

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma$$

$$(a \neq 0)$$

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Μαθηματικά Προσανατολισμού 2026

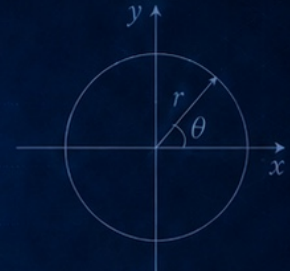
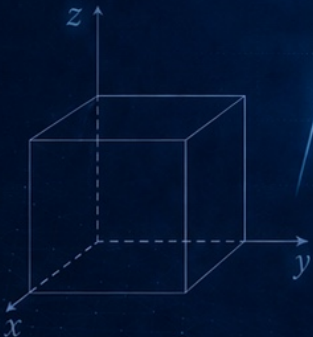
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Θέματα με ενδεικτικές λύσεις σε Latex

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$(n \neq -1)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Επιμέλεια : Χρήστος Λοίζος MSc Μαθηματικός

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 5**

**A3.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι “1-1”, αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

**β)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**γ)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι κυρτή στο  $\Delta$ .

**δ)** Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) .$$

**ε)** Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\phi x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$  και

ισχύει  $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x} .$

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = 2 \ln(x-1)$$

και

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2} + 1.$$

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .

**Μονάδες 8**

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι  $h(x) = \ln(x-2)$ ,  $x \in (2, +\infty)$ .

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h^{-1}$  (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**B3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$ .

**Μονάδες 8**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

με  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ .
- Η ευθεία  $y = x$  εφάπτεται στη γραφική παράσταση της  $f$  στην αρχή των αξόνων.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

- i)  $\kappa = 0$  και
- ii)  $\mu = 1$ .

**Μονάδες 8**

**Γ2.** i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  (μονάδες

3) και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ , για

κάθε τιμή της παραμέτρου  $\alpha \in \mathbb{R}$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 11**

**Γ3.** Για  $v \in \mathbb{N}$  ορίζουμε  $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$ ,  $v \in \mathbb{N}$ .

ii) Να υπολογίσετε τα  $I_0, I_1$  και  $I_2$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $g'(x) \neq -1$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_1 \in (-1, 0)$  ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0.$$

**Μονάδες 6**

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 3$ .

**Μονάδες 2**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  ισχύουν:

i)  $f(x) \geq 0$  και (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση  $3f(x) = \pi$  έχει ακριβώς μια ρίζα,  $x_2$ . (μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

**Δ4.** i) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 0$  στο διάστημα  $[x_1, 0]$ . (μονάδες 3)

ii) Έστω  $\Omega$  το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = x_1$  και  $x = f(x_2)$ , όπου  $x_1$  είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και  $x_2$  είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας  $y'y$  χωρίζει το  $\Omega$  σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3.$$

(μονάδες 7)

**Μονάδες 10**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

# Λύσεις Μαθηματικών Προσανατολισμού Πανελλαδικών Εξετάσεων ΓΕΛ 2026

Επιμέλεια λύσεων: Χρήστος Λοΐζος MSc Μαθηματικός,  
Επιμέλεια L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: Χρήστος Κατσανδρός και Χρήστος Λοΐζος

8 Ιουνίου 2026

## Θέμα Α

### Ερώτημα Α1.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$ , ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

- Αν  $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η συνάρτηση  $f$  είναι:
  - συνεχής στο  $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$ ,
  - παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2) \subseteq \Delta$ .

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Διαφορικού Λογισμού) υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$ :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \iff f'(\xi)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \quad (1)$$

Επειδή  $\xi$  εσωτερικό του  $(x_1, x_2) \subseteq \Delta$ , τότε  $f'(\xi) = 0$ . Από (1) έχουμε:

$$0 \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \iff f(x_1) = f(x_2)$$

Σε κάθε περίπτωση,  $f(x_1) = f(x_2)$  ■

### Ερώτημα Α2.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f, g, h$ . Εάν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$ , και

