

## ΜΕΡΟΣ Α

### Άσκηση Α1

Θα υπολογίσουμε το  $\int \frac{\tauοξημx}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

α) 1ος τρόπος (παραγοντική ολοκλήρωση)

$$\begin{aligned} \int \frac{\tauοξημx}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \tauοξημx dx = \int (\tauοξημx)' \cdot \tauοξημx dx \\ &= (\tauοξημx)^2 - \int \tauοξημx \cdot (\tauοξημx)' dx = (\tauοξημx)^2 - \int \tauοξημx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + c. \end{aligned}$$

Άρα, αν  $I = \int \frac{\tauοξημx}{\sqrt{1-x^2}} dx$  τότε έχουμε:

$$2I = (\tauοξημx)^2 \Rightarrow I = \frac{(\tauοξημx)^2}{2} = \frac{1}{2}(\tauοξημx)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

β) 2ος τρόπος (αντικατάσταση)

Θέτω  $u = \tauοξημx$ , οπότε  $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

Άρα,

$$\int \frac{\tauοξημx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2}(\tauοξημx)^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

### Άσκηση Α2

Η  $f$  παρουσιάζει στη θέση  $x_0 = 2$  τοπικό ακρότατο, με  $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta$ .

α) Αφού το  $x_0 = 2$  είναι εσωτερικό του  $D_f$  και η  $f$  παραγωγίσιμη, από το Θεώρημα Fermat ισχύει  $f'(2) = 0$ .

$$f'(x) = (x^3 + ax^2 + \beta)' = 3x^2 + 2ax.$$

Άρα

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot a \cdot 2 = 0 \Rightarrow 12 + 4a = 0 \Rightarrow 4a = -12 \Rightarrow \boxed{a = -3}.$$

Επίσης  $f(2) = -1$ :

$$2^3 + (-3) \cdot 2^2 + \beta = -1 \Rightarrow 8 - 12 + \beta = -1 \Rightarrow -4 + \beta = -1 \Rightarrow \boxed{\beta = 3}.$$

Για  $a = -3$ ,  $\beta = 3$  είναι  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ .

Η  $f$  παραγωγίζεται ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2, \quad f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty), \quad f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 2).$$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Στη θέση  $x_0 = 2$  η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

β) Η  $f'$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = 6x - 6.$$

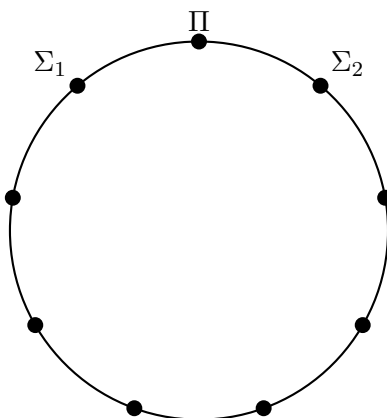
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1, \quad f''(x) > 0 \Rightarrow x > 1, \quad f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1.$$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$\curvearrowright$ Σ.Κ. $\curvearrowleft$	

Η  $f$  παρουσιάζει στη θέση  $x_0 = 1$  σημείο καμπής το  $f(1) = 1$ .

### Άσκηση Α3

Έχουμε 9 σύνεδροι, 2 σύμβουλοι ( $\Sigma_1, \Sigma_2$ ) και 1 πρόεδρος ( $\Pi$ ), σε κυκλικό τραπέζι.



Η θέση των συμβούλων  $\Sigma_1, \Sigma_2$  (γειτονικά) καλύπτεται με 2 τρόπους,  $(\Sigma_1, \Sigma_2)$  ή  $(\Sigma_2, \Sigma_1)$ . Οι υπόλοιπες  $6 + 1 = 7$  θέσεις στο τραπέζι καλύπτονται με  $(7 - 1)! = 6!$  τρόπους (αφού έχουμε κυκλική μετάθεση 7 θέσεων, σύμβουλοι και πρόεδρος αντιμετωπίζονται ως μία θέση).

