



ΑΡΧΗ 1ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 04 ΜΑΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ-

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Τι ονομάζεται σύνθεση της f με την g .

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x' της γραφικής παράστασης της f .

β. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε ισχύει $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

γ. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε το σύνολο τιμών της

ΤΕΛΟΣ 1ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ



ΑΡΧΗ 2ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

Γ' ΤΑΞΗ

στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$
και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

ε. Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta, & x \leq 0 \\ e^{ax} + \beta x, & x > 0 \end{cases}$ με

$a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) - f''(x) = 3x^2 - 8x + 2$ για κάθε $x < 0$

B1. Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

B2. Αν $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 1, & x \leq 0 \\ e^x - x, & x > 0 \end{cases}$, τότε:

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

ii. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln f(x)}{f(x) - 1}$.

Μονάδες 6

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f την ευθεία $y = x$ και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ για την οποία ισχύει

$$\left| xyf(x) - xyf(y) - \ln \frac{x^y}{y^x} \right| \leq xy(x-y)^2, \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty).$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x + x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ και να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

**ΑΡΧΗ 3ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ****Γ' ΤΑΞΗ****Μονάδες 5**

Γ3.i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 3

ii. Υλικό σημείο κινείται πάνω στην εφαπτομένη κινούμενο από το σημείο $O(0,0)$ έως το σημείο $A(5,5)$ με ταχύτητα 5m/sec . Να βρείτε τον ρυθμό ανύψωσης (δηλαδή την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από τον οριζόντιο άξονα) του υλικού σημείου.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι $(e^3 - e^2)f(x) < x(f(e^3) - f(e^2)) + e^3f(e^2) - e^2f(e^3)$, για κάθε $x \in [e^2, e^3]$.

Μονάδες 4**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 f''(x) = 6f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 0$, $f''(0) = 6$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, $x \neq 0$, ισχύει $g'(x) = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 4

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , f^{-1} , τον κατακόρυφο άξονα και την ευθεία $x = a > 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Υλικό σημείο κινείται πάνω στον οριζόντιο άξονα ξεκινώντας από το σημείο $A(a,0)$ και καταλήγει στο σημείο $B(\beta,0)$ έχοντας διανύσει απόσταση 100cm σε χρόνο $2,5\text{sec}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi,0)$ στο οποίο η ταχύτητα του υλικού σημείου ήταν 40cm/sec .

Μονάδες 6**ΤΕΛΟΣ 3ης ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ**