Γενικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

7 μονάδες

Α2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα σημεία της f;

3 μονάδες

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

5 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό*** αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)<\lim_{x\to x_0} g(x)$.

β) Αν για μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε θα είναι $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

γ) Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

δ) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, $x\in A$.

ε) Αν για μία συνεχή στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές.

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{\alpha x}{x-1}$, $x<1$, $\alpha\neq 0$. Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(-1,f(-1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=-x$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$.

3 μονάδες

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

1 + 5 = 6 μονάδες

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε ότι $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-4}$, $x<4$.

Β3. Έστω και η συνάρτηση $g(x)=\ln x$, $x>0$. Να ορίσετε την συνάρτηση $h=g\circ f^{-1}$ και να βρείτε τις ασύμπτωτες της.

3 + 4 = 7 μονάδες

Β4. Να βρεθεί αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0}\left(f^{-1}(x)\,\text{συν}\frac{1}{x}\right)$.

4 μονάδες

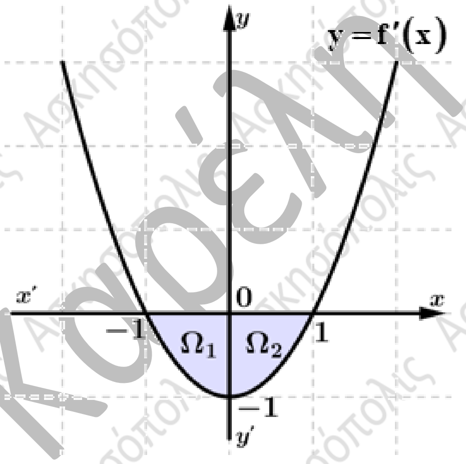
Β5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f^{-1}(x)}{\text{συν}x}+1=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

5 μονάδες

Θέμα Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνεχούς στο $\mathbb{R}$ παραγώγου f'. Γνωρίζουμε ότι:

- $f(1)=-f(-1)$
- Το εμβαδόν του χωρίου Ω μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και του άξονα x΄x είναι ίσο με $\frac{4}{3}$ τετραγωνικές μονάδες.
- Τα εμβαδά των χωρίων Ω_1 και Ω_2 που φαίνονται στο σχήμα, είναι ισεμβαδικά.



Γ1. α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I_1=\int_{-1}^{1}f'(x)dx$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(1)=-\frac{2}{3}$ και $f(0)=0$.

3 + 5 = 8 μονάδες

Γ2. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την f'' συνεχή, τότε να υπολογίσετε:

α) Το ολοκλήρωμα $I_2=\int_{-1}^{1}xf''(x)dx$.

β) Το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)+x}$.

3 + 3 = 6 μονάδες

Γ3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

7 μονάδες

Γ4. Υλικό σημείο Μ κινείται στην γραφική παράσταση της f με την τετμημένη της να αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι αντίθετος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του, να αποδείξετε ότι το Μ διέρχεται από το σημείο καμπής της f.

4 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η $f(x)=e^x-e^{-x}-\lambda x$, $x\in\mathbb{R}$ με λ ακέραιο αριθμό.

Δ1. α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται μοναδική εφαπτομένη που την διαπερνά, την οποία και να βρείτε.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f'.

4 + 3 = 7 μονάδες

Δ2. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του $\lambda\in\mathbb{Z}$, ώστε η εξίσωση $f'(x)=0$ να έχει ακριβώς δύο ρίζες;

3 μονάδες

Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρήστε ότι $\lambda=3$:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο όπου $x_1<0<x_2$ οι τετμημένες τους.

5 μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{e}^{e^4} \frac{f'(x)}{x} dx > -e^{x_2} - e^{-x_2}$, όπου x_2 αυτό του ερωτήματος Δ3.