Συνεπώς, οι εννέα σύνεδροι μπορούν να τοποθετηθούν συνολικά με

$$2 \cdot 6! = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 1440 \text{ τρόπους.}$$

### Άσκηση Α4

α) Είναι

$$\frac{1}{k^2 + 9k + 20} = \frac{1}{(k + 5)(k + 4)} = \frac{A}{k + 5} + \frac{B}{k + 4}.$$

$$\text{Με } \Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1 > 0 \text{ προκύπτουν οι ρίζες } k_{1,2} = \frac{-9 \pm 1}{2} = \begin{cases} -5 \\ -4 \end{cases}.$$

$$\frac{1}{(k+5)(k+4)} = \frac{A(k+4) + B(k+5)}{(k+5)(k+4)} \Rightarrow 1 = A(k+4) + B(k+5).$$

$$1 = (A+B)k + 4A + 5B \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4A+5B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A-5A=1 \end{cases} \Rightarrow A=-1, B=1.$$

Τελικά,

$$\frac{1}{k^2+9k+20} = \frac{-1}{k+5} + \frac{1}{k+4} = \frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5}.$$

β)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+9k+20} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5} \right) = \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \dots = \frac{1}{5}.$$

γ)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+9x+23}{x^2+9x+20} dx &= \int \frac{x^2+9x+20+3}{x^2+9x+20} dx = \int \left( 1 + \frac{3}{x^2+9x+20} \right) dx \\ &= \int (x)' dx + 3 \int \frac{1}{x^2+9x+20} dx \stackrel{(\alpha)}{=} x + 3 \int \left( \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} \right) dx \\ &= x + 3 \left( \ln|x+4| - \ln|x+5| \right) + c = x + 3 \ln|x+4| - 3 \ln|x+5| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### Άσκηση Α5

Δίνεται η εξίσωση  $e^x - xe^x = \ln x + \lambda$ ,  $x > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Θα δείξουμε ότι έχει το πολύ μία ρίζα στο  $(0, +\infty)$ .

Είναι

$$e^x - xe^x = \ln x + \lambda \Leftrightarrow (1-x)e^x - \ln x - \lambda = 0.$$

Θεωρώ τη συνάρτηση  $f(x) = (1-x)e^x - \ln x - \lambda$ ,  $x > 0$

Έστω ότι η  $f$  έχει δύο ρίζες  $\rho_1 \neq \rho_2$  στο  $(0, +\infty)$ .

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να υποθέσω ότι:  $0 < \rho_1 < \rho_2$  (όμοια αν  $\rho_1 > \rho_2 > 0$ ).

- Η  $f$  συνεχής στο  $[\rho_1, \rho_2]$  (πράξεις συνεχών).
- Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(\rho_1, \rho_2)$ .
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$  αφού είναι ρίζες.

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει  $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, +\infty)$  με  $f'(\xi) = 0$ . Όμως,

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(1-x)e^x - \ln x + \lambda]' = (1-x)'e^x + (1-x)(e^x)' - \frac{1}{x} = -e^x + (1-x)e^x - \frac{1}{x} \\ &= e^x(1-x-1) - \frac{1}{x} = -xe^x - \frac{1}{x} < 0 \quad \text{για κάθε } x > 0, \end{aligned}$$

δηλαδή  $f'(\xi) \neq 0$ : ΑΤΟΠΟ.

Συνεπώς, η  $f$  έχει το πολύ μία ρίζα στο  $(0, +\infty)$ .

**Άσκηση Α6**

α) Είναι ο κύκλος  $C : x^2 + y^2 = 4$  με κέντρο  $K = O(0, 0)$  και  $\rho = 2$ , και η παραβολή  $y^2 = 2 \cdot 4x$  με  $p = 4 > 0$ . Η εστία είναι

$$E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = \left(\frac{4}{2}, 0\right) = (2, 0),$$

και η διευθετούσα ( $\delta$ ) :  $x = -\frac{p}{2} = -2$ .

