ΘΕΜΑ Α

Α1

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0. Τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Για $x \neq x_0$ έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το x τείνει στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Α3

α) Ο ισχυρισμός είναι **Ψευδής**.
β) Το θεώρημα μονοτονίας προϋποθέτει ότι το πεδίο ορισμού είναι *διάστημα*. **Αντιπαράδειγμα:** Έστω η συνάρτηση $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in A$.
Ωστόσο, η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο A, διότι για $-1 < 1$ έχουμε $f(-1) = 1$ και $f(1) = -1$, δηλαδή $f(-1) > f(1)$.

Α4

- **α) ΣΩΣΤΟ.** Αιτιολόγηση: Ισχύει $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} (-|f(x)|) = 0$, από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.
- **β) ΛΑΘΟΣ.** Αιτιολόγηση: Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ στο $\mathbb{R}^*$ είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη σε όλο το $\mathbb{R}^*$.
- **γ) ΛΑΘΟΣ.** Αιτιολόγηση: Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, αλλά ισχύει $f'(0) = 0$. Το Θεώρημα Φερματ δεν ισχύει αντίστροφα.
- **δ) ΣΩΣΤΟ.** Αιτιολόγηση: Γεωμετρική ιδιότητα των κυρτών συναρτήσεων.
- **ε) ΛΑΘΟΣ.** Αιτιολόγηση: Αν $f(x) = x$ στο $[-1, 1]$, τότε $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$, αλλά η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση για κάθε $x \in [-1, 1]$.

ΘΕΜΑ Β

Β1

Έχουμε $f(x) = x^2 + 1$ με $A_f = [0, 1]$ και $g(x) = \sqrt{x}$ με $A_g = [0, +\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι:

$$A_{g \circ f} = \{x \in A_f \mid f(x) \in A_g\} = \{x \in [0, 1] \mid x^2 + 1 \geq 0\} = \{x \in [0, 1] \mid x \in \mathbb{R}\} = [0, 1].$$

Ο τύπος της είναι: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Β2

Η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in [0, 1]$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ (ως σύνθεση της πολυωνυμικής $x^2 + 1$ με την $\sqrt{x}$ που είναι παραγωγίσιμες) με $h'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
Αφού $h'(x) > 0$ για $x \in (0, 1)$, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.
Επειδή η h είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το $h([0, 1]) = [h(0), h(1)] = [1, \sqrt{2}]$.

x	0 $\qquad\qquad$ 1
$h'(x)$	0 $\quad$ $+$
$h(x)$	$1 \nearrow \sqrt{2}$

Για την εξίσωση $(h(x) - \cos x)(h(x) - e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow h(x) - \cos x = 0$ ή $h(x) - e^x + 1 = 0$:

- Για την $h(x) - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \cos x$.
  Αφού $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ (για κάθε $x \in [0, 1]$) και $\cos x \leq 1$, η εξίσωση αληθεύει μόνο όταν και τα δύο μέλη ισούνται με 1, δηλαδή όταν $x = 0$.

- Για την $h(x) - e^x + 1 = 0$.
  Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 1} - e^x + 1$ στο $[0, 1]$.

  – Η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
  – Ισχύει $\varphi(0) = 1 - 1 + 1 = 1 > 0$ και $\varphi(1) = \sqrt{2} - e + 1 < 0$ (αφού $\sqrt{2} \approx 1.41$ και $e \approx 2.71$).

  Άρα, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος *Bolzano*, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $\varphi(x_0) = 0$. Επίσης $\varphi'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - e^x$.
  Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ και $e^x \geq 1$, άρα $\varphi'(x) < 0$. Συνεπώς η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Τελικά, η αρχική εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x = 0$ και $x = x_0$.

B3

Η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι συνάρτηση 1-1, οπότε αντιστρέφεται.
Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης h^{-1} είναι το σύνολο τιμών της h, δηλαδή το $A_{h^{-1}} = [1, \sqrt{2}]$.

Θέτουμε $y = h(x) \iff y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2 = y^2 - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y^2-1}$ (αφού $x \in [0,1]$, άρα $x \geq 0$).
Άρα $h^{-1}(x) = \sqrt{x^2-1}$, για κάθε $x \in [1, \sqrt{2}]$.