4 μονάδες

Δ5. Έστω G μία αρχική στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $g(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$g^2(x) + G(x) = G(0) \text{ στο } \mathbb{R}.$$

6 μονάδες

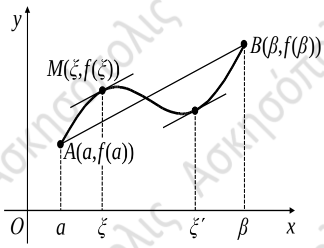
Ευχόμαστε κάθε επιτυχία!
Νίκος Τούντας – Γιώργος Σταματίου

Λύσεις με αναλυτική μοριοδότηση

Θέμα Α

Α1.	Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι • Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.	**2**
	Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (1).	**3**
	Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$ και τότε $f(x_1)=f(x_2)$.	**1**
	• Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.	**1**

Α2.	Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.	**3**

Α3.	Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.	**3**
	Γεωμετρικά, το Θεώρημα Μέσης Τιμής σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.  	**2**

Α4.	**α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό	**10**
	Αιτιολόγηση των ερωτήσεων Σωστού – Λάθους (Δεν απαιτείται στις απαντήσεις) **α)** Έστω $f(x)=0$, $x \neq 0$ και $g(x)=x^2$, $x \neq 0$. Είναι $f(x)<g(x)$ για κάθε x κοντά στο 0 δηλαδή $x \neq 0$, όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. **Σχόλιο:** Γενικά αν $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **β)** Αφού f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Αν ήταν $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε θα ίσχυαν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\alpha,\beta]$, επομένως θα υπήρχε $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, πράγμα άτοπο. **γ)** Πρέπει το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο ώστε να ισχύει το θεώρημα Fermat. Η συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in[1,2]$ έχει ελάχιστο στο $x=1$, όμως $f'(x)=2x$ και $f'(1)=2\neq 0$. **δ)** Πρέπει $x \in f(A)$ για να είναι σωστό, αφού είναι σύνθεση συναρτήσεων, δηλαδή πρέπει $x \in D_{f^{-1}} = f(A)$ και $f^{-1}(x) \in A$ (ισχύει). **ε)** Αν η f δεν έπαιρνε τουλάχιστον δύο ετερόσημες τιμές, τότε θα ήταν $f(x)\ge 0$ ή $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, θα ήταν $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)dx<0$ που είναι άτοπο.	

Θέμα Β

Β1.	Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $f'(x)=\dfrac{\alpha(x-1)-\alpha x}{(x-1)^2}=\dfrac{\cancel{\alpha x}-\alpha-\cancel{\alpha x}}{(x-1)^2}=$ $=-\dfrac{\alpha}{(x-1)^2}$.	1
	Αφού η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $M(-1,f(-1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=-x$ τότε $f'(-1)=-1 \Leftrightarrow -\dfrac{\alpha}{(-2)^2}=-1 \Leftrightarrow \alpha=4$.	2

Β2.	Για $\alpha=4$ είναι $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$, $x<1$ και $f'(x)=-\dfrac{4}{(x-1)^2}$, $x<1$.	
	$1^{ος}$ τρόπος για την απόδειξη του 1-1:	
	Είναι $f'(x)=-\dfrac{4}{(x-1)^2}<0$ για κάθε $x<1$ και η f συνεχής άρα $f\searrow(-\infty,1)$. Δηλαδή η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.	1
	$2^{ος}$ τρόπος για την απόδειξη του 1-1:	
	Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \dfrac{4x_1}{x_1-1}=\dfrac{4x_2}{x_2-1}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cancel{4x_1x_2}-4x_1=\cancel{4x_1x_2}-4x_2 \Leftrightarrow -4x_1=-4x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.	1
	$1^{ος}$ τρόπος για την εύρεση της αντίστροφης (χρειάζεται την μονοτονία):	
	Η f συνεχής και $\searrow$ στο $(-\infty,1)$ άρα $f((-\infty,1))=\left(\lim\limits_{x\to1^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,4)=D_{f^{-1}}$ γιατί	1
	• $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(4x\cdot\dfrac{1}{x-1}\right)=4\cdot(-\infty)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$ και $x-1<0$ κοντά στο 1 από μικρότερες τιμές. • $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cancel{x}}{\cancel{x}}=4$	2
	Για κάθε $x<1$ και $y<4$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{4x}{x-1}=y\Leftrightarrow 4x=yx-y\Leftrightarrow yx-4x=y\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(y-4)x=y\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{y-4}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{y}{y-4}$, $y<4$ άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-4}$, $x<4$.	2
	$2^{ος}$ τρόπος για την εύρεση της αντίστροφης:	
	Για κάθε $x<1$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{4x}{x-1}=y\Leftrightarrow 4x=yx-y\Leftrightarrow yx-4x=y\Leftrightarrow(y-4)x=y$ (1)	1
	Αν $y=4$ τότε (1) $\Leftrightarrow 0=4$ αδύνατη. Άρα είναι $y\neq4$ και τότε (1) $\Leftrightarrow x=\dfrac{y}{y-4}$	1
	Είναι $x<1\Leftrightarrow\dfrac{y}{y-4}<1\Leftrightarrow\dfrac{y}{y-4}-1<0\Leftrightarrow\dfrac{\cancel{y}-\cancel{y}+4}{y-4}<0\Leftrightarrow y-4<0\Leftrightarrow y<4$	2
	Άρα $x=\dfrac{y}{y-4}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{y}{y-4}$, $y<4$ δηλαδή $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-4}$, $x<4$.	1