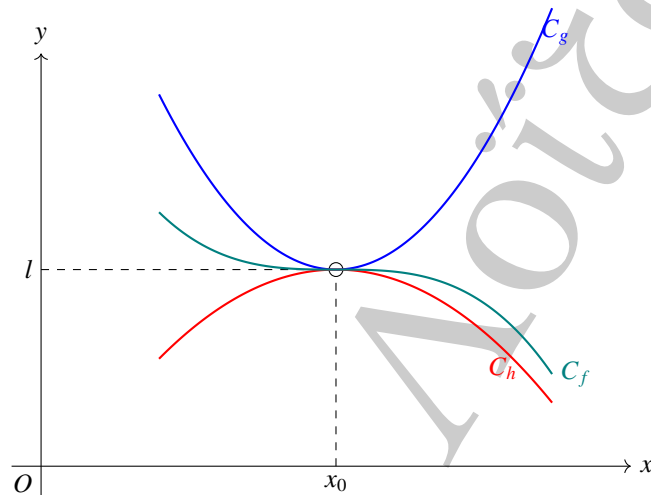
•

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Προαιρετικά, έχουμε και το σχήμα:



### Ερώτημα Α3.

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

### Ερώτημα Α4.

- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Λάθος

**Θέμα Β****Ερώτημα Β1.**

Θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση  $h(x) = (f \circ g)(x)$ .

- Πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x > 2 \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 > 1\} \\ &= \{x > 2 \text{ και } \sqrt{x-2} > 0\} = (2, +\infty) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Άρα,  $D_{f \circ g} = (2, +\infty) \neq \emptyset$ , οπότε ορίζεται η πράξη της σύνθεσης της  $g$  με την  $f$ .

- Τύπος:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2 \ln(g(x) - 1) \\ &= 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2 \ln \sqrt{x-2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2) = \ln(x-2). \end{aligned}$$

Τελικά,  $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln(x-2)$ ,  $x \in (2, +\infty)$ .

**Ερώτημα Β2.****Απόδειξη αντιστρεψιμότητας****1<sup>ος</sup> τρόπος**

Απόδειξη. Για τυχαία  $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$  με  $h(x_1) = h(x_2)$ :

$$\ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \xrightarrow{\ln^{-1}} x_1 - 2 = x_2 - 2 \implies x_1 = x_2.$$

Άρα η  $h$  είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται. ■

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Απόδειξη. Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $(2, +\infty)$  ως σύνθεση μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(2, +\infty)$  με:

$$h'(x) = (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}(x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0 \text{ αφού } x > 2.$$

Άρα  $h'(x) > 0$ , οπότε από γνωστό θεώρημα η  $h$  γνησίως αύξουσα (↗) στο  $(2, +\infty)$ . Κατά συνέπεια, αντιστρέφεται από άλλο γνωστό θεώρημα. ■

### Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

#### 1<sup>ος</sup> τρόπος

Είναι  $h(x) = \ln(x - 2)$ ,  $x > 2$ .

$$\text{θέτω } y = h(x) \iff y = \ln(x - 2) \iff e^y = x - 2 \iff x = e^y + 2.$$

Απαιτώ  $e^y + 2 > 2 \iff e^y > 0$ , που ισχύει. Άρα  $x = e^y + 2$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , ή  $h^{-1}(y) = e^y + 2$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

Αντικαθιστώ  $y$  με  $x$ :

$$\boxed{h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της  $h$ . Είναι  $h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0 \implies h \nearrow$  στο  $(2, +\infty)$ , οπότε:

$$h((2, +\infty)) \stackrel{h \text{ συνεχής}}{\stackrel{h \nearrow \text{ στο } (2, +\infty)}{=}} \left( \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2). \quad \text{θέτω } x - 2 = u, \text{ όταν } x \rightarrow 2^+ \implies u \rightarrow 0^+.$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \quad (\text{θεωρία}).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - 2) = +\infty \quad (\text{θέτω } x - 2 = t, \quad t \rightarrow +\infty).$$

Άρα,  $h((2, +\infty)) = \mathbb{R}$ .

Τελικά, θέτω  $y = h(x) \iff y = \ln(x - 2) \iff e^y = x - 2 \iff x = e^y + 2 \iff h^{-1}(y) = e^y + 2$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , ή

$$\boxed{h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

#### 3<sup>ος</sup> τρόπος

Μπορούμε επίσης, να λύσουμε την εξίσωση:  $y = h(x)$  ως προς  $x$  με ισοδυναμίες και να αποδείξουμε ότι αυτή έχει μοναδική λύση.