β) Έστω  $N(2\sigma\upsilon\nu\vartheta, 2\eta\mu\vartheta)$ ,  $\vartheta \in (0, 2\pi)$ , σημείο του  $C$  και  $E(2, 0)$ . Το μέσο  $\Sigma(x_\Sigma, y_\Sigma)$  του  $EN$  έχει

$$x_\Sigma = \frac{x_E + x_N}{2} = \frac{2 + 2\sigma\upsilon\nu\vartheta}{2} = 1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta, \quad y_\Sigma = \frac{y_E + y_N}{2} = \frac{0 + 2\eta\mu\vartheta}{2} = \eta\mu\vartheta.$$

Αν  $\Sigma(x_\Sigma, y_\Sigma)$  σημείο του γεωμετρικού τόπου, τότε

$$\begin{cases} x_\Sigma = 1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\vartheta = x_\Sigma - 1 \\ y_\Sigma = \eta\mu\vartheta \end{cases} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\vartheta + \eta\mu^2\vartheta = (x_\Sigma - 1)^2 + y_\Sigma^2 = 1,$$

δηλαδή  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ : κύκλος  $C_1$  με κέντρο  $K_1(1, 0)$  και  $\rho_1 = 1$ .

γ) Είναι

$$d(O, K_1) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 1 \Rightarrow d(O, K_1) = 1.$$

Επειδή  $\rho - \rho_1 = 2 - 1 = 1$  και  $d(O, K_1) = 1 = \rho - \rho_1$ , οι κύκλοι  $C_1$  και  $C$  εφάπτονται εσωτερικά.

**Άσκηση Α7**

α) Αφού  $X, \Psi$  ανεξάρτητα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου, ισχύει

$$P(X \cap \Psi) = P(X) \cdot P(\Psi). \quad (1)$$

Σύμφωνα με το νόμο De Morgan  $(X \cup \Psi)' = X' \cap \Psi'$ , οπότε

$$P(X' \cap \Psi') = P((X \cup \Psi)') = 1 - P(X \cup \Psi) = 1 - (P(X) + P(\Psi) - P(X \cap \Psi))$$

$$= 1 - P(X) - P(\Psi) + P(X)P(\Psi) = 1 - P(\Psi) - P(X)(1 - P(\Psi)) = (1 - P(\Psi))(1 - P(X)),$$

δηλαδή  $P(X' \cap \Psi') = P(X') \cdot P(\Psi')$ .

β) Δίνεται  $P(A) = 3P(A')$  και  $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$ . Θα εξετάσουμε αν τα  $A, B$  είναι ανεξάρτητα.

Από  $P(A) + P(A') = 1$  και  $P(A) = 3P(A')$ :

$$P(A) = 3(1 - P(A)) \Rightarrow 4P(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}. \quad (3)$$

Από  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{8} = \frac{6 + 4 - 7}{8} = \frac{3}{8}. \quad (2)$$

Επίσης  $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ . Άρα  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , δηλαδή τα  $A, B$  είναι ανεξάρτητα.

Υπολογίζουμε (με βάση το α) ότι, αφού  $A, B$  ανεξάρτητα, τα  $A', B'$  είναι ανεξάρτητα:

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

**Άσκηση Α8**

Είναι  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{τοξεφ}x + c, c \in \mathbb{R}$ .

α) Θα αποδείξουμε ότι  $\text{τοξεφ}x > 1 - e^x$  για κάθε  $x > 0$ , δηλαδή  $\text{τοξεφ}x + e^x - 1 > 0$ .