Β3.	Η $h=g\circ f^{-1}$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x\in D_{f^{-1}} \\ f^{-1}(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ \dfrac{x}{x-4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x(x-4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x<4 \\ x<0 \text{ ή } x>4 \end{cases} \Leftrightarrow x<0$ άρα $D_h=(-\infty,0)$.	**2**
	Είναι $h(x)=g\left(f^{-1}(x)\right)=\ln\dfrac{x}{x-4}$, $x<0$. **Σχόλιο: Επειδή $x<0$ τότε και $x-4<0$ και η h μπορεί να γραφεί και ως:** $\mathbf{h(x)=\ln\left(\dfrac{-x}{4-x}\right)=\ln(-x)-\ln(4-x)\,,\ x<0}$	**1**
	1^{ος} τρόπος για την κατακόρυφη ασύμπτωτη:	
	Η h είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ άρα μοναδική πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη η ευθεία $x=0$. Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\ln\dfrac{x}{x-4}\right)\overset{\frac{x}{x-1}=\omega}{=}\lim\limits_{\omega\to0^+}(\ln\omega)=-\infty$ άρα η $x=0$, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της h.	**2**
	2^{ος} τρόπος για την κατακόρυφη ασύμπτωτη:	
	Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\ln(-x)-\ln(4-x)\right]=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to0^-}\left[\ln(-x)\right]\overset{-x=\omega}{=}\lim\limits_{\omega\to0^+}(\ln\omega)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\left[\ln(4-x)\right]\overset{4-x=\omega}{=}\lim\limits_{\omega\to4^-}(\ln\omega)=\ln4$. Άρα η $x=0$, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της h. **Σχόλιο: Αν ο μαθητής κάνει $\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[\ln x-\ln(x-4)\right]=-\infty$ είναι λάθος και δεν παίρνει κανένα μόριο για την κατακόρυφη ασύμπτωτη.**	**2**
	Για την οριζόντια ασύμπτωτη:	
	Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\ln\dfrac{x}{x-4}\right)\overset{\frac{x}{x-4}=\omega}{=}\lim\limits_{\omega\to1}(\ln\omega)=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$. Άρα η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της h στο $-\infty$.	**2**

Β4.	$\lim\limits_{x\to0}\left(f^{-1}(x)\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{x-4}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)=L$	
	Για κάθε x κοντά στο 0 είναι $\left\|\dfrac{x}{x-4}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right\|=\left\|\dfrac{x}{x-4}\right\|\left\|\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right\|\le\left\|\dfrac{x}{x-4}\right\|\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\left\|\dfrac{x}{x-4}\right\|\le\dfrac{x}{x-4}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\le\left\|\dfrac{x}{x-4}\right\|$	**2**
	Είναι $\lim\limits_{x\to0}\left(-\left\|\dfrac{x}{x-4}\right\|\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\left\|\dfrac{x}{x-4}\right\|\right)=\dfrac{0}{-4}=0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι $L=0$.	**2**