B4

Ζητείται να δειχθεί ότι $I_1 + I_2 = \sqrt{2}$, όπου $I_1 = \int_0^1 h(x)\,dx$ και $I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} h^{-1}(x)\,dx$.
Στο ολοκλήρωμα I_2, θέτουμε $x = h(t)$, οπότε $dx = h'(t)\,dt$. Για $x = 1 \Rightarrow h(t) = 1 \Rightarrow t = 0$ και για $x = \sqrt{2} \Rightarrow h(t) = \sqrt{2} \Rightarrow t = 1$. Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$I_2 = \int_0^1 t \cdot h'(t)\,dt = \Big[t \cdot h(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot h(t)\,dt = 1 \cdot h(1) - 0 \cdot h(0) - I_1 = \sqrt{2} - I_1$$

Άρα $I_1 + I_2 = \sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

α) $g(x) = \ln(e^{2x}+e^x) - x = \ln(e^x(e^x+1)) - \ln e^x = \ln(e^x) + \ln(e^x+1) - x = x + \ln(e^x+1) - x = \ln(e^x+1)$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $e^x > 0 \Rightarrow e^x + 1 > 1$.
Επειδή η λογαριθμική συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, έπεται $\ln(e^x+1) > \ln 1 \Rightarrow g(x) > 0$.
Άρα η γραφική παράσταση της g βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

Γ2

α) Έχουμε $x^2 g^2(x) = 0$. Επειδή $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει υποχρεωτικά ότι $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.
Άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.

β) Από τη σχέση $f^2(x) = x^2 g^2(x)$ λαμβάνουμε $|f(x)| = |x| \cdot g(x)$ (αφού $g(x) > 0$).
Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (από υπόθεση) και μηδενίζεται μόνο στο $x = 0$.

Επομένως, ως συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ και $\Delta_2 = (0, +\infty)$, **διατηρεί σταθερό πρόσημο** σε καθένα από αυτά (Συνέπεια Θεωρήματος *Bolzano*).

Διακρίνουμε τις εξής δυνατές περιπτώσεις συνδυασμών προσήμων:

- 1) $f(x) < 0$ στο Δ_1 και $f(x) > 0$ στο $\Delta_2 \implies f(x) = xg(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 2) $f(x) > 0$ στο Δ_1 και $f(x) < 0$ στο $\Delta_2 \implies f(x) = -xg(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 3) $f(x) > 0$ στο Δ_1 και $f(x) > 0$ στο $\Delta_2 \implies f(x) = |x|g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 4) $f(x) < 0$ στο Δ_1 και $f(x) < 0$ στο $\Delta_2 \implies f(x) = -|x|g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3

Δίνεται ότι $f(1)=\ln(e+1)$.
Επειδή $1\cdot g(1)=1\cdot\ln(e^1+1)=\ln(e+1)>0$, προκύπτει ότι $f(1)>0$. Άρα, επειδή το $1\in(0,+\infty)$, η f είναι θετική στο $(0,+\infty)$, οπότε $f(x)=xg(x)$ για $x>0$.

Επίσης $f(-1)=-\ln\left(\dfrac{e+1}{e}\right)=\ln\left(\dfrac{e}{e+1}\right)=\ln e-\ln(e+1)=1-\ln(e+1)$.
Όμως $-g(-1)=-\ln(e^{-1}+1)=-\ln\left(\dfrac{1+e}{e}\right)=-\ln(e+1)+\ln e=1-\ln(e+1)$.
Άρα $f(-1)=-g(-1)=(-1)\cdot g(-1)<0$. Επειδή το $-1\in(-\infty,0)$, η f είναι αρνητική στο $(-\infty,0)$, οπότε $f(x)=xg(x)$ για $x<0$.