Άρα, έχουμε αποδείξει με τον τρόπο αυτό ότι η συνάρτηση  $h$  είναι 1-1 και ταυτόχρονα βρίσκουμε και την αντίστροφή της!

### Ερώτημα Β3.

Θα υπολογίσουμε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$ .

1<sup>ος</sup> τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( h(x) \cdot \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \right)$$

αφού  $f(2) = 2 \ln(2-1) = 2 \ln 1 = 2 \cdot 0 = 0 \implies f(2) = 0$ .

$$\text{Όμως, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'_+(2).$$

Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$ , άρα και στο 2, με:

$$f'(x) = (2 \ln(x-1))' = 2(\ln(x-1))' = \frac{2}{x-1} (x-1)' = \frac{2}{x-1},$$

οπότε  $f'(2) = \frac{2}{2-1} = 2 \implies f'_+(2) = 2$ .

Επίσης,  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = -\infty$  από προηγούμενο ερώτημα. Δηλαδή,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$ .

Τελικά:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = (-\infty) \cdot 2 = -\infty,$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = -\infty.$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

Θα υπολογίσουμε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$ .

$$\text{Όμως, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{(DLH)}}{=}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2, \text{ ή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \quad (\text{θέτω } x-2 = u, \text{ όταν } x \rightarrow 2^+ \implies u \rightarrow 0^+).$$

Τελικά:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = -\infty,$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = -\infty.$$

## Θέμα Γ

### Ερώτημα Γ1.

Είναι  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$ ,  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ .

- Αφού η  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ,  $l \in \mathbb{R}$ .

Δηλαδή, εάν  $\kappa \neq 0$  τότε θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \kappa \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \begin{cases} +\infty, & \kappa > 0 \\ -\infty, & \kappa < 0 \end{cases}$$

και στις δύο περιπτώσεις  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty \notin \mathbb{R}$ .

Κατά συνέπεια, πρέπει  $\kappa = 0$  για να έχουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ ,  $l \in \mathbb{R}$ .

Για  $\kappa = 0$ , έχουμε  $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $\mu \in \mathbb{R}$ . Τότε,  $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu \cdot \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu \cdot \frac{x}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu \cdot \frac{1}{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \mu \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = \mu \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Συνεπώς, δεν χρειάζονται περιπτώσεις για το  $\mu$ .

- Αφού η  $C_f$  εφάπτεται στην  $y = x$  στο  $O(0, 0)$ , τότε  $f'(0) = 1$ .

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής ως ρητή και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(\mu x)'(x^2 + 1) - \mu x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2},$$

$$\text{οπότε } f'(0) = 1 \iff \frac{\mu - 0}{1} = 1 \iff \mu = 1.$$

Τελικά,  $\kappa = 0$  και  $\mu = 1$ , οπότε  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Πράγματι, για τις τιμές αυτές  $\kappa=0$  και  $\mu=1$ , η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί και τους δύο περιορισμούς.

### Ερώτημα Γ2.

#### ι) Μονοτονία και ακρότατα

Η  $f$  είναι συνεχής ως ρητή και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της  $f'$ :

- $f'(x) = 0 \iff \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff |x| = 1.$

$$\bullet f'(x) > 0 \iff \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \stackrel{(x^2+1)^2 > 0}{\iff} 1-x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1.$$

$$\bullet f'(x) < 0 \iff \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \stackrel{(x^2+1)^2 > 0}{\iff} 1-x^2 < 0 \iff x^2 > 1 \iff x > 1 \text{ ή } x < -1.$$

Συνεπώς, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'$		$-$	$+$	$-$
$f$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\searrow$

Άρα, η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, -1]$  και στο  $[1, +\infty)$ , ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο  $[-1, 1]$ .

Παρουσιάζει δε στη θέση  $x = -1$  τοπικό ελάχιστο  $f(-1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$  και στη θέση  $x = 1$  τοπικό μέγιστο  $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ .

