα μπορούσε να είναι εξαντλητική. Πολλά ενδιαφέροντα ζητήματα θα άξιζαν περαιτέρω εξέτασης κι ανάλυσης. Ωστόσο, εξακολουθεί να υπάρχει η προσδοκία ότι αυτός ο "ανεμοστρόβιλος" μιας επιστημολογικής ιστορίας της μαθηματικής ορολογίας θα παρακινήσει κι άλλους μαθηματικούς, φιλόλογους, γλωσσολόγους ή ιστορικούς των Μαθηματικών σε σχετικές διεισδύσεις και κριτικές αναψηλαφήσεις. Θα χαρούμε ιδιαίτερα αν η δική μας προσπάθεια βοηθήσει ή ανοίξει το δρόμο σε αντίστοιχους προβληματισμούς, σε σχετικές παρεμβάσεις και σε ανάλογες μελέτες.

Βιβλιογραφία

Ασημάκης, Π. (2015). *Μαθηματική γλώσσα και φυσική γλώσσα στην τάξη των μαθηματικών*. Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

[49] Augustin Louis Cauchy (1879-1957), σημαντικός Γάλλος μαθηματικός.

[50] Ernst Eduard Kummer (1810-1893), Γερμανός μαθηματικός.

Axworthy, A. (2024). Renaissance approaches to the terminology of mathematics. *Le Français Préclassique*, *26*, 61-67.

Βαϊνάς, Κ. (1997). *Ανάλυση της διδακτικής των μαθηματικών στην Ελλάδα* (σσ. 73-108). Εκδόσεις Γρηγόρη.

Becker, H. (2005). *Semantische und lexikalische Aspekte der mathematischen. Fachsprache des 19. Jahrhunderts*. Dissertation, Universitat Oldenburg.

Bos, H.J.M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Archive for History of Exact Sciences*, *14*(1), 1-90, (ειδ. σσ. 9-10).

Bos, H. J. M. (2001). *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction* (σ. 136). Springer Verlag.

Chatelet, G. (1992). La Capture de l' Extension comme Dialectique Geometrique: Dimension et Puissance Selon l' Ausdehnung de Grassmann (1844). In L. Boi, et al (Eds.), *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics* (σσ. 222-244). Springer Verlag.

Γιαννακούλιας, Ε. (2007). *Απειροστικός Λογισμός. Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5ᵒ π.Χ. έως τον 19ᵒ αιώνα* (σ. 308). Εκδόσεις Συμμετρία.

Dunham, W. (1999). *Euler: The Master of Us All* (σ. 17). The Mathematical Association of America.

English Language & Usage (2020). https://english.stackexchange.com/questions/520491/where-does-the-mathematical-use-of-the-word-root-come-from (ανάρτηση: 2020, τελευταία προσπέλαση: 6/1/2026).

Ferreiros, J. (2007). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics* (σ. 94). Birkhäuser Verlag.

Ferreirοs, J. & Reck, E. H. (2020). Dedekind's Mathematical Structuralism: From Galois Theory to Numbers, Sets, and Functions. In E. H. Reck & G. Schiemer (Eds.), *The Prehistory of Mathematical Structuralism* (σσ. 59-87, ειδ. σσ. 64-65). Oxford University Press.

Folkerts M. (2005). Remarks on Mathematical Terminology in Medieval Latin: Greek and Arabic Influences. In: *Archivum Latinitatis Medii Aevi*, *63*, 149-160. La création verbale en latin médiéval / Word Creation in Medieval Latin. Actes du colloque international de Barcelone 31 mai-2 juin 2004. DOI: https://doi.org/10.3406/alma.2005.895

Glas, E. (1986). On the dynamics of mathematical change in the case of Monge and the French revolution. *Studies in History and Philosophy of Science*, *17*(3), 249-268, (ειδ. σσ. 266-267).

Gray, J. (1987). *Style and Formation in the Eighteenth Century* (σ. 12). The Open University Press.

Haffner, E. (2015). *The "Science of Numbers" in action in Richard Dedekind's works: between mathematical explorations and foundational investigations. History, Philosophy and Sociology of Sciences* (σσ. 383-387, 407-444). Ph.D. Université Paris Diderot.

Harris, J. (1708). *Lexicon technicum, or An universal English dictionary of arts and sciences: explaining not only the terms of art, but the arts themselves*. Printed for Dan. Brown et al.

Hogendijk, J.P. (1996). Transmission, Transformation, and Originality: The Relation of Arabic to Greek Geometry. Στο F.J. Ragep et al. (Eds.), *Tradition, Transmission, Transformation* (σσ. 31-64). Leiden: Brill Publications.

Θωμαΐδης, Γ. (1987). *Ανάδυση και Εξέλιξη των Λογαριθμικών Εννοιών*. Ζητήματα Ιστορίας των Μαθηματικών (τεύχος 4ο) του Ομίλου για την Ιστορία των Μαθηματικών.