Τελικά, ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=x\ln(e^x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ασύμπτωτες:

- Κατακόρυφες Ασύμπτωτες:
  Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f(x)=x\ln(e^x+1)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων) άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

- Οριζόντιες / Πλάγιες Ασύμπτωτες στο $-\infty$:
  Αναζητούμε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\ln(e^x+1)$. Πρόκειται για απροσδιοριστία μορφής $(-\infty)\cdot 0$. Μετασχηματίζουμε σε πηλίκο για να εφαρμόσουμε τον Κανόνα $DeL'Hospital$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{1/x}\underset{D.L.H}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{e^x}{e^x+1}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x+1}\cdot(-x^2e^x)\right)$$

  Υπολογίζουμε ξεχωριστά το όριο της βοηθητικής συνάρτησης $-x^2e^x$:

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2e^x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{e^{-x}}\underset{D.L.H}{\overset{-\infty/+\infty}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-e^{-x}}\underset{D.L.H}{\overset{+\infty/+\infty}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{e^{-x}}=0$$

  Επιστρέφοντας στο αρχικό όριο, έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{0+1}\cdot 0=0$$

  Άρα η ευθεία $y=0$ (ο άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

- Οριζόντιες / Πλάγιες Ασύμπτωτες στο $+\infty$:
  Αναζητούμε ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$.
  Υπολογίζουμε πρώτα το όριο για το λ:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^x+1)$$

  Αν θέσουμε $u=e^x+1$, όταν $x\to+\infty$, τότε $u\to+\infty$. Άρα $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.
  Επειδή $\lambda=+\infty\notin\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Γ4

Έστω ένα τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ με $x \in (-1, 1)$. Η ζητούμενη συνθήκη γράφεται:

$$f'(x) + \frac{f(x)}{x+1} + \frac{f(x)}{x-1} = 0 \iff (x^2-1)f'(x) + 2xf(x) = 0$$

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $K(x) = (x^2-1)f(x)$ ορισμένη στο $[-1, 1]$.
Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος *Rolle*:

- Η K είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων (της πολυωνυμικής (x^2-1) και της f).
- Η K είναι παραγωγίσιμη στα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $K'(x) = (x^2-1)f'(x) + 2xf(x)$.
- Στα άκρα ισχύει: $K(-1) = 0$, $K(0) = -f(0) = 0$ και $K(1) = 0$.

Επομένως, ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Ρολλε στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$. Άρα, υπάρχουν τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (-1, 0)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $K'(\xi_1) = 0$ και $K'(\xi_2) = 0$, αποδεικνύοντας το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Η συνάρτηση για $x > 0$ είναι $f(x) = x \ln x$. Ελέγχουμε τη συνέχεια στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \underset{D.L.H}{\overset{-\infty/+\infty}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0 = f(0)$$

Εφόσον $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$, η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.
Είναι για $x > 0$: $f'(x) = \ln x + 1$ και $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$.
$f'(x) = 0 \implies lnx = -1 \implies x = \frac{1}{e}$.
Εφόσον η δεύτερη παράγωγος είναι θετική, η f είναι κυρτή.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Για το όριο: Η εφαπτομένη της f στο σημείο $x_0 = 1$ είναι η ευθεία $y - f(1) = f'(1)(x-1) \implies y = x-1$. Επειδή η f είναι κυρτή, η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα $f(x) \geq x - 1 \iff f(x) - x + 1 \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.
Για τον υπολογισμό του ορίου, θέτουμε $u = \dfrac{-1}{f(x) - x + 1}$.
Καθώς $x \to 1$, ο παρονομαστής τείνει στο 0 από θετικές τιμές, άρα $u \to -\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to 1} e^{\frac{-1}{f(x)-x+1}} = \lim_{u\to -\infty} e^u = 0$$

.
Είναι: $0 \leq \left| e^{\frac{-1}{f(x)-x+1}} \eta\mu \left(\dfrac{1}{x-1}\right) \right| \leq e^{\frac{-1}{f(x)-x+1}}$.
Επειδή το δεξιό μέλος δείξαμε ότι τείνει στο 0, από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει,

$$\lim_{x\to 1} \left| e^{\frac{-1}{f(x)-x+1}} \eta\mu \left(\frac{1}{x-1}\right) \right| = 0 \implies \lim_{x\to 1} e^{\frac{-1}{f(x)-x+1}} \eta\mu \left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$$

.