Θεωρώ τη συνάρτηση  $g(x) = \text{τοξεφ}x + e^x - 1, x \in [0, +\infty)$ . Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  (πράξεις συνεχών) και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$g'(x) = (\text{τοξεφ}x + e^x - 1)' = \frac{1}{1+x^2} + e^x > 0 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ . Για  $x > 0$ :

$$g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow \text{τοξεφ}x + e^x - 1 > 0 \Rightarrow \text{τοξεφ}x > 1 - e^x.$$

β)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξεφ}x + e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{(DLH)}}{\lim_{x \rightarrow 0}}} \frac{(\text{τοξεφ}x + e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} + e^x}{1} = 2.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξεφ}x + e^x - 1}{x} = 2.$$

**Άσκηση Α9**

α) Έστω  $\int e^{-x}(f''(x) - f(x)) dx$ . Τότε:

$$\begin{aligned} \int e^{-x}(f''(x) - f(x)) dx &= \int e^{-x} f''(x) dx - \int e^{-x} f(x) dx \\ &= \int (f'(x))' e^{-x} dx - \int e^{-x} f(x) dx = \end{aligned}$$

$$= f'(x) e^{-x} - \int f'(x) (e^{-x})' dx - \int e^{-x} f(x) dx$$

$$= f'(x) e^{-x} + \int f'(x) e^{-x} dx - \int e^{-x} f(x) dx =$$

$$= f'(x) e^{-x} + f(x) e^{-x} - \int f(x) (e^{-x})' dx - \int e^{-x} f(x) dx$$

$$= e^{-x}(f'(x) + f(x)) + \int f(x) e^{-x} dx - \int e^{-x} f(x) dx$$

$$= e^{-x}(f'(x) + f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Άρα,

$$\int e^{-x}(f''(x) - f(x)) dx = e^{-x}(f'(x) + f(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

β)

$$\int e^{-x} \left( -\frac{1}{x} + x \ln x \right) dx = - \int e^{-x} \left( \frac{1}{x} - x \ln x \right) dx. \quad (1)$$

Θεωρώ  $f(x) = x \ln x$ ,  $x > 0$ . Τότε

$$f'(x) = (x \ln x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1,$$

και η  $f'$  παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$$f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}.$$

Από την (1) και το α) ερώτημα,

$$\begin{aligned} - \int e^{-x} \left( \frac{1}{x} - x \ln x \right) dx &= - \int e^{-x} (f''(x) - f(x)) dx = -e^{-x} (\ln x + 1 + x \ln x) + c \\ &= -e^{-x} ((x+1) \ln x + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\int e^{-x} \left( -\frac{1}{x} + x \ln x \right) dx = -e^{-x} [(x+1) \ln x + 1] + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

## Άσκηση A10

α) Θα υπολογίσουμε το  $\int_0^2 \sqrt{8-x^2} dx$ .

Θέτω  $x = 2\sqrt{2} \eta\mu\vartheta$  με  $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , οπότε  $dx = 2\sqrt{2} \sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta$ .

**Μεταβολή ορίων:**

- $x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \eta\mu\vartheta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\vartheta = 0 \Leftrightarrow \vartheta = 0$  αφού  $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .
- $x = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \eta\mu\vartheta = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \eta\mu\vartheta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \eta\mu\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\Rightarrow \eta\mu\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \vartheta = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \vartheta = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Εύρεση  $k$ :**

Για τον κλάδο  $\vartheta = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$0 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq 2k\pi \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq 2k \leq 0.$$

Αφού  $k \in \mathbb{Z}$  και  $-\frac{1}{8} \leq k \leq 0$ , συμπεραίνουμε  $k = 0$ .

Για τον κλάδο  $\vartheta = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$0 \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq 2k\pi \leq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq k \leq -\frac{1}{4}.$$

Δεν υπάρχει  $k \in \mathbb{Z}$  στο  $[-\frac{3}{8}, -\frac{1}{4}]$ .

Τελικά,  $\vartheta = \frac{\pi}{4}$  (για  $k = 0$ ).