B5.	Για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\frac{f^{-1}(x)}{\sigma\upsilon\nu x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{(x-4)\sigma\upsilon\nu x} + 1 = 0 \Leftrightarrow x + (x-4)\sigma\upsilon\nu x = 0$ Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x) = x + (x-4)\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η k είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $k(0) = 0 - 4\sigma\upsilon\nu 0 = -4 < 0$ και $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - 4\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$ άρα $k(0)k\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $k(x) = 0 \Leftrightarrow x + (x-4)\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{f^{-1}(x)}{\sigma\upsilon\nu x} + 1 = 0$ έχει ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.	**3**
	Η k είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $k'(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x + (4-x)\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ αφού στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x > 0$, $\sigma\upsilon\nu x > 0$ και $4 - x > 0$ ($0 < \frac{\pi}{2} < 4$). Αφού η k είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε $k \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως η ζητούμενη εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.	**2**

Θέμα Γ

Γ1. α)	Από την γραφική παράσταση της f' παρατηρούμε ότι τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$, άρα το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και του άξονα x΄x είναι $E(\Omega) = \int_{-1}^{1} \lvert f'(x) \rvert dx$.	**1**
	Επειδή $f'(x) \le 0$ στο $[-1,1]$, τότε: $E(\Omega) = \int_{-1}^{1} \lvert f'(x) \rvert dx = -\int_{-1}^{1} f'(x)dx$.	**1**
	Άρα $I_1 = \int_{-1}^{1} f'(x)dx = -E(\Omega) = -\frac{4}{3}$.	**1**

Γ1. β)	Είναι επίσης $I_1 = \int_{-1}^{1} f'(x)dx = \left[f(x)\right]_{-1}^{1} = f(1) - f(-1) = 2f(1)$ επειδή $f(1) = -f(-1)$.	**1**
	Επομένως είναι $I_1 = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 2f(1) = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$.	**1**
	Τα Ω_1, Ω_2 είναι ισοεμβαδικά άρα: $\int_{-1}^{0} \lvert f'(x) \rvert dx = \int_{0}^{1} \lvert f'(x) \rvert dx \Leftrightarrow -\int_{-1}^{0} f'(x)dx = -\int_{0}^{1} f'(x)dx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[f(x)\right]_{-1}^{0} = \left[f(x)\right]_{0}^{1} \Leftrightarrow f(0) \cancel{-f(-1)} = \cancel{f(1)} - f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ **2ος τρόπος:** Το εμβαδόν του Ω_1 είναι το μισό του Ω, δηλαδή: $\int_{-1}^{0} \lvert f'(x) \rvert dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^{0} f'(x)dx = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[f(x)\right]_{-1}^{0} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow f(0) \cancel{-f(-1)} = \cancel{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow f(0) = 0$ **3ος τρόπος:** Το εμβαδόν του Ω_2 είναι το μισό του Ω, δηλαδή: $\int_{0}^{1} \lvert f'(x) \rvert dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \int_{0}^{1} f'(x)dx = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[f(x)\right]_{0}^{1} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \cancel{f(1)} - f(0) = \cancel{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow f(0) = 0$	**3**

Γ2. α)

$I_2=\int_{-1}^{1} xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} f'(x)dx=$ **2**

$=f'(1)+f'(-1)-I_1=\frac{4}{3}$ αφού από την γραφική παράσταση είναι $f'(-1)=f'(1)=0$. **1**

Γ2. β)

Η f συνεχής άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)+x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f'(x)+1}=+\infty$ γιατί **1**

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f'(x)+1\right]=0$ και από το σχήμα είναι $f'(x)>-1\Leftrightarrow f'(x)+1>0$ για κάθε x κοντά στο 0. **2**

Γ3.