Δ2

Από τη σχέση $g'(x) = -2x + 9\kappa$, προκύπτει ότι $g(x) = -x^2 + 9\kappa x + c$.
Επειδή $g(1) = 0$, βρίσκουμε $-1 + 9\kappa + c = 0 \implies c = 1 - 9\kappa$.
Από την υπόθεση για το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^2 g(x)\, dx = \frac{\kappa}{2} \implies \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9\kappa x^2}{2} + (1-9\kappa)x \right]_1^2 = \frac{\kappa}{2} \implies \cdots \implies \frac{9\kappa}{2} - \frac{4}{3} = \frac{\kappa}{2} \implies \kappa = \frac{1}{3}$$

Άρα $g(x) = -x^2 + 3x - 2 = -(x-1)(x-2)$.

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα εκτελώντας διαίρεση πολυωνύμων

$$\frac{-x^3 + 3x^2 - x}{-x^2 + 3x - 2} = x + \frac{x}{-x^2 + 3x - 2}$$

και ανάλυση σε απλά κλάσματα:
Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A και B τέτοιους ώστε:

$$\frac{-x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Εκτελούμε την πρόσθεση στο δεύτερο μέλος:

$$\frac{-x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Για να ισχύει η ισότητα για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$, πρέπει οι αριθμητές να είναι ίσοι:

$$-x = A(x-2) + B(x-1)$$

Για $x = 1$:

$$-1 = A(1-2) + B(1-1) \implies -1 = -A \implies A = 1$$

Για $x = 2$:

$$-2 = A(2-2) + B(2-1) \implies -2 = B \implies B = -2$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των A και B, λαμβάνουμε την τελική ανάλυση:

$$\frac{-x}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2}$$

$$I = \int_3^4 \frac{-x^3+3x^2-x}{-x^2+3x-2}dx = \int_3^4 \left(x - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2\ln|x-2| + \ln|x-1|\right]_3^4 = \frac{7}{2} + \ln\left(\frac{3}{8}\right)$$

Δ3

Ζητείται να αποδείξουμε την ανισότητα:

$$f(x) + (2-x)(-2x+3) < f(2) \iff f(2) - f(x) > (2-x)(3-2x),\ x \in (1,2).$$

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x,2]$, με $1 < x < 2$. Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις:

- Η f είναι συνεχής στο κλειστό $[x,2]$ (ως γινόμενο συνεχών).
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό $(x,2)$ (ως γινόμενο παραγωγίσιμων).

Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$.

Γνωρίζουμε από το Δ1 ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα (αφού $f'' > 0$).
Επειδή $\xi > x$, προκύπτει $f'(\xi) > f'(x) \implies f'(\xi) > \ln x + 1$.

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι $\ln x + 1 > 3 - 2x \iff \ln x + 2x - 2 > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Lambda(x) = \ln x + 2x - 2$. Είναι παραγωγίσιμη με $\Lambda'(x) = 1/x + 2 > 0$, άρα η Λ είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $x > 1$, ισχύει $\Lambda(x) > \Lambda(1) = 0$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω:

$$f'(\xi) = \frac{f(2)-f(x)}{2-x} > f'(x) = lnx + 1 > 3 - 2x \implies f(x) + (2-x)(-2x+3) < f(2)$$

Για κάθε $x \in (1,2)$.

Δ4

Για να υπολογίσουμε σωστά το εμβαδόν του χωρίου Ω, πρέπει να μελετήσουμε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων και τα πρόσημα των συναρτήσεων στο διάστημα $[1,e]$. Η γεωμετρική απεικόνιση των συναρτήσεων και του χωρίου Ω παρουσιάζεται αναλυτικά στο σχήμα στο τέλος.

Πρόσημα και Ρίζες:

- Η συνάρτηση $f(x) = x\ln x$ έχει ρίζα το $x = 1$ και για $x \in (1,e]$ ισχύει $f(x) > 0$. Επομένως, η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ στο $(1,e]$.
- Η συνάρτηση $g(x) = -x^2 + 3x - 2 = -(x-1)(x-2)$ έχει ρίζες τα $x = 1$ και $x = 2$. Το τριώνυμο είναι θετικό εντός των ριζών, άρα $g(x) \geq 0$ για $x \in [1,2]$. Για $x \in (2,e]$, ισχύει $g(x) < 0$. Δηλαδή, η C_g περνά κάτω από τον άξονα $x'x$ μετά το $x = 2$.