Κέντρο Λεξικολογίας - γλώσσα, λέξεις, λεξικά (2021). https://www.facebook.com/photo.php?fbid=190209329944792&id=107333048232421&set=a.107493518216374 (ανάρτηση: 11/11/2021, τελευταία προσπέλαση: 6/1/2026).

Kolmogorov, A. N. & Yushkevich, A. P. (Eds.) (1996). *Mathematics of the 19th Century. Geometry, Analytic Function Theory* (σ. 88). Birkhäuser Verlag.

Korenjak, M. (2023). *Latin Scientific Literature, 1450–1850* (σ. 140). Oxford University Press.

Le Noir, T. W. (1974). *The Social and Intellectual Roots of Discovery in Seventeenth-century Mathematics*. Ph.D. Indiana University, (σ. 56).

Λομπατσέφσκι, Ν. (2007). *Διαλεκτά Έργα* (σ. 37). Εκδόσεις Ατέχνως.

Monroe, E. E., & Orme, M. P. (2002). Developing mathematical vocabulary. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, 46*(3), 139–142.

Μπάλτζης, Δ. (2021). *Οι παρεμβάσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας σε ζητήματα Μαθηματικής Εκπαίδευσης – Μια ιστορική ανάλυση* (σ. 46 κ.ε.). Διπλ. Εργασία στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.

Μπαμπινιώτη, Γ. (2010). *Ετυμολογικό Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας. Ιστορία των Λέξεων* (σ. 1565). Κέντρο Λεξικολογίας.

Mugler, C. (1958). *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs* (σσ. 442-443). Gauthier-Villars.

Mulcrone, T. F. (1958). Teaching the etymology of mathematical terms *The Mathematics Teacher*, 184-189.

Novy, L. (1973). *Origins of Modern Algebra* (σ. 15). Noordhoff International Publishing.

Otte, M. (1990). Arithmetic and geometry. Some remarks on the concept of complementarity, *Studies in Philosophy and Education, 10*, 37-62.

Panchenko, D. (2005). *Θαλής. Οι απαρχές της θεωρητικής συλλογικής και η γένεση της επιστήμης*, (μετ. Δ. Μεντζενιώτης) (σ. 171). Αθήνα: Εκδόσεις Ευρασία.

Panteki, M. (1991). Relationships between Algebra, Differential Equations and Logic in England, 1800-1860, Ph.D. Middlesex University (σ. 187).

Plotnitsky, A. (2022). *Logos and Alogon: Thinkable and the Unthinkable in Mathematics, from the Pythagoreans to the Moderns* (σ. viii). Springer Verlag.

Pycior, H. M. (1981). George Peacock and the British origins of symbolical algebra. *Historia Mathematica*, *8*, 23-45, (ειδ. σ. 25).

Riccomini, P. J. et al. (2015). The Language of Mathematics: The Importance of Teaching and Learning Mathematical Vocabulary. *Reading & Writing Quarterly*, *31*, 235–252.

Richards, J. L. (1988). *Mathematical Visions. The Pursuit of Geometry in Victorian England* (pp. 3-74). Academic Press.

Rojas, R. (2025). *The Language of Mathematics. The Stories behind the Symbols* (σσ. 20-21). Princeton University Press.

Schironi, F. (2019). Naming the Phenomena-Technical Lexicon in Descriptive and Deductive Sciences. Στο A. Willi, (Ed.) *Formes et fonctions des langues littéraires en Grèce ancienne*.

Vandoeuvres (σσ. 227–278, ειδ. σ. 253). Fondation Hardt Pour L' Étude De L' Antiquité Classique.

Schubring, G. (1981). The Conception of Pure Mathematics as an Instrument in the Professionalization of Mathematics. In H. Mehrtens, H. Bos, & I. Schneider (Eds.), *Social history of nineteenth century mathematics* (σσ. 111-134). Birkhäuser.

Schubring, K. (2005). *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany* (σ. 69). Springer Verlag.

Schubring, G. (2021). *Geschichte der Mathematik in ihren Kontexten: Neue Zugänge* (σ. 95). Birkhäuser.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective* (σσ. 19-20). Springer Verlag.

Struik, D. (1933). Outline of a History of Differential Geometry: I. *Isis, 19*(1), 92-120, (ειδ. σσ. 99-109).

Torretti, R. (1978). *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincare* (pp. 107-109). D. Reidel Publication Company.

Τρούλης, Γ. (1991). Πόσο Ξέρουν οι Μαθητές της Έκτης Δημοτικού τη Γλώσσα των Μαθηματικών, *Ευκλείδης Γ', 29*, 67-91.