Για την μονοτονία της f χρειαζεται το πρόσημο της f'. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-1)$ άρα $f\nearrow(-\infty,-1]$. Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f'(x)<0$ στο $(-1,1)$ άρα $f\searrow[-1,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ άρα $f\nearrow[1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=-f(1)=\frac{2}{3}$ και τοπικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=-\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	
			Τ.Μ.		Τ.Ε		

4

Για την κυρτότητα της f χρειαζόμαστε την μονοτονία της f'. Είναι $f'\searrow(-\infty,0]$ άρα $f\cap(-\infty,0]$ και $f'\nearrow[0,+\infty)$ άρα $f\cup[0,+\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $O(0,f(0))\equiv O(0,0)$, δηλαδή την αρχή των αξόνων.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		↘		↗	
f		∩		∪	
			Σ.Κ.		

3

Γ4.

Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=f(x(t))$ και $x'(t)=2\,cm/sec$.
Είναι $y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)=2f'(x(t))$. **1**

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι αντίθετος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης, δηλαδή $y'(t_0)=-x'(t_0)\Leftrightarrow 2f'(x(t_0))=-2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f'(x(t_0))=-1$. **1**

Από την γραφική παράσταση της f' παρατηρούμε ότι $f'(x)=-1\Leftrightarrow x=0$ άρα θα είναι $x(t_0)=0$. Άρα $y(t_0)=f(x(t_0))=f(0)=0$, επομένως το M διέρχεται από την αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο καμπής της f. **2**

Θέμα Δ

Δ1. α)

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη διαπερνα την C_f στο σημείο καμπής της, άρα αρκεί να δείξουμε ότι έχει μοναδικό σημείο καμπής και να βρούμε την εφαπτομένη στο σημείο αυτό. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+e^{-x}-\lambda$ και $f''(x)=e^x-e^{-x}$
Είναι $f''(x)\ge 0\Leftrightarrow e^x-e^{-x}\ge 0\Leftrightarrow e^x\ge e^{-x}\Leftrightarrow x\ge -x\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.
Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και $f''(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ άρα $f\cap(-\infty,0]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f''(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ άρα $f\cup[0,+\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $O(0,f(0))\equiv O(0,0)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	
f		∩		∪	
			Σ.Κ.		

3

Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=(2-\lambda)x$ αφού $f'(0)=2-\lambda$. **1**

Δ1. β)

Είναι $f \frown (-\infty,0]$ άρα $f' \searrow (-\infty,0]$ και $f \smile [0,+\infty)$ άρα $f' \nearrow [0,+\infty)$.

Η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $f'(0)=2-\lambda$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Ο.Ε.

1

Έστω $A_1=(-\infty,0]$ και $A_2=(0,+\infty)$, τότε:

- $f'\searrow$ και συνεχής στο A_1 άρα $f'(A_1)=\left[f'(0),\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=[2-\lambda,+\infty)$.
- $f'\nearrow$ και συνεχής στο A_2 άρα $f'(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to0^+} f'(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)\right)=(2-\lambda,+\infty)$.

Άρα η f' έχει σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R})=f'(A_1)\cup f'(A_2)=[2-\lambda,+\infty)$.

2

Δ2.

Αφού $f'\searrow A_1$ και $f'\nearrow A_2$, τότε έχει το πολύ μία ρίζα στο A_1 και το πολύ μία ρίζα στο A_2. 1

Για να έχει ακριβώς δύο ρίζες αρκεί $0\in f'(A_1)$ και $0\in f'(A_2)$. Αυτό θα συμβαίνει όταν $2-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>2$. 1

Επειδή $\lambda\in\mathbb{Z}$, τότε η ελάχιστη τιμή του θα είναι το 3.
Σχόλιο: Αν $2-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ τότε έχει ακριβώς μία ρίζα. 1

Δ3.

Για $\lambda=3$ είναι $f(x)=e^x-e^{-x}-3x$ και $f'(x)=e^x+e^{-x}-3$. Από Δ2 η εξίσωση $f'(x)=0$ θα έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1\in A_1$ και $x_2\in A_2$, δηλαδή $x_1<0<x_2$.