Σχετική Θέση των C_f και C_g:

Από το ερώτημα Δ1 γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι η ευθεία $y = x - 1$ και λόγω της κυρτότητας ($f''(x) > 0$) ισχύει: $f(x) \geq x - 1$ για κάθε $x > 0$.
Επίσης, συγκρίνουμε την ευθεία με την C_g:

$$(x-1) - g(x) = x - 1 - (-x^2 + 3x - 2) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

Άρα $x - 1 \geq g(x)$.
Από τα παραπάνω, ισχύει $f(x) \geq x - 1 \geq g(x) \implies f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [1, e]$.

Καθορισμός του Χωρίου Ω:

Το χωρίο Ω περικλείεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και την C_g, εκτεινόμενο από $x = 1$ έως $x = e$. Επειδή ο άξονας $x'x$ ορίζεται ρητά ως σύνορο, το χωρίο Ω δεν μπορεί να επεκταθεί σε αρνητικές τεταγμένες. Επομένως, το κάτω σύνορο του χωρίου αλλάζει στο $x = 2$:

- Στο διάστημα $[1, 2]$: Και οι δύο συναρτήσεις είναι μη αρνητικές ($f(x) \geq g(x) \geq 0$). Το χωρίο περικλείεται από πάνω από την C_f και από κάτω από την C_g. Άρα το εμβαδόν σε αυτό το τμήμα είναι $E_1 = \displaystyle\int_1^2 \Big(f(x) - g(x)\Big)dx$.
- Στο διάστημα $[2, e]$: Η $g(x)$ γίνεται αρνητική, άρα περνάει κάτω από τον άξονα $x'x$. Επειδή ο άξονας $x'x$ ($y = 0$) αποτελεί σύνορο, το κάτω μέρος του χωρίου ταυτίζεται πλέον με τον άξονα $x'x$ και όχι με την C_g. Άρα το εμβαδόν είναι $E_2 = \displaystyle\int_2^e \Big(f(x) - 0\Big)dx = \int_2^e f(x)dx$.

Υπολογισμός Εμβαδού:

Το συνολικό εμβαδόν είναι το άθροισμα των δύο επιμέρους εμβαδών $E(\Omega) = E_1 + E_2$:

$$E(\Omega) = \int_1^2 \Big(f(x) - g(x)\Big)dx + \int_2^e f(x)dx$$

Ενώνοντας τα ολοκληρώματα της f (από το 1 έως το 2 και από το 2 έως το e):

$$E(\Omega) = \left(\int_1^2 f(x)dx + \int_2^e f(x)dx\right) - \int_1^2 g(x)dx = \int_1^e f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της $f(x)$ με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$$

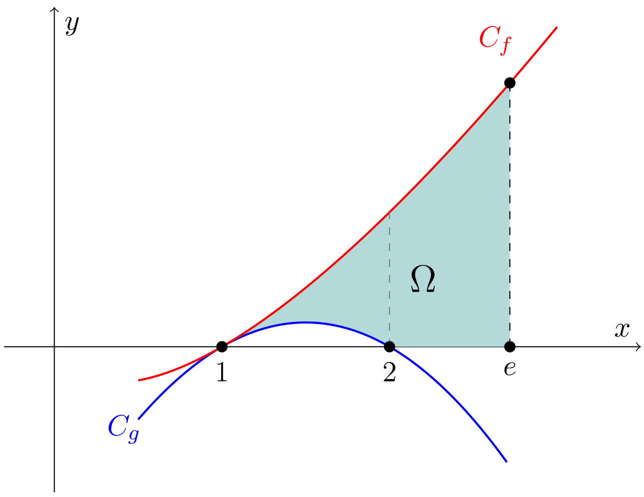
Για το ολοκλήρωμα της $g(x)$, αξιοποιούμε το δεδομένο από το ερώτημα Δ2 (γνωρίζουμε $\kappa = 1/3$):

$$\int_1^2 g(x)dx = \frac{\kappa}{2} = \frac{1/3}{2} = \frac{1}{6}$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε το τελικό εμβαδόν:

$$E(\Omega) = \frac{e^2+1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3(e^2+1) - 2}{12} = \frac{3e^2+1}{12} \text{ τ.μ.}$$

Όλα τα προηγούμενα συνοψίζονται στο παρακάτω σχήμα:



■