Wussing, H. (2007). *The Genesis of the Abstract Group Concept. A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Dover Publications.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΤΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ

Άννα Αναστασιάδη-Συμεωνίδη, Ομότιμη Καθηγήτρια, Τμήμα Φιλολογίας, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Η Άννα Αναστασιάδη-Συμεωνίδη είναι ομότιμη καθηγήτρια Γλωσσολογίας του Τμήματος Φιλολογίας του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Δημοσίευσε μόνη ή σε συνεργασία 10 βιβλία, πάνω από 200 άρθρα σε ελληνικά και διεθνή περιοδικά, πρακτικά συνεδρίων και συλλογικούς τόμους και είχε την επιμέλεια 4 συλλογικών τόμων. Από το 1991 έως το 2012 συντόνισε πρόγραμμα ανταλλαγών ERASMUS με 7 ευρωπαϊκά πανεπιστήμια. Δίδαξε ως επισκέπτρια καθηγήτρια στα Πανεπιστήμια Sorbonne-Paris IV, INALCO στο Παρίσι και στο Παν/μιο Κύπρου. Ειδικεύεται στη μελέτη του λεξιλογίου (νεολογία, δανεισμός, κατασκευή λέξεων, φρασεολογισμοί, ορολογία) καθώς και στη σύνταξη έντυπων και ηλεκτρονικών λεξικών.

Ελευθερία Ζάγκα, Δρ. Φιλολογίας, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Φιλολόγων Ανατολικής Θεσσαλονίκης

Η Ελευθερία Ζάγκα είναι απόφοιτη του τμήματος Φιλολογίας του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης (Α.Π.Θ.), έχει μεταπτυχιακό και διδακτορικό από το ίδιο Πανεπιστήμιο στη διδασκαλίας της ελληνικής ως δεύτερης γλώσσας και μεταπτυχιακό δίπλωμα από το Τμήμα Δημοσιογραφίας και Μέσων Μαζικής Επικοινωνίας του Α.Π.Θ., στο πεδίο της ανάλυσης λόγου και εικόνας. Έχει κάνει εισηγήσεις στα μεταπτυχιακά προγράμματα Φιλολογίας και Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ. και του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Θεσσαλίας. Είναι εξωτερική συνεργάτιδα του Κέντρου Ελληνικής Γλώσσας και διδάσκουσα στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα του Ε.Α.Π «Σύγχρονες τάσεις της γλωσσολογίας για εκπαιδευτικούς». Έχει πάρει μέρος ως εισηγήτρια σε πολλά ελληνικά και διεθνή συνέδρια και έχει εκδώσει δύο βιβλία για την ελληνική γλώσσα: για την ανάπτυξη ακαδημαϊκών δεξιοτήτων στη μητρική και τη δεύτερη γλώσσα, καθώς και για την αξιολόγηση του προφορικού λόγου. Τα ερευνητικά της ενδιαφέροντα εστιάζονται στη διδασκαλία της Νέας Ελληνικής ως μητρικής και ως δεύτερης γλώσσας, στη διεπίδραση επιστημονικού και γλωσσικού γραμματισμού και στην κριτική ανάλυση λόγου και εικόνας.

Γιάννης Θωμαΐδης, Δρ. Μαθηματικών, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ο εισηγητής είναι πτυχιούχος και διδάκτορας του τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ. και έχει εργαστεί 40 χρόνια στη φροντιστηριακή και τη δημόσια εκπαίδευση. Την περίοδο 2000-2001 διετέλεσε διευθυντής στο νεοϊδρυθέν Πειραματικό Σχολείο του Πανεπιστημίου Μακεδονίας και την περίοδο 2007-2018 σχολικός σύμβουλος στη Θεσσαλονίκη και το Κιλκίς.
Έχει διδάξει προπτυχιακά Μαθηματικά στο Τμήμα Εκπαιδευτικής & Κοινωνικής Πολιτικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας και στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ. Την περίοδο 2011-2017 δίδαξε το μεταπτυχιακό μάθημα *Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών* στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, ενώ το ίδιο μάθημα διδάσκει από το 2015 στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Δυτικής Μακεδονίας.
Ασχολείται ερευνητικά με τη Διδακτική και την Ιστορία των Μαθηματικών, έχει δημοσιεύσει σχετικές εργασίες σε ελληνικά και ξένα περιοδικά και είναι συγγραφέας 10 βιβλίων. Μεταξύ αυτών η *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄& Β΄ Λυκείου* που έλαβε το 1ο βραβείο σε διαγωνισμό του Υπουργείου Παιδείας (1999) και το βιβλίο *Εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου – Μια μελέτη για την ιστορία της Άλγεβρας* (2011). Το τελευταίο βραβεύτηκε το 2012 από την Ακαδημία Αθηνών.