#### υ) Σύνολο τιμών και πλήθος ριζών

Είναι  $A_1 = (-\infty, -1]$ :

$$f(A_1) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } A_1}{f \downarrow \text{ στο } A_1} [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)].$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα  $f(A_1) = [-\frac{1}{2}, 0)$ .

Είναι  $A_2 = [-1, 1]$ , άρα:

$$f(A_2) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } A_2}{f \uparrow \text{ στο } A_2} [f(-1), f(1)] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Είναι  $A_3 = [1, +\infty)$ , άρα:

$$f(A_3) \stackrel{f \text{ συνεχής στο } A_3}{f \downarrow \text{ στο } A_3} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right) = \left( 0, \frac{1}{2} \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

Τελικά:

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \\ &= [-\frac{1}{2}, 0) \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}] = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \end{aligned}$$

$$\text{ή } f(\mathbb{R}) = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Ουσιαστικά, τα ακρότατα που βρήκαμε πιο πάνω στο ερώτημα, είναι ολικά!

Θα βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = a^2 + \frac{1}{2}$  για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .

Είναι  $a^2 \geq 0 \iff a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ . Επίσης,  $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$  αφού  $f(\mathbb{R}) = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ .

Άρα  $a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ , με την ισότητα να ισχύει για  $a = 0$ .

- Αν  $a = 0$ :  $f(x) = \frac{1}{2} \iff x = 1$  (θέση ακρότατου). Άρα **μία ρίζα**,  $x = 1$ .
- Αν  $a \neq 0$ :  $a^2 > 0 \iff a^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ , οπότε η εξίσωση  $f(x) = a^2 + \frac{1}{2}$  είναι αδύνατη (εκτός συνόλου τιμών). Συνεπώς, **καμία ρίζα**.

### Ερώτημα Γ3.

Έχουμε:  $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$ .

ι)

$$I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx.$$

Άρα:

$$\begin{aligned} I_\nu + I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu}(x+x^3)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu} \cdot x(1+x^2)}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \int_0^1 \left( \frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right)' dx = \left[ \frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - 0 = \frac{1}{2\nu+2}, \quad \nu \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Άρα,  $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .

ii)

Είναι για  $\nu = 0$  (αφού  $\nu \in \mathbb{N}$ ):

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln(x^2+1))' dx \\ &= \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln(1+1) - \ln(0+1)) = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Άρα,  $I_0 = \frac{\ln 2}{2}$ .

Από σχέση στο ερώτημα i) έχουμε  $I_0 + I_1 = \frac{1}{2 \cdot 0 + 2} = \frac{1}{2}$  για  $\nu = 0$ , οπότε:

$$I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

Από τη σχέση  $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$  για  $\nu = 1$ :

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \iff I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2 - 2\ln 2}{4} = \frac{1 - (2 - 2\ln 2)}{4} = \frac{1 - 2 + 2\ln 2}{4} = \frac{2\ln 2 - 1}{4}.$$

$$I_2 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}.$$

## Θέμα Δ

### Ερώτημα Δ1.

Απόδειξη. Είναι:

- $0 < g(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ,
- $g'(x) \neq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Θεωρώ συνάρτηση  $h(x) = g(x) + x, x \in [-1, 0]$ .

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0]$  ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

- $h(-1) = g(-1) + (-1) = g(-1) - 1 < 0$ , αφού  $0 < g(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , άρα και για  $x = -1$ :  $0 < g(-1) < 1 \implies g(-1) - 1 < 0$ .
- $h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$ , διότι  $0 < g(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , άρα και για  $x = 0, g(0) > 0$ .

Συνεπώς, πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_1 \in (-1, 0)$ :  $h(x_1) = 0, \implies g(x_1) + x_1 = 0$ .

