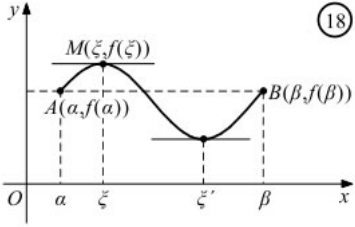


Απαντήσεις και Μοριοδότηση
Θεμάτων 5ης Προσομοίωσης φροντιστηρίων στη Λεόντειο
Αθήνα, 8/4/2026
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α







A1 7	Για $x \neq x_0$, ισχύει: $\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$	3
	Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$	3
	δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$	1
A2 4	Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .	4
A3 4	Αν μια συνάρτηση f είναι: <ul style="list-style-type: none"> • συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ • παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και • $f(a) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$	2

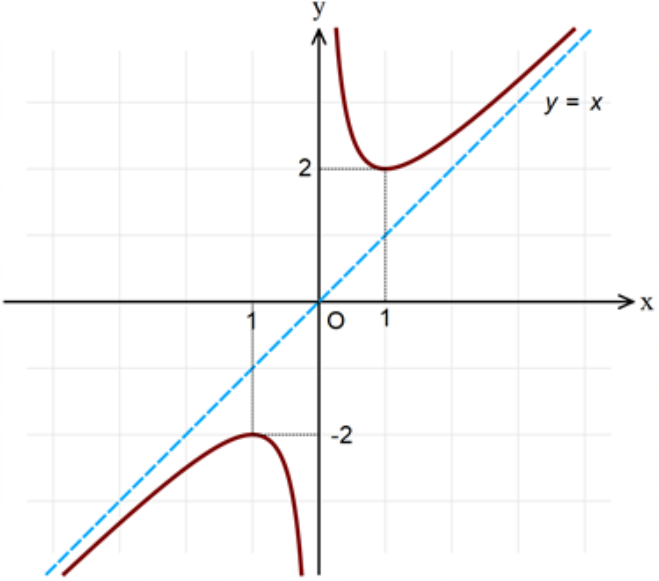
	<p>Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.</p>		2
--	---	--	----------

A4 10	Λάθος	2
	Λάθος	2
	Λάθος	2
	Λάθος	2
	Σωστό	2

ΘΕΜΑ Β

	<p>Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων στο πεδίο ορισμού της, με παράγωγο :</p> $f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, x \neq 0$	1																								
B1 4	<p>Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα.</p> <table border="1" data-bbox="945 1209 1325 1503" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">f'</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">○</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">○</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">f</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↗</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↘</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↘</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↘</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">↗</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">T.M. $f(-1)=-2$</td> <td></td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">T.E. $f(1)=2$</td> <td></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	f'	+	○	-	-	○	f	↗	↘	↘	↘	↗			T.M. $f(-1)=-2$		T.E. $f(1)=2$		2
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$																					
f'	+	○	-	-	○																					
f	↗	↘	↘	↘	↗																					
		T.M. $f(-1)=-2$		T.E. $f(1)=2$																						
	<p>Άρα η συνάρτηση: Είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ Είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-1, 0)$ και $(0, 1]$ Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το -2 και τοπικό ελάχιστο στο 1, το 2</p>	1																								

	<p>Η συνάρτηση f' είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων στο πεδίο ορισμού της, με παράγωγο :</p> $f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}, x \neq 0$	1															
	<p>Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα. Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και κυρτή στο $(0, +\infty)$</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$-\infty$</th> <th>0</th> <th>$+\infty$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>f''</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">-</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td>f</td> <td colspan="2" style="text-align: center;"></td> <td colspan="2" style="text-align: center;"></td> </tr> </tbody> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	f''	-		+		f					3
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
f''	-		+														
f																	
	<p>Κατακόρυφες ασύμπτωτες θα ψάξουμε στο 0, όπου η συνάρτηση δεν ορίζεται. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$</p> <p>Άρα παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ (τον άξονα $y'y$).</p>	1															
B2 10	<ul style="list-style-type: none"> Οριζόντιες ψάχνουμε στο $-\infty$ και στο $+\infty$ <p>Στο $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$</p> <p>άρα στο $-\infty$, δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.</p> <p>Στο $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$</p> <p>άρα στο $+\infty$, δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.</p> <ul style="list-style-type: none"> Πλάγιες ψάχνουμε στο $-\infty$ και στο $+\infty$ <p>Στο $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 = \beta$ <p>Άρα στο $-\infty$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = x$</p> <p>Στο $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = \lambda$</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \beta$ <p>Άρα στο $+\infty$ έχει ασύμπτωτη την ευθεία $y = x$</p>	2															