Κατερίνα Καλφοπούλου, Μαθηματικός M.Ed., Συγγραφέας, Ομάδα Θαλής+Φίλοι

Η Κατερίνα Καλφοπούλου φοίτησε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων και έκανε Μεταπτυχιακές Σπουδές στην Εκπαίδευση, εστιάζοντας στην Κοινωνιογλωσσολογία, στην εκπαιδευτική έρευνα στην πράξη (action research) και στη διδακτική των Φυσικών Επιστημών. Από το 2006 συντονίζει στη Θεσσαλονίκη τις δράσεις της Ομάδα ΘΑΛΗΣ+ΦΙΛΟΙ και λέσχες ανάγνωσης μαθηματικής λογοτεχνίας, σε σχολεία και σε άλλους φορείς. Στα ερευνητικά της ενδιαφέροντα περιλαμβάνονται: Η μελέτη των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μετάβασή τους από το Γυμνάσιο στο Λύκειο και ειδικά στην εκμάθηση της Άλγεβρας. Τρόποι και μέθοδοι αξιοποίησης της Δημιουργικής Γραφής στη διδασκαλία των Μαθηματικών και των Θ.Ε. Από τις εκδόσεις Τραυλός κυκλοφορούν τα βιβλία της «Ο Γιάννης που αγάπησα. Ιστορίες ανατροπής στην τάξη των μαθηματικών» (2017) και «Σε φάση μετάβασης. Ιστορίας (συν)εργασίας στην τάξη των γυμνασιακών μαθηματικών» (2018). Με κείμενα της συμμετέχει στους συλλογικούς τόμους «Οι εκπαιδευτικοί γράφουν...», τόμος Α, (2020) και τόμος Β, (2021), που κυκλοφορούν από τις εκδόσεις ΓΡΑΦΗΜΑ.

Νίκος Καστάνης, Δρ. Μαθηματικών, πρ. μέλος ΔΕΠ, Τμήμα Μαθηματικών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ο Νίκος Καστάνης είναι διδάκτορας των Μαθηματικών, πρώην μέλος του Επιστημονικού και Διδακτικού Προσωπικού του Τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ. Δίδαξε για αρκετά χρόνια τα μαθήματα: Ιστορία της Μαθηματικής Παιδείας και Διδακτική των Μαθηματικών στο Τμήμα Μαθηματικών του ΑΠΘ. Τα ενδιαφέροντά του είναι στα ιστορικο-επιστημολογικά ζητήματα των Μαθηματικών και στην ιστορία της Ελληνικής Μαθηματικής Παιδείας. Έχει δημοσιεύσει σχετικές εργασίες σε ελληνικά και διεθνή περιοδικά, όπως και σε συλλογικούς τόμους. Μια πρόσφατη δημοσίευσή του είναι: The Overshadowing of Euclid's Geometry by Legendre's Géométrie in the Modern Greek Education, στο συλλογικό τόμο "Exploring Mathematical Analysis, Approximation Theory, and Optimization. 270 Years Since A.-M. Legendre's Birth (Springer Verlag, 2024)". Είναι συγγραφέας των βιβλίων "Όψεις της νεοελληνικής μαθηματικής παιδείας", "Η 70χρονη πορεία του Τμήματος Μαθηματικών του ΑΠΘ", και συν-συγγραφέας, μεταξύ άλλων, των συλλογικών τόμων "Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση", "Ιστορία και Φιλοσοφία των Επιστημών στον ελληνικό χώρο, 17ος-19ος αιώνας (Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών)", "Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά: Κείμενα Ιστορίας και Φιλοσοφίας".

Ανδρέας Λύκος, Μαθηματικός M.Sc. Στατιστικής, Συγγραφέας, 3ο Πειραματικό ΓΕ.Λ. Κομοτηνής

Ο Ανδρέας Λύκος γεννήθηκε στην Κομοτηνή το 1975. Σπούδασε Μαθηματικά στο Α.Π.Θ. και πραγματοποίησε μεταπτυχιακές σπουδές στη Στατιστική στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών και στο Katholieke Universiteit di Leuven του Βελγίου. Από το 2004 εργάζεται στη δημόσια δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Κάθε χρόνο συντονίζει στο σχολείο του ομίλους καινοτομίας, πολιτιστικά προγράμματα και λέσχες ανάγνωσης. Διδακτικές προσεγγίσεις του, που αναδεικνύουν τη συνάφεια των μαθηματικών με τις εικαστικές τέχνες και την αφήγηση, έχουν παρουσιαστεί σε συνέδρια και δημοσιευτεί σε συλλογικούς τόμους. Είναι συγγραφέας των βιβλίων *Αναμνήσεις Συμμετρίας* (εκδόσεις Γαβριηλίδης), *Το πιστόλι του Νεύτωνα* (εκδόσεις Τραυλός), *Ιστορίες στο π και φ* (εκδόσεις 24 γράμματα) και *Ματωμένο χειρόγραφο* (εκδόσεις Τραυλός). Είναι μέλος της ομάδας Θαλής + Φίλοι και της Ελληνικής Λέσχης Συγγραφέων Αστυνομικής Λογοτεχνίας (ΕΛΣΑΛ). Κείμενα και διηγήματά του έχουν δημοσιευτεί σε συλλογικούς τόμους, στον τύπο και στο διαδίκτυο.