Άρα

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{8-x^2} dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{8-8\eta\mu^2\vartheta} 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta = \int_0^{\pi/4} 2\sqrt{2}\sqrt{1-\eta\mu^2\vartheta} 2\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta \\ &= 8 \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta} \sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta \stackrel{\sigma\upsilon\nu\vartheta > 0}{=} 8 \int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2\vartheta d\vartheta = 8 \int_0^{\pi/4} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\vartheta}{2} d\vartheta \\ &= 4 \int_0^{\pi/4} (1+\sigma\upsilon\nu 2\vartheta) d\vartheta = 4 \left[ \vartheta + \frac{\eta\mu 2\vartheta}{2} \right]_0^{\pi/4} = 4 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\eta\mu \frac{\pi}{2}}{2} - 0 \right) = 4 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \pi + 2. \end{aligned}$$

Άρα  $\int_0^2 \sqrt{8-x^2} dx = \pi + 2$ .

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^2 |\sqrt{8-x^2} - (x^3+4)| dx.$$

Αφού,  $x^3+4 > \sqrt{8-x^2}$  στο  $[0, 2]$ , (βασικές συναρτήσεις, όπου  $x^3+4$  είναι πάνω από τη  $\sqrt{8-x^2}$  στο εν λόγω διάστημα).

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 (x^3+4 - \sqrt{8-x^2}) dx = \int_0^2 (x^3+4) dx - \int_0^2 \sqrt{8-x^2} dx \\ &\stackrel{(\alpha)}{=} \left[ \frac{x^4}{4} + 4x \right]_0^2 - (\pi + 2) = \frac{2^4}{4} + 4 \cdot 2 - (\pi + 2) = 4 + 8 - \pi - 2 = 10 - \pi. \end{aligned}$$

Δηλαδή,  $E(\Omega) = (10 - \pi)$  τ.μ.

## ΜΕΡΟΣ Β

### Άσκηση Β1

Έχουμε τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ .

α) Πρέπει  $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ , άρα  $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Σημεία τομής με άξονες:

- Με τον  $x'$ : θέτω  $y = 0$ , οπότε  $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ . Άρα  $O(0, 0)$ .
- Με τον  $y'$ : θέτω  $x = 0$  (αφού  $0 \in D_f$ ), τότε  $f(0) = \frac{0}{0-1} = 0$ . Άρα  $O(0, 0)$ .

β) Η  $f$  είναι συνεχής στο  $D_f$  ως ρητή και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left( \frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

$$f'(x) > 0 \stackrel{(x-1)^2 > 0}{\iff} x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty), \quad f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 2).$$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$- \parallel -$	$0$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$0$ T.M.	$\searrow \parallel \searrow$	$\frac{4}{1}$ T.E.	$\nearrow$

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στα  $(-\infty, 0]$ ,  $[2, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στα  $[0, 1)$ ,  $(1, 2]$ . Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση  $x = 0$ , το  $f(0) = 0$ , και τοπικό ελάχιστο στη θέση  $x = 2$ , το  $f(2) = \frac{4}{1} = 4$ .

γ) Η  $f'$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  ως ρητή και παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \left( \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[2(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2[(x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x)]}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{(x-1)^3} = 0 \text{ ΑΔΥΝΑΤΟ.}$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow (x-1)^3 > 0 \Rightarrow x > 1, \quad f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1.$$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f''(x)$		$- \parallel +$	
$f(x)$		$\curvearrowright$	$\curvearrowleft$

Άρα η  $f$  είναι κοίλη στο  $(-\infty, 1)$  και κυρτή στο  $(1, +\infty)$ . Σημεία καμπής δεν έχουμε.

δ) Ασύμπτωτες.

• **Κατακόρυφη:** για  $x \rightarrow 1^-$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{1}{x-1} \cdot x^2 \right) = -\infty$  (αφού  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$  με  $x < 1$ , άρα  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ ). Όμοια για  $x \rightarrow 1^+$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ . Συνεπώς η ευθεία  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

• **Οριζόντια:**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty \notin \mathbb{R}$ , άρα δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη.