	<p>Εναλλακτικά, Παρατηρούμε ότι</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ <p>Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$.</p>	
	 <div data-bbox="1016 879 1370 1024" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-left: auto; margin-right: auto;"> <ul style="list-style-type: none"> • Μονοτονία: 1 • Κυρτότητα: 1 • Ασύμπτωτες: 1 </div>	3
B3	<p>Η συνάρτηση $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + c$, $x \in (0, +\infty)$ είναι μια παράγουσα της f, αφού είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγισίμων με :</p> $F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \ln x + c \right)' = x + \frac{1}{x} = f(x), x \in (0, +\infty) .$	1
6	<p>Και επειδή διέρχεται από το σημείο $N\left(1, \frac{1}{2}\right)$, τότε :</p> $F(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1^2}{2} + \ln 1 + c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = 0 \quad \text{άρα } F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x, x \in (0, +\infty).$	1

	<p>A' τρόπος (για μονοτονία)</p> <p>$F'(x) = x + \frac{1}{x} = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$ και επειδή η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο 1, το $f(1) = 1+1 = 2$, θα έχουμε, για $x \in (0, +\infty)$:</p> <p>$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 2 \Leftrightarrow F'(x) \geq 2 > 0$</p> <p>Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$</p> <p>B' τρόπος (για μονοτονία)</p> <p>$F'(x) = x + \frac{1}{x} > 0$, λόγω πεδίου ορισμού, άρα F γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.</p>	1
B3	<p>$F((0, +\infty)) \stackrel{F, \nearrow}{\text{συν}} = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right) = \mathbb{R}$, επειδή:</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2}{2} + \ln x \right) = -\infty$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} + \ln x \right) = +\infty$</p>	1
6	<p>Επειδή $2026 \in F((0, +\infty)) = \mathbb{R}$, υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $F(x_0) = 2026$.</p>	1
	<p>Όμως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε το x_0 θα είναι μοναδική ρίζα.</p>	1

	<p>Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2 = x + \frac{1}{x} - x^2$, $x \in [1, 2]$</p>	1
B4	<p>Η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών, στο $[1, 2]$. Ακόμα:</p> <p>$g(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0$</p> <p>$g(2) = 2 + \frac{1}{2} - 2^2 = 2 + \frac{1}{2} - 4 = -\frac{3}{2} < 0$, άρα $g(1) \cdot g(2) = -\frac{3}{2} < 0$</p> <p>Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα</p>	1

	$x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2$ Δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^2$.	
B4	Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με : $g'(x) = \left(x + \frac{1}{x} - x^2 \right)' = 1 - \frac{1}{x^2} - 2x$	1
5	Η οποία είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων με : $g''(x) = \frac{2}{x^3} - 2 = \frac{2 - 2x^3}{x^3} = 2 \frac{1 - x^3}{x^3} = 2 \frac{(1-x)(1+x+x^2)}{x^3} < 0$	1
	Άρα η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ Για $x \in [1,2] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow g'(1) \leq g'(x) \leq g'(2) \Leftrightarrow -2 \geq g'(x) \geq -\frac{11}{4}$, Άρα είναι $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2]$. Άρα g γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Οπότε το $x_0 \in (1,2)$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης. B' τρόπος (για το B4): Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $f(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 - x^3 = 0$ Και θέτω $\varphi(x) = -x^3 + x^2 + 1$ [μον1] Η οποία είναι συνεχής στο $[1,2]$, ως πολυωνυμική και $\varphi(1) = 1 > 0$, $\varphi(2) = -8 + 4 + 1 = -3 < 0$, άρα $\varphi(1) \cdot \varphi(2) < 0$ Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2$ [μον1] Επίσης $\varphi'(x) = -3x^2 + 2x = x(-3x + 2) < 0$ για κάθε $x \in [1,2]$, επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα και άρα το $x_0 \in (1,2)$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης. [μον3]	1