Σωτήρης Μαρκάδας, Δρ. Παιδαγωγικής, Διευθυντής Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Κιλκίς

Κάτοχος διδακτορικού διπλώματος ''Παιδαγωγικής'' του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας, διπλώματος μεταπτυχιακών σπουδών στη ''Σχολική παιδαγωγική & Διδακτική μεθοδολογία'' της Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας, πτυχίου Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, πτυχίου του Τμήματος Θεολογίας της Θεολογικής Σχολής Θεσσαλονίκης, διπλώματος μετεκπαίδευσης στην ''Ειδική Αγωγή'' από το Διδασκαλείο του Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ. και μεταπτυχιακού πιστοποιητικού στη ''Διοίκηση Σχολικών Μονάδων'' από τη Σχολή Ανθρωπιστικών Σπουδών του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου. Εργάστηκε ως δάσκαλος σε Δημοτικά σχολεία του νομού Κυκλάδων, Σερρών και Θεσσαλονίκης και δίδαξε ως ειδικός επιστήμονας στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Φλώρινας και στο Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών Φλώρινας. Διετέλεσε Διευθυντής σε σχολεία Ειδικής Αγωγής και Σύμβουλος Εκπαίδευσης στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση. Σήμερα υπηρετεί ως Διευθυντής Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης Κιλκίς.

Τεύκρος Μιχαηλίδης, Δρ. Μαθηματικών, Συγγραφέας, Ομάδα Θαλής+Φίλοι

Ο Τεύκρος Μιχαηλίδης είναι Κύπριος μαθηματικός και συγγραφέας που δραστηριοποιείται στο χώρο της «μαθηματικής μυθοπλασίας». Έχει εκδώσει οκτώ μυθιστορήματα, μια συλλογή αστυνομικών διηγημάτων και τρία βιβλία επιστημονικής εκλαΐκευσης. Ακόμα έχει συμμετάσχει με διηγήματά του σε πολλούς συλλογικούς τόμους. Έργα του έχουν μεταφραστεί σε οκτώ ξένες γλώσσες. Έχει βραβευτεί με το κρατικό βραβείο μυθιστορήματος της Κυπριακής Δημοκρατίας και με τον τίτλο «Chevalier dans l' ordre des palmes académiques» από την Γαλλική Δημοκρατία. Το πρόσφατο ιστορικό – αστυνομικό του μυθιστόρημα, *Ένα πτώμα στην Αυλή της Αμαλίας* κυκλοφορεί από τις εκδόσεις Ψυχογιός. Ακόμη έχει μεταφράσει στα Ελληνικά 51 βιβλία. Είναι ιδρυτικό μέλος της ΕΛΣΑΛ και της ομάδας Θαλής+Φίλοι.

Μαρία Μητσιάκη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Τμήμα Ελληνικής Φιλολογίας, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης, Μέλος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η Μαρία Μητσιάκη είναι Αναπληρώτρια Καθηγήτρια στο Τμήμα Ελληνικής Φιλολογίας του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης με γνωστικό αντικείμενο «Διδασκαλία της ελληνικής ως δεύτερης γλώσσας». Σπούδασε ελληνική γλώσσα και φιλολογία στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης (Α.Π.Θ.) και έλαβε διδακτορικό δίπλωμα στην εφαρμοσμένη γλωσσολογία (στην ελληνική ως μητρική αλλά και ως δεύτερη/ξένη γλώσσα, Α.Π.Θ.). Τα ερευνητικά της ενδιαφέροντα εστιάζονται στη διδασκαλία της Ν.Ε. ως δεύτερης και ως πρώτης γλώσσας, τη συνδυαστική προσέγγιση γλώσσας και περιεχομένου (ακαδημαϊκοί γραμματισμοί), την παιδαγωγική λεξικογραφία, την ανάπτυξη αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών και τη γλωσσική αξιολόγηση. Έχει διατελέσει διευθύντρια του Δ.Π.Μ.Σ. «Εξειδίκευση στις Τ.Π.Ε και Ειδική Αγωγή-Ψυχοπαιδαγωγική της Ένταξης». Από τον Αύγουστο του 2023 διατελεί μέλος του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.). Από το στο 2024 συμμετέχει ως τακτικό μέλος στη Διοικούσα Επιτροπή Δημόσιων Ωνάσειων Σχολείων και Γενικό Συμβούλιο Βιβλιοθηκών Ελλάδος, ενώ ως αναπληρωματικό μέλος στην Διοικούσα Επιτροπή Πρότυπων και Πειραματικών Σχολείων. Υπήρξε Επιστημονική Υπεύθυνη σε εθνικά και ευρωπαϊκά προγράμματα (ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ., Erasmus+ KA2) και συμμετέχει σε άλλα ερευνητικά έργα (συμμαχία EMERGE). Είναι συν-συγγραφέας στο βιβλίο 100 Βασικές Έννοιες για τη Γλωσσολογία και έχει συνεπιμεληθεί δύο συλλογικούς τόμους. Συνέγραψε το ενιαίο σχολικό Α.Π.Σ. για την Ελληνική ως Δεύτερη Γλώσσα στην Κύπρο (2020), που συντονίστηκε από το Π.Ι. Κύπρου, είναι συν-συγγραφέας του Α.Π.Σ. της Ελληνικής ως Γλώσσας Πολιτισμικής Κληρονομιάς στην Αμερική (2022), συμμετείχε στην εκπόνηση του Α.Π.Σ. της Νεοελληνικής Γλώσσας για το Γυμνάσιο (2011), είναι συγγραφέας τριών λεξικών και ακαδημαϊκή υπεύθυνη και συν-συγγραφέας των σχολικών βιβλίων «Ελληνικά στο Σχολείο: Επίπεδο Α2» και «Πάμε Ελληνικά» για την ελληνική ως δεύτερη γλώσσα Κύπρο.