### Μοναδικότητα της ρίζας $x_1$

#### 1<sup>ος</sup> τρόπος

Απόδειξη. Έστω ότι η  $h$  έχει και άλλη ρίζα στο  $(-1, 0)$  με  $x_1 \neq x_2, x_2$  η δεύτερη ρίζα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορώ να υποθέσω ότι  $x_1 < x_2$ . Οπότε η  $h$  συνεχής στο  $[x_1, x_2]$ , η  $h$  παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$  με,  $h(x_1) = h(x_2) = 0$ . Από Θ.Rolle:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-1, 0) : h'(\xi) = 0.$$

Αλλά  $h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1$ , κατά συνέπεια:

$$h'(\xi) = 0 \iff g'(\xi) + 1 = 0 \iff g'(\xi) = -1.$$

Άτοπο, αφού  $g'(x) \neq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ . ■

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Απόδειξη. Έχουμε αποδείξει ότι η εξίσωση  $g(x) + x = 0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο  $(-1, 0)$ . Είναι  $h(x) = g(x) + x$  η οποία συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$  αφού  $g'(x) \neq -1$  (εξ' υποθέσεως). Η  $h'$  είναι συνεχής αφού  $g'$  συνεχής εξ' υποθέσεως, και  $h'(x) \neq 0$ , οπότε από συνέπειες θεωρήματος Bolzano η  $h'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $[-1, 0]$ . Δηλαδή,  $h'(x) > 0 \forall x \in [-1, 0]$  ή  $h'(x) < 0 \forall x \in [-1, 0]$ . Δηλαδή η  $h$  είναι γνησίως μονότονη στο  $[-1, 0]$ , οπότε το  $x_1$  μοναδικό. ■

### Ερώτημα Δ2.

Έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Αφού η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, \frac{\pi}{2})$ , τότε παραγωγίσιμη και στο 0. Δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [(g(x) + x) \cdot x] = g(0) \cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\phi x}{x} - \kappa \right). \quad (1)$$

Πιο απλά:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon\phi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot 1 = 1.$

Από σχέση (1):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\phi x}{x} - \kappa \right) = 2 \cdot 1 + 1 - \kappa = 3 - \kappa.$$

Αφού τα όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τότε, θα έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \iff 0 = 3 - \kappa \iff \kappa = 3.$

### Ερώτημα Δ3.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

ι)  $f(x) \geq 0$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Είναι  $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , με  $\kappa = 3$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  με:

$$f'(x) = (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Εξετάζω τον αριθμητή:  $2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1$ .

Αναπτύσσω:  $-3\sigma\upsilon\nu^2 x = -2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$ , οπότε:

$$\begin{aligned} 2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 &= 2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x) \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x - 1)(1 + \sigma\upsilon\nu x) \\ &= (\sigma\upsilon\nu x - 1)[2\sigma\upsilon\nu^2 x - (1 + \sigma\upsilon\nu x)] \\ &= (\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1). \end{aligned}$$

Παραγοντοποιώ  $2\sigma\upsilon\nu^2x - \sigma\upsilon\nu x - 1$ :

$$\begin{aligned} 2\sigma\upsilon\nu^2x - \sigma\upsilon\nu x - 1 &= 2\sigma\upsilon\nu^2x - 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x - 1 \\ &= 2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (\sigma\upsilon\nu x - 1) \\ &= (\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1). \end{aligned}$$

Άρα:

$$f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2x} \geq 0,$$

διότι:

- $\sigma\upsilon\nu x \leq 1 \iff \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0$ , αλλά  $(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \geq 0$ ,
- $2\sigma\upsilon\nu x + 1 > 0$ ,  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$  αφού  $\sigma\upsilon\nu x > 0$ ,
- $\sigma\upsilon\nu^2x > 0$ .

Να επισημανθεί εδώ ότι, μπορούμε να κάνουμε χρήση σχήματος Horner, γνωστό από Άλγεβρα Β' Λυκείου, για ταχύτερη ίσως παραγοντοποίηση και πάλι προφανώς θα καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα!

Τελικά,  $f'(x) \geq 0$  με την ισότητα να ισχύει μόνο για  $x = 0$ . Άρα, η  $f \nearrow$  στο  $[0, \frac{\pi}{2})$ , οπότε για  $x \geq 0$ :

$$f(x) \geq f(0) = 0 \implies f(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}).$$

**ι) Η εξίσωση  $3f(x) = \pi$  έχει ακριβώς μία ρίζα  $x_2$**

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση  $3f(x) = \pi \iff f(x) = \frac{\pi}{3}$  έχει ακριβώς μία ρίζα, έστω  $x_2$  η ρίζα αυτή.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της  $f$ :

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{f \uparrow \text{ στο } [0, \frac{\pi}{2})} \left[ f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right).$$

$$f(0) = 2\eta\mu 0 + \epsilon\phi 0 - 3 \cdot 0 = 0 \implies f(0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x).$$

Υπολογίζω  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \epsilon\phi x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ . Όμως  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$  κι  $\sigma\upsilon\nu x > 0$  κοντά στο  $\frac{\pi}{2}^-$ ,

άρα από γνωστή ιδιότητα  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$ . Οπότε  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}) = +\infty$ .