ΘΕΜΑ Γ

	<p>Πρέπει: $x \in \mathbb{A}_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$</p> <p>και $g(x) \in \mathbb{A}_f \Leftrightarrow g(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2.$</p> <p>Άρα είναι: $\mathbb{A}_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{A}_g / g(x) \in \mathbb{A}_f\} = [2, +\infty)$</p>	1
	<p>και</p> $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{3}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{3} - 1} = \sqrt{\frac{x+1-3}{3}} = \sqrt{\frac{x-2}{3}}$	1
<p>Γ1</p> <p>5</p>	<p>Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η h αντιστρέφεται.</p> <p>Α' τρόπος (για αντιστρέψιμη)</p> <p>Έστω $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ τέτοια ώστε : $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x_1-2}{3}} = \sqrt{\frac{x_2-2}{3}} \Leftrightarrow$</p> $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x_1-2}{3}}^2 = \sqrt{\frac{x_2-2}{3}}^2 \Leftrightarrow \frac{x_1-2}{3} = \frac{x_2-2}{3} \Leftrightarrow x_1-2 = x_2-2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ <p>Άρα η h, είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, οπότε αντιστρέφεται.</p> <p>Β' τρόπος (για αντιστρέψιμη):</p> <p>Έστω $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ τέτοια ώστε :</p> $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1-2 < x_2-2 \Leftrightarrow \frac{x_1-2}{3} < \frac{x_2-2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x_1-2}{3}} < \sqrt{\frac{x_2-2}{3}} \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$ <p>Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 και άρα αντιστρέψιμη.</p>	1
	<p>Γ' τρόπος (για αντιστρέψιμη ΚΑΙ τύπο)</p> <p>Έστω, για $x \geq 2$, $h(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{3}} = y \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = y^2 \Leftrightarrow x = 3y^2 + 2, y \geq 0$</p> <p>Πρέπει $x \geq 2 \Leftrightarrow 3y^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow 3y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0.$</p> <p>Άρα για κάθε $y \in h(\mathbb{A}_h)$, υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{A}_h$ για το οποίο η εξίσωση $h(x) = y$, έχει μοναδική λύση ως προς x, δηλαδή η h είναι 1-1 και η μοναδική λύση είναι η $x = h^{-1}(y)$. Άρα $h^{-1}(x) = 3x^2 + 2, x \geq 0.$</p>	2

$D_{h^{-1}} : 1 \text{ μον}$

Τύπος $h^{-1} : 1 \text{ μον}$

Έστω $N(x_0, f(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Τότε η απόσταση του N από το A , είναι ίση με:

$$\begin{aligned} d(x) &= (AN) = \sqrt{(x_N - x_A)^2 + (y_N - y_A)^2} = \sqrt{\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 + (f(x_0) - 0)^2} = \\ &= \sqrt{\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 + f^2(x_0)} = \sqrt{\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 + x_0 - 1} = \sqrt{x_0^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x_0 + \frac{25}{4} + x_0 - 1} = \\ &= \sqrt{x_0^2 - 4x_0 + \frac{21}{4}} \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$d(x) = \sqrt{x^2 - 4x + \frac{21}{4}}, \quad x \geq 1$$