Παιδαράκη Κυριακίτσα, MSc Φιλόλογος, 1ο ΓΕ.Λ. Κομοτηνής

Η Κυριακίτσα Παιδαράκη σπούδασε στο τμήμα Ιστορίας και Αρχαιολογίας στο Α.Π.Θ. με ειδίκευση στον τομέα της Ιστορίας και πραγματοποίησε μεταπτυχιακές σπουδές στις επιστήμες της αγωγής με θέμα: «Θεωρία, Πρακτική και Αξιολόγηση της Διδασκαλίας» στο Πανεπιστήμιο της Λευκωσίας στην Κύπρο. Αυτή τη στιγμή τελειώνει το δεύτερο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών στο τμήμα Φιλοσοφίας και Παιδαγωγικής του ΑΠΘ με θέμα: «Διεπιστημονική Ανθρωπολογία» και με τίτλο διπλωματικής εργασίας: «Η μελοποίηση της ποίησης και η Συμπαντική Αρμονία στη σκέψη του Μίκη Θεοδωράκη». Από το 2002 εργάζεται στη δημόσια δευτεροβάθμια εκπαίδευση και ειδικότερα στο 3ο ΓΕΛ Κομοτηνής που τα τελευταία χρόνια λειτουργεί ως Πειραματικό ΓΕ.Λ. Κάθε χρόνο συντονίζει στο σχολείο της ομίλους καινοτομίας (δημοσιογραφίας, ρητορικής τέχνης και wellness), καθώς και πολιτιστικά και περιβαλλοντικά προγράμματα. Αγαπά ιδιαίτερα τις διεπιστημονικές – διαθεματικές συνδιδασκαλίες με τους συναδέλφους της, τα βιωματικά εργαστήρια, όπως αυτό της διαχείρισης συναισθημάτων που παρουσίασε πρόσφατα στο συνέδριο του ΙΕΠ για την πρόληψη των περιστατικών ενδοσχολικής βίας, αλλά και τα αγωνίσματα λόγου, ιδιαίτερα αυτά του Debate και της εκφραστικής ανάγνωσης.