Από σχέση  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = +\infty$ .

Άρα,  $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$ .

Δηλαδή,  $\frac{\pi}{3} \in [0, +\infty) \implies$  υπάρχει  $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$ :  $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ , και επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα από

**Δ3 ι) ερώτημα, το  $x_2$  μοναδικό.**

Άρα, η εξίσωση  $3f(x) = \pi$  έχει μοναδική ρίζα  $x_2$ :  $3f(x_2) = \pi$ , με  $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$ .

#### Ερώτημα Δ4.

Θα αποδείξουμε ότι:

ι)  $f(x) \geq 0$  στο  $[x_1, 0]$

1<sup>ος</sup> τρόπος

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι  $f(x) \geq 0$  στο  $[x_1, 0]$ , ή  $x^2(g(x) + x) \geq 0$ . Αλλά,  $x^2 \geq 0 \forall x \in [x_1, 0]$ .

Πρέπει,  $x^2$  και  $g(x) + x$  να είναι **ομόσημοι όροι**.

Η συνάρτηση  $h(x) = g(x) + x$  από Δ1 είναι  $h(x) \neq 0 \forall x \in (x_1, 0)$  αφού έχει μοναδική ρίζα το  $x_1$ . Η  $h$  είναι συνεχής στο  $(x_1, 0]$  και δεν μηδενίζεται στο  $(x_1, 0]$ . Από συνέπειες Θεωρήματος Bolzano, η εν λόγω συνάρτηση διατηρεί πρόσημο. Δηλαδή,  $h(x) > 0 \forall x \in (x_1, 0]$  ή  $h(x) < 0 \forall x \in (x_1, 0]$ .

Όμως  $h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$  αφού  $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Οπότε  $h(0) = g(0) > 0$ , δηλαδή η  $h(x) > 0$  στο  $(x_1, 0]$ , ή  $h(x) \geq 0 \forall x \in [x_1, 0]$ .

Τελικά,  $x^2(g(x) + x) \geq 0 \forall x \in [x_1, 0]$ , ή

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, 0].$$

■

2<sup>ος</sup> τρόπος

Απόδειξη. Από Δ1 ερώτημα, έχουμε θέσει  $h(x) = g(x) + x$  στο  $[-1, 0]$ . Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[-1, 0]$  ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 0)$ , από Θ.Μ.Τ. (Διαφορικού Λογισμού) υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (-1, 0)$ :

$$h'(\xi) = \frac{h(0) - h(-1)}{0 - (-1)} = \frac{h(0) - h(-1)}{1} = g(0) - (g(-1) - 1).$$

Αφού  $0 < g(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , κι για  $x = 0$ :  $g(0) > 0$ , ομοίως για  $x = -1$ :  $g(-1) < 1 \iff 1 - g(-1) > 0$ .

Τελικά,  $h'(\xi) > 0$  και επειδή η  $h'$  διατηρεί πρόσημο στο  $[-1, 0]$ , τότε  $h'(x) > 0 \forall x \in [-1, 0]$ , δηλαδή η  $h \uparrow$  στο  $[-1, 0]$ . Οπότε  $-1 \leq x_1 \leq x \leq 0 \xrightarrow{h \uparrow} h(x_1) \leq h(x) \leq h(0)$ . Αφού  $g(x_1) + x_1 = 0$  (Δ1 ερώτημα) και  $h(0) = g(0) > 0$ , τότε  $0 \leq h(x) \leq g(0) \implies h(x) \geq 0$ , δηλαδή  $g(x) + x \geq 0$  στο  $[x_1, 0]$ .

Τελικά,  $f(x) = x^2(g(x) + x) \geq 0 \forall x \in [x_1, 0]$ .