1

A' τρόπος

Η συνάρτηση d παρουσιάζει ελάχιστο όπου η συνάρτηση του υπόρριζου παρουσιάζει ελάχιστο, η οποία είναι τριώνυμο και παριστάνει παραβολή με κορυφή $x_0 = -\frac{-4}{2} = 2$

Επομένως η θέση του ελάχιστου της d είναι το $x_0 = 2$ **[2 μον]**

B' τρόπος

Η συνάρτηση d είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$, ως πράξεις συνεχών και παραγωγισίμων, με:

$$d'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 4x + \frac{21}{4}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x + \frac{21}{4}}} \cdot \left(x^2 - 4x + \frac{21}{4} \right)' =$$

Γ2

5

$$= \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + \frac{21}{4}}} = \frac{2(x - 2)}{2\sqrt{x^2 - 4x + \frac{21}{4}}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + \frac{21}{4}}} \quad \mathbf{[1 \text{ μον}]}$$

2

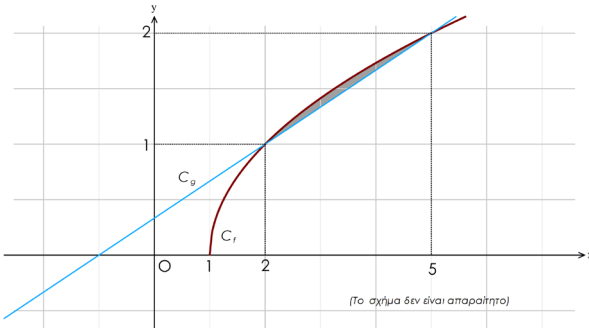
Το πρόσημο της d' και η μονοτονία της d φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Οπότε η d παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 2 και $f(2) = 1$, άρα το σημείο $N(2, 1)$ είναι το σημείο της συνάρτησης f , το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από το A . **[1 μον]**

x	1	2	$+\infty$
d'		-	+
d		↘	↗

Ο.Ε. $d(2)$

	<p>Αν $N(2,1)$, η εφαπτομένη στο N έχει εξίσωση $(\varepsilon_N): y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$, δηλαδή έχει κλίση ίση με $\frac{1}{2}$.</p> <p>Επίσης η κλίση της AN είναι: $\lambda_{AN} = \frac{Y_N - Y_A}{X_N - X_A} = \frac{1 - 0}{2 - \frac{5}{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$</p> <p>Επειδή $\lambda_{AN} \cdot \lambda_\varepsilon = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$, συμπεραίνουμε ότι $AN \perp (\varepsilon)$.</p>	2
--	--	----------

Γ3 5	<p>Για $x \geq 1$, λύνουμε την εξίσωση: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}^2 = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x-1 = \frac{x^2+2x+1}{9} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 9x-9 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=5)$</p>	1
	<p>Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι: $E = \int_2^5 f(x) - g(x) dx$.</p> <p>Έστω $\sqrt{x-1} > \frac{x+1}{3} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0 \Leftrightarrow x \in (2, 5)$</p> <div style="text-align: center;">  </div>	1
	<p>Άρα $E = \int_2^5 \left(\sqrt{x-1} - \frac{x+1}{3} \right) dx = \int_2^5 \sqrt{x-1} dx - \int_2^5 \frac{x+1}{3} dx = I_1 - I_2$</p> $I_1 = \int_2^5 \sqrt{x-1} dx = \left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_2^5 = \frac{2}{3} \left[(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 = \frac{2}{3} (2^3 - 1) = \frac{14}{3}$ $I_2 = \int_2^5 \frac{x+1}{3} dx = \frac{1}{3} \int_2^5 (x+1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_2^5 = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{5^2}{2} + 5 \right) - \left(\frac{2^2}{2} + 2 \right) \right] =$	3