- Για $x<x_1<0 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_1)=0$
- Για $x_1<x\le 0 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_1)=0$
- Για $0\le x<x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_2)=0$
- $x>x_2>0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_2)=0$

4

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε $f\nearrow(-\infty,x_1]$, $f\searrow[x_1,x_2]$ και $f\nearrow[x_2,+\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=x_1$ το $f(x_1)$ και τοπικό ελάχιστο για $x=x_2$ το $f(x_2)$.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

1

Δ4.

Από Δ1.β. είναι $f'(x)\ge 2-\lambda \overset{\lambda=3}{\Leftrightarrow} f'(x)\ge -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. 1

Για $x\in[e,e^4]$ είναι $f'(x)>-1 \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{x}>-\dfrac{1}{x}$ 1

άρα $\displaystyle\int_e^{e^4}\frac{f'(x)}{x}dx>-\int_e^{e^4}\frac{1}{x}dx=-\left[\ln|x|\right]_e^{e^4}=-4+1=-3$ 1

Είναι $f'(x_2)=0 \Leftrightarrow e^{x_2}+e^{-x_2}-3=0 \Leftrightarrow -3=-e^{x_2}-e^{-x_2}$. Επομένως $\displaystyle\int_e^{e^4}\frac{f'(x)}{x}dx>-e^{x_2}-e^{-x_2}$. 1

Δ5.

1ος τρόπος για το Δ5:

Η εξίσωση $g^2(x)+G(x)=G(0) \Leftrightarrow g^2(x)+G(x)-G(0)=0 \Leftrightarrow h(x)=0$ έχει προφανή ρίζα την $x=0$, αφού $g(0)=f(0)=0$ με $h(x)=g^2(x)+G(x)-G(0)$, $x\in\mathbb{R}$ 1

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$h'(x)=2g(x)g'(x)+G'(x)\overset{G'(x)=g(x)}{=}g(x)\left[2g'(x)+1\right]$$

1

	Η $g(x)=f(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)+1\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$ (όπως και στο Δ4). Άρα $g\nearrow\mathbb{R}$ και θα είναι: Για $x<0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)=0$ και για $x>0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)=0$.	**2**
	Άρα είναι $h'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και $h'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε $h\searrow(-\infty,0]$, $h\nearrow[0,+\infty)$ και η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $h(0)=0$.	**1**
	Είναι λοιπόν $h(x)\geq h(0)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.	**1**

	2ος τρόπος για το Δ5:	
	Η εξίσωση $g^2(x)+G(x)=G(0)\Leftrightarrow g^2(x)=G(0)-G(x)$ έχει προφανή ρίζα την $x=0$, αφού $g(0)=f(0)=0$.	**1**
	Αρκεί να βρούμε το πρόσημο της $g(x)=f(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$.	
	1ος τρόπος εύρεσης προσήμου της g:	
	Η $g(x)=f(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)+1\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$ (όπως και στο Δ4). Άρα $g\nearrow\mathbb{R}$ και θα είναι: Για $x<0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(0)=0$ και για $x>0\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(x)>g(0)=0$.	**2**
	2ος τρόπος εύρεσης προσήμου της g:	
Δ5.	Από Δ1.α) γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη στο $O(0,0)$ έχει εξίσωση $y=(2-\lambda)x\overset{\lambda=3}{\Leftrightarrow}y=-x$. Είναι $f\frown(-\infty,0]$ άρα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή για κάθε $x<0$ είναι $f(x)<-x\Leftrightarrow g(x)<0$. Είναι $f\smile[0,+\infty)$ άρα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>-x\Leftrightarrow g(x)>0$.	**2**
	Άρα τελικά είναι $g(x)<0\Leftrightarrow G'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$ και $g(x)>0\Leftrightarrow G'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$. Επειδή η G είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε $G\searrow(-\infty,0]$ και $G\nearrow[0,+\infty)$. Επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $G(0)$. Δηλαδή $G(x)\geq G(0)\Leftrightarrow G(0)-G(x)\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.	**2**
	Επίσης είναι $g^2(x)\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Άρα για κάθε $x\neq 0$ είναι $g(x)>0>G(0)-G(x)$ και η εξίσωση $g^2(x)=G(0)-G(x)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.	**1**