■

ii) Εύρεση του ολοκληρώματος

Είναι  $E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 |f(x)| dx$ , όμως από ερώτημα Δ4 i) είναι  $f(x) \geq 0$  στο  $[x_1, 0]$ , οπότε  $|f(x)| = f(x)$ .

Από ερώτημα Δ3 ii) έχουμε  $3f(x_2) = \pi \iff f(x_2) = \frac{\pi}{3}$  (αριθμός).

$$\text{Άρα, } E(\Omega) = \int_{x_1}^{\pi/3} |f(x)| dx.$$

$$\text{Είναι } E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 |f(x)| dx \stackrel{\Delta 4i}{\underset{f(x) \geq 0}{[x_1, 0]}} \int_{x_1}^0 f(x) dx.$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 f(x) dx &= \int_{x_1}^0 x^2(g(x) + x) dx = \int_{x_1}^0 (x^2g(x) + x^3) dx \\ &= \int_{x_1}^0 x^2g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \int_{x_1}^0 x^2g(x) dx + \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 \\ &= \int_{x_1}^0 x^2g(x) dx + \left( \frac{0}{4} - \frac{x_1^4}{4} \right) = \int_{x_1}^0 x^2g(x) dx - \frac{x_1^4}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά, } E(\Omega_1) = \int_{x_1}^0 x^2g(x) dx - \frac{x_1^4}{4}. \quad (1)$$

$$E(\Omega_2) = \int_0^{\pi/3} |f(x)| dx \stackrel{\Delta 3i}{\underset{f(x) \geq 0}{[0, \pi/3]}} \int_0^{\pi/3} f(x) dx = \int_0^{\pi/3} (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x) dx.$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/3} 2\eta\mu x dx + \int_0^{\pi/3} \varepsilon\phi x dx - \int_0^{\pi/3} 3x dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/3} (-\sigma\nu\nu x)' dx + \int_0^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{\sigma\nu\nu x} dx - 3 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/3} \\ &= 2[-\sigma\nu\nu x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{(\sigma\nu\nu x)'}{\sigma\nu\nu x} dx - 3 \cdot \frac{(\pi/3)^2}{2} \\ &= 2\left(-\sigma\nu\nu \frac{\pi}{3} - (-\sigma\nu\nu 0)\right) - [\ln(\sigma\nu\nu x)]_0^{\pi/3} - \frac{\pi^2/9}{2} \cdot 3 \\ &= 2\left(-\frac{1}{2} + 1\right) - \left(\ln \sigma\nu\nu \frac{\pi}{3} - \ln \sigma\nu\nu 0\right) - \frac{\pi^2}{6} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\ln \frac{1}{2} - 0\right) - \frac{\pi^2}{6} \\ &= 1 - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} \\ &= 1 - (\ln 1 - \ln 2) - \frac{\pi^2}{6} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Δηλαδή, } E(\Omega_2) = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}. \quad (2)$$

Πρέπει όμως βάσει υπόθεσης  $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$ , δηλαδή:

$$\int_{x_1}^0 x^2g(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}. \quad (3)$$

Το ζητούμενο γράφεται:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^3g'(x) dx &= \int_{x_1}^0 g'(x)x^3 dx = [g(x) \cdot x^3]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 g(x)(x^3)' dx \\ &= g(0) \cdot 0^3 - g(x_1) \cdot x_1^3 - \int_{x_1}^0 3x^2g(x) dx \\ &= -g(x_1) \cdot x_1^3 - 3 \int_{x_1}^0 x^2g(x) dx. \end{aligned}$$

Αφού  $g(x_1) + x_1 = 0$  (Δ1 ερώτημα)  $\implies g(x_1) = -x_1$ :

$$= -(-x_1)x_1^3 - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx. \quad (4)$$

Από (3) σχέση έχουμε:  $\int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$ , οπότε:

$$3 \int_{x_1}^0 x^2 g(x) dx = \frac{3x_1^4}{4} + 3 + 3 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2}.$$

Από (4) σχέση έχουμε:

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = x_1^4 - \frac{3x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3.$$

$$\boxed{\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3.}$$

Κατά συνέπεια, αποδείχθηκε το ζητούμενο.