ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΜΠΑΖΟΥΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

5ο ΓΕΛ ΒΕΡΟΙΑΣ

ΜΑΙΟΣ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

Θ Ε Μ Α Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό x σημείο του Δ

τότε, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

(Μονάδες 7)

Α2. α. Πότε η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

β. Πότε μία συνάρτηση $f\colon A\to R$ λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της A.

(Μονάδες 4)

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά . **(Μονάδες 4)**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση,τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Κάθε συνάρτηση η οποία δεν είναι ένα προς ένα σε διάστημα Δ, δεν είναι και γνησίως μονότονη στο Δ.

β. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

γ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0

δ. Για κάθε συνάρτηση $f: A \to R$, $x_0 \in R$ ισχύει:

Αν $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε και $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β] , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

(Μονάδες 10)

Θ Ε Μ Α Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:[0,+\infty)\to R$ και $g(x)=2x+1$

για τις οποίες ισχύει

$(gof)(x)=2x-4\sqrt{x}+3$, $x\in[0,+\infty)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)^2,\ x\in[0,+\infty)$.

(Μονάδες 4)

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και τα κοίλα και να εξετάσετε αν υπάρχει ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

(Μονάδες 9)

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται στο διάστημα $[1,+\infty)$ και να βρείτε την αντίστροφη της.

(Μονάδες 5)

Β4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(\lambda)]^{f(x)}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda\in(1,+\infty)$.

(Μονάδες 7)

Θ Ε Μ Α   Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \alpha x + \beta$, $x \in R$, $\alpha, \beta \in R$ και $\varepsilon: y = -2x + 2$ η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x-1} - 2x + 2$

(Μονάδες 4)

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία διέρχεται από το σημείο Ν(-1,3) και σχηματίζει με τους άξονες x΄x και y΄y ισοσκελές τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (x-3) \cdot f(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με την τετμημένη του x να αυξάνει με ρυθμό $x'(t) > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t_0 με $x(t_0) \in (1,2)$ ώστε ο ρυθμός μεταβολής $y'(t)$ της τεταγμένης y του Μ να ισούται με το ρυθμό μεταβολής $x'(t)$ της τετμημένης x του Μ.

(Μονάδες 7)

Γ4. Έστω E το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = f(x^2)$, $x \in R$, τον άξονα $x'\,x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$. Να αποδείξετε ότι

$$E > \frac{5}{3}$$

(Μονάδες 8)

Θ Ε Μ Α Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $|f(x) + lnx| = |e^x - ex|$ για κάθε $x > 0$
- $f\left(\frac{1}{e}\right) > 1$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Έστω F αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0, +\infty)$

Δ1.α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = ex$ έχει μοναδική λύση τη $x = 1$

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - ex - lnx \quad , x > 0$

(Μονάδες 7)

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0, x_0 \in (1, +\infty)$ για το οποίο ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x > 0$$

(Μονάδες 6)

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(x^2 + x_0) = 0 \ ,$$

όπου x_0 ο αριθμός του ερωτήματος Δ2

(Μονάδες 6)

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{e^x \cdot \left[F\left(x^2-x+1\right)-F\left(x^2+\frac{1}{2}\right)\right]}{x} = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \left[F\left(x^2-x+x_0\right)-F(1)\right]}{x-1}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$,

όπου x_0 ο αριθμός του ερωτήματος Δ2

(Μονάδες 6)

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.

4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ευχόμαστε επιτυχία