Ιωάννης Παπαδόπουλος, Καθηγητής Διδακτικής Μαθηματικών, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ο Ιωάννης Παπαδόπουλος είναι καθηγητής της Διδακτικής Μαθηματικών στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Α.Π.Θ. Προηγήθηκε πολύχρονη διδακτική εμπειρία του στη σχολική τάξη της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης, που εξακολουθεί να απασχολεί μεγάλο μέρος της ερευνητικής του δραστηριότητας. Τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα εστιάζουν κυρίως σε τρεις περιοχές: (i) στην μαθηματική επίλυση και δημιουργία προβλήματος, (ii) στη διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η χρήση ψηφιακών μέσων διευκολύνει τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών, και (iii) σε όψεις της διαδικασίας μάθησης των Μαθηματικών εστιάζοντας σε δυσκολίες και εννοιολογήσεις των μαθητών. Συμμετείχε για πολλά χρόνια σε προγράμματα σχετικά με τη χρήση ψηφιακών μέσων τόσο στη διδασκαλία των Μαθηματικών όσο και στην ανάπτυξη δημιουργικής μαθηματικής σκέψης στους μαθητές. Υπήρξε κεντρικός ομιλητής σε διεθνή συνέδρια, καλεσμένος ομιλητής στο ICME15 και chair του γκρουπ Arithmetic, Numbers and Operations στις εργασίες του CERME14. Οι εργασίες του είναι δημοσιευμένες σε έγκριτα διεθνή περιοδικά του κλάδου όπως επίσης και σε πρακτικά εθνικών και διεθνών συνεδρίων της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Νίκος Τερψιάδης, Μαθηματικός M.Ed., Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Ο Νίκος Τερψιάδης σπούδασε Μαθηματικά στο ΑΠΘ και έκανε Μεταπτυχιακές Σπουδές στην Εκπαίδευση στο ΕΑΠ. Διδάσκει στο Πειραματικό Λύκειο του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, έχει διατελέσει μέλος του Επιστημονικού Εποπτικού Συμβουλίου του Σχολείου, όπου υλοποιεί και τον Όμιλο Μαθηματικών. Οι μαθηματικές-εικαστικές δημιουργίες των μαθητών του Ομίλου και σχετικά εκπαιδευτικά προγράμματα έχουν παρουσιαστεί σε πολλές εκθέσεις, με πιο σημαντικές την Έκθεση “Μαθηματικά στο Μουσείο” στο MOMus-Μουσείο Μοντέρνας Τέχνης στην Θεσσαλονίκη και την Έκθεση “Do it Like Escher” στο Μουσείο Ηρακλειδών στην Αθήνα. Έλαβε το 1ο και το 2ο Βραβείο στους Διαγωνισμούς Ανοιχτών Εκπαιδευτικών Πρακτικών και έχει αναπτύξει ψηφιακό εκπαιδευτικό υλικό που έχει αξιολογηθεί ως βέλτιστο και είναι αναρτημένο στο Φωτόδεντρο. Είναι μέλος της ομάδας των εκπαιδευτικών της μαθητικής επιχείρησης Isometricks που σχεδιάζει και παράγει το βραβευμένο μαθηματικό παιχνίδι Wizzle, το οποίο κατέκτησε το 1ο

Πανελλήνιο, 1ο Πανευρωπαϊκό και 1ο Παγκόσμιο Βραβείο στον Διαγωνισμό των μαθητικών εικονικών επιχειρήσεων του Junior Achievement, το 1ο Πανελλήνιο και το 2ο Παγκόσμιο Βραβείο στον Διαγωνισμό Κοινωνικής Καινοτομίας Social Innovation Relay. Ήταν επιμορφωτής στο 2ο ΠΕΚ Θεσσαλονίκης και στα νέα Προγράμματα Σπουδών. Στα ενδιαφέροντά του περιλαμβάνονται η Ιστορία και η Διδακτική των Μαθηματικών, οι σχέσεις των Μαθηματικών με την Γλώσσα, την Μουσική και τις Εικαστικές Τέχνες, ο σχεδιασμός εκπαιδευτικών παιχνιδιών και εκπαιδευτικών προγραμμάτων και η αξιοποίηση των Νέων Τεχνολογιών στην Εκπαίδευση.

Κοσμάς Τουλούμης, Δρ. Αρχαιολογίας, Σύμβουλος Εκπαίδευσης Φιλολόγων Κιλκίς

Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ 02 στη ΔΔΕ Κιλκίς. Διδάκτορας του Τμήματος Ιστορίας και Αρχαιολογίας της Φιλοσοφικής Σχολής του Α.Π.Θ. και κάτοχος Μεταπτυχιακού Τίτλου Σπουδών στις «Επιστήμες της Εκπαίδευσης και της Δια Βίου Μάθησης», του τμήματος Εκπαιδευτικής και Κοινωνικής Πολιτικής της Σχολής Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Μακεδονίας. Από το 2001 μέχρι το 2023 υπηρέτησε ως φιλόλογος στο Πειραματικό Γυμνάσιο του Πανεπιστημίου Μακεδονίας. Πιστοποιημένος, Επιμορφωτής Β΄ επιπέδου στη «Χρήση και Αξιοποίηση των Τεχνολογιών Πληροφορίας και Επικοινωνιών στην Εκπαιδευτική Διδακτική Διαδικασία», καθώς και στο «Μείζον Πρόγραμμα Επιμόρφωσης Εκπαιδευτικών» του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου της Ελλάδος. Εκπονητής επιμορφωτικού υλικού και επιμορφωτής Α΄ (επιμορφωτής επιμορφωτών), στο Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, για τα νέα Προγράμματα Σπουδών για το μαθημα διδασκαλία της Ιστορίας Γυμνασίου. Συμμετείχε ως εξειδικευμένο, εξωτερικό, επιστημονικό προσωπικό με ανάθεση έργου σε 5 ερευνητικά έργα του Κέντρου Ελληνικής Γλώσσας. Συνέγραψε 5 βιβλία με επιστημονικό (π,χ. μονογραφία «Προϊστορική Αρχαιολογία» εκδόσεις University Studio Press) και εκπαιδευτικό περιεχόμενο, (π.χ. μονογραφία «Διδάσκοντας για το Παρελθόν», Εκδόσεις Ζήτη, συν-συγγραφέας στο «Γλώσσα, Ιστορία και Ευκλείδεια Γεωμετρία», εκδόσεις Πανεπιστημίου Μακεδονίας), άρθρα σε ελληνικούς και διεθνείς τόμους, και πάνω από 30 άρθρα σε ελληνικά και διεθνή περιοδικά και πρακτικά συνεδρίων με κριτές για ζητήματα επιστημονικού και παιδαγωγικού ενδιαφέροντος.