	$= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{25}{2} + 5 \right) - (2+2) \right] = \frac{1}{3} \left(\frac{25}{2} + 5 - 2 - 2 \right) = \frac{1}{3} \frac{27}{2} = \frac{9}{2}$ <p>Οπότε $E = I_1 - I_2 = \frac{14}{3} - \frac{9}{2} = \frac{1}{6}$ τ.μ.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <ul style="list-style-type: none"> • Β' τρόπος: Με αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt{x-1}$ • Το λάθος στις πράξεις : -1 μονάδα </div>	
--	---	--

	$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{1} = 1$	2
Γ4 5	$P = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{h^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{3x^2 + 2}$ <p>Έχω</p> $\left \frac{\eta\mu x}{3x^2 + 2} \right \leq \left \frac{1}{3x^2 + 2} \right \Leftrightarrow - \left \frac{1}{3x^2 + 2} \right \leq \frac{\eta\mu x}{3x^2 + 2} \leq \left \frac{1}{3x^2 + 2} \right $ <p>Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left \frac{1}{3x^2 + 2} \right = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(- \left \frac{1}{3x^2 + 2} \right \right) = 0$</p> <p>Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής, $P = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{h^{-1}(x)} = 0$</p>	3

Γ5 5	Αφού το α μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/min, είναι $a'(t) = 2\text{cm/min}$ Η τεταγμένη του M είναι $y(t) = \sqrt{a(t)-1}$	1
	Τη χρονική στιγμή $t = t_0$, το σημείο M απέχει από τον γ'γ απόσταση 10cm, οπότε $a(t_0) = 10$.	1
	Τότε ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη του M είναι : $y'(t) = \left(\sqrt{a(t)-1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{a(t)-1}} a'(t)$	1
	Άρα τη χρονική στιγμή $t = t_0$ έχω: $y'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{a(t_0)-1}} a'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{10-1}} 2 = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} \text{ cm/min}$	2

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 5	Για $x > 0$ έχουμε: $x^2 f^2(x) + 1 = x^2 e^{2x} - 2xf(x) \Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = x^2 e^{2x} \Leftrightarrow (xf(x) + 1)^2 = (xe^x)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow xf(x) + 1 = xe^x \stackrel{xe^x > 0}{\Leftrightarrow} xf(x) + 1 = xe^x \quad (1)$	2
	Έστω συνάρτηση $\varphi(x) = xf(x) + 1$, η οποία είναι συνεχής στο $\Delta = (0, +\infty)$, ως πράξεις συνεχών.	1
	Λύνουμε την εξίσωση: $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} xe^x = 0$, αδύνατη στο Δ . Επομένως $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και φ συνεχής, οπότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .	1
	Επίσης είναι $\varphi(1) = f(1) + 1 = e > 0$, επομένως $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Οπότε $(1) \Leftrightarrow xf(x) + 1 = xe^x \Leftrightarrow f(x) = e^x - \frac{1}{x}, x \in \Delta$	1

Δ2 5	Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο Δ , ως πράξεις παραγωγίσιμων, με $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , άρα και 1-1, επομένως αντιστρέφεται.	2
	Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι: $D_{f^{-1}} = f(\Delta) \stackrel{f \nearrow}{\underset{\text{συν}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$, επειδή:	1
	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x - \frac{1}{x} \right)^{1-(+\infty)} = -\infty$	1
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x} \right)^{+\infty-0} = +\infty$	1
Δ3 5	Για $x > 0$ έχουμε την εξίσωση: $f^{-1}\left(e^x - \frac{1}{x}e - 1\right) + f^{-1}(e - 1) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(f(x) + f(1)) + f^{-1}(f(1)) = 2 \Leftrightarrow$	1
	$\Leftrightarrow f^{-1}(f(x) + f(1)) + f^{-1}(f(1)) = 2$ $\Leftrightarrow f^{-1}(f(x) + f(1)) + 1 = 2$ $\Leftrightarrow f^{-1}(f(x) + f(1)) = 1$	2
	$\stackrel{f \circ}{\Leftrightarrow} f(x) + f(1) = f(1)$ $\Leftrightarrow f(x) = 0$	
	Παρατηρούμε ότι $0 \in f(\Delta)$, επομένως υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα για την εξίσωση στο Δ	1
και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , η ρίζα αυτή είναι μοναδική.	1	