Πολυξένη Τσίτσα, Μαθηματικός, 9ο Γυμνάσιο Αχαρνών, Συντονίστρια Λέσχης Ανάγνωσης "Μαθηματικά & Λογοτεχνία"

Η Πολυξένη Τσίτσα έχει πτυχίο από το Μαθηματικό τμήμα του ΕΚΠΑ και μεταπτυχιακό τίτλο στις Σπουδές στην Εκπαίδευση από τη Σχολή Ανθρωπιστικών Σπουδών του ΕΑΠ (με εστίαση στην εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση, την Εκπαιδευτική

Έρευνα και τη Διαπολιτισμική Εκπαίδευση). Το 2003 διορίστηκε μέσω ΑΣΕΠ στη δημόσια εκπαίδευση. Από το 2009 διδάσκει στο 9ο Γυμνάσιο Αχαρνών και συντονίζει τη Λέσχη Ανάγνωσης «Μαθηματικά & Λογοτεχνία». Είναι μέλος (Α αξιολογήτρια) επιτροπής αξιολόγησης των νέων διδακτικών πακέτων του Γυμνασίου. Συμμετέχει σε προγράμματα εκπαίδευσης και επαγγελματικής εξέλιξης του Τομέα Διδακτικής του Μαθηματικού Τμήματος ΕΚΠΑ για τη Διαμορφωτική Αξιολόγηση - FORMAS, τη Διαφοροποιημένη Διδασκαλία - EDUCATE, την Ενδυνάμωση κοριτσιών στα STEM - GEM, τη Μελέτη Μαθήματος - LESSAM κ.ά. Έχει επιμορφωθεί μεταξύ άλλων στις Μαθησιακές Δυσκολίες και τη Δυσαριθμησία και στην αξιοποίηση Νέων Τεχνολογιών - ψηφιακών εφαρμογών - Τεχνητής Νοημοσύνης στην εκπαιδευτική διαδικασία. Υπήρξε μέντορας και διοργανώτρια ψηφιακού δωματίου απόδρασης στο Θερινό Σχολείο GEM του Μαθηματικού Τμήματος ΕΚΠΑ. Έχει εισηγήσεις σε διεθνή συνέδρια (Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση, Promoting Formative Assessment, LESSAM-Μελέτη Μαθήματος) και εκπαιδευτικές ημερίδες.

Ασημάκης Φλιάτουρας, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Ελληνικής Φιλολογίας, Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Ο Ασημάκης Φλιάτουρας είναι Αναπληρωτής Καθηγητής Ιστορικής Γλωσσολογίας στο Τμήμα Ανθρωπιστικών Σπουδών του Δ.Π.Θ. Έχει εκπονήσει διδακτορική διατριβή στο Τμήμα Φιλολογίας του Πανεπιστημίου Πατρών με θέμα «Μορφολογική ανάλυση των εδαφωνυμίων του νομού Αχαΐας». Έχει δημοσιεύσει περισσότερες από 80 εργασίες σε διεθνή και ελληνικά περιοδικά, συλλογικούς τόμους και πρακτικά συνεδρίων. Έχει συγγράψει ή επιμεληθεί 10 βιβλία (εγχειρίδια, μονογραφίες, συλλογικούς τόμους, πρακτικά συνεδρίων) μεταξύ των οποίων το βιβλίο «Γλωσσική αλλαγή» (σε συνεργασία με την Ε. Καραντζόλα) και τη μονογραφία «Η μορφολογική αλλαγή στην ελληνική γλώσσα» και έχει επιμεληθεί τον συλλογικό τόμο «Το λόγιο επίπεδο στη σύγχρονη νέα ελληνική» (σε συνεργασία με την Α. Αναστασιάδη-Συμεωνίδη). Ερευνά και διδάσκει ζητήματα διαχρονικής γλωσσολογίας και σχέσεις συγχρονίας και διαχρονίας με έμφαση στην ελληνική γλώσσα, μεταξύ των οποίων η διαχρονική μορφολογία, η ετυμολογία, η σχέση της ελληνικής με άλλες γλώσσες, η ονοματολογία και η ορολογία.

ΠΡΑΚΤΙΚΑ
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ
ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΗΣ
ΗΜΕΡΙΔΑΣ

ISBN: 978-618-87464-1-1

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