	<p>Η f' είναι παραγωγίσιμη στο Δ, ως πράξεις παραγωγίσιμων, οπότε: $f''(x) = e^x - \frac{2}{x^3}$, ομοίως είναι: $f^{(3)}(x) = e^x + \frac{6}{x^4} > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ και</p>	1
	<p>$f''(\Delta) \stackrel{\nearrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) \right) = \mathbb{R}$, επειδή: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x - \frac{2}{x^3} \right) \stackrel{1-(+\infty)}{=} -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{2}{x^3} \right) \stackrel{+\infty-0}{=} +\infty$. $0 \in f''(\Delta)$, επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \Delta$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$. Επειδή η f'' είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι μοναδική ρίζα της.</p>	1
Δ4 5	<p>Τότε:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Για $0 < x < x_0 \Rightarrow f''(x) < f''(x_0) \stackrel{f'' \nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) < 0$, άρα f κοίλη στο $(0, x_0]$ • Για $x_0 < x \stackrel{f'' \nearrow}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$, άρα f κυρτή στο $[x_0, +\infty)$. 	2
	<p>Τέλος, επειδή $f''(1) = e - 2 > 0 \Leftrightarrow f''(1) > f''(x_0) \Leftrightarrow 1 > x_0$, δηλαδή $x_0 \in (0, 1)$. Οπότε η f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο Δ το $K(x_0, f(x_0))$, του οποίου η τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.</p>	1

	<p>Η συνάρτηση F είναι μια αρχική της f στο Δ, οπότε ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.</p> <p>Αρκεί να αποδείξω ότι:</p> $F(1) + F(3) > 2F(2) \Leftrightarrow F(3) - F(2) > F(2) - F(1) \Leftrightarrow \frac{F(3) - F(2)}{3 - 2} > \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1}.$	1
Δ5	<p>Η συνάρτηση F είναι παράγουσα συνάρτηση στο Δ, επομένως: Είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$. Είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(1,2)$ και $(2,3)$.</p> <p>Επομένως ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού Λογισμού, σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι:</p> <p>Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_1) = f(\xi_1) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1}$</p> <p>Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (2,3)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_2) = f(\xi_2) = \frac{F(3) - F(2)}{3 - 2}$</p>	2
5	<p>Όμως είναι $\xi_1 < \xi_2 \overset{f'}{\Leftrightarrow} f(\xi_1) < f(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} < \frac{F(3) - F(2)}{3 - 2}$, που είναι ισοδύναμη με τη ζητούμενη.</p>	2
	<p>Β' τρόπος</p> <p>Αφού $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, θεωρούμε $F(x) = e^x - \ln x + c$. [μον. 1]</p> <p>Αρκεί να αποδείξουμε ότι</p> $F(1) + F(3) > 2F(2) \Leftrightarrow e^1 - \ln 1 + c + e^3 - \ln 3 + c > 2(e^2 - \ln 2 + c) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e + e^3 - \ln 3 > 2e^2 - 2\ln 2 \quad \mathbf{[μον.1]}$ <p>είναι $e^3 - 2e^2 + e = e(e^2 - 2e + 1) = e(e - 1)^2 > 0$</p> <p>Άρα $e + e^3 > 2e^2$ (1) [μον. 1]</p> <p>Επίσης: $3 < 4 \Leftrightarrow \ln 3 < \ln 4 \Leftrightarrow \ln 3 < 2\ln 2 \Leftrightarrow -\ln 3 > -2\ln 2$ (2) [μον. 1]</p> <p>Τότε: (1) + (2) $\Rightarrow e + e^3 - \ln 3 > 2e^2 - 2\ln 2$ [μον.1]</p>	