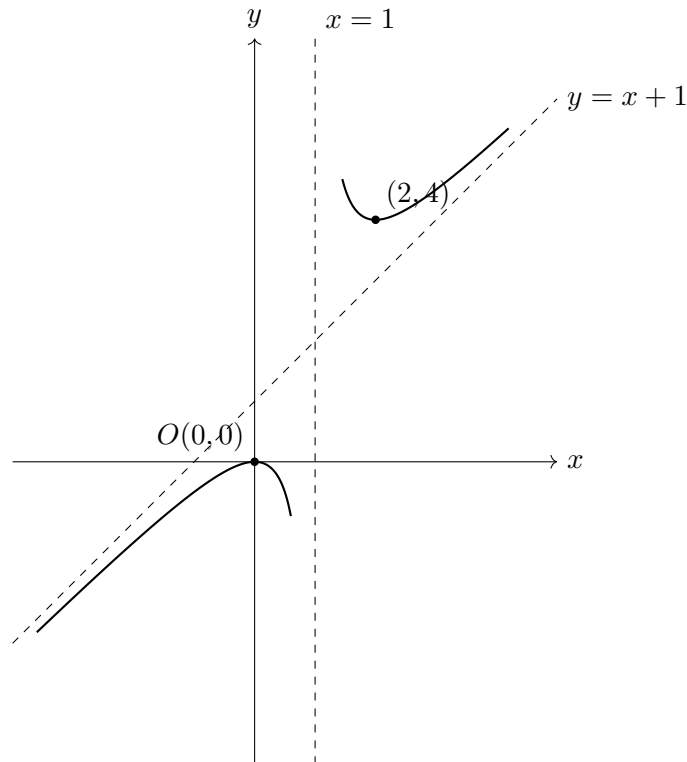
• **Πλάγια:**

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \in \mathbb{R},$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Άρα η  $f$  έχει πλάγια ασύμπτωτη την  $(\varepsilon) : y = x + 1$  καθώς  $x \rightarrow +\infty$  και  $x \rightarrow -\infty$ .

ε) **Γραφική παράσταση.** Σύμφωνα με τα παραπάνω: τοπικό μέγιστο  $O(0, 0)$ , τοπικό ελάχιστο  $(2, 4)$ , κατακόρυφη ασύμπτωτη  $x = 1$ , πλάγια ασύμπτωτη  $y = x + 1$ .



στ) Θα λύσουμε την εξίσωση  $f(x) = k$  για  $k \in \mathbb{R}$  (πλήθος λύσεων ως τομή της  $C_f$  με την  $y = k$ ):

- Αν  $k < 0$ , η εξίσωση  $f(x) = k$  έχει δύο λύσεις.
- Αν  $k = 0$ , η εξίσωση  $f(x) = k$  έχει μοναδική λύση.
- Αν  $0 < k < 4$ , η εξίσωση  $f(x) = k$  είναι αδύνατη.
- Αν  $k = 4$ , η εξίσωση  $f(x) = k$  έχει μοναδική λύση.
- Αν  $k > 4$ , η εξίσωση  $f(x) = k$  έχει δύο λύσεις.

### Άσκηση Β2

Έχουμε  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη, και η ευθεία  $(\varepsilon) : y = 3x - 2$  είναι εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(3, f(3))$ . Οπότε  $f'(3) = 3$  (1).

Είναι  $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ,  $x > -1$ , δηλαδή  $f''(x) = \frac{2}{2\sqrt{x+1}} = (2\sqrt{x+1})'$ . Άρα

$$(f'(x))' = (2\sqrt{x+1})' \stackrel{\Theta.\Sigma.\Pi.\Theta.}{\implies} f'(x) = 2\sqrt{x+1} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Από (1),  $f'(3) = 3$ :

$$f'(3) = 2\sqrt{3+1} + c_1 \Rightarrow 3 = 4 + c_1 \Rightarrow c_1 = -1.$$

Άρα  $f'(x) = 2\sqrt{x+1} - 1$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ . Τότε

$$f'(x) = 2(x+1)^{1/2} - 1 \Rightarrow f(x) = 2 \cdot \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} - x + c = \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Όμως  $A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(3) = 7$  διότι  $f(3) = 3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$

$$\frac{4\sqrt{(3+1)^3}}{3} - 3 + c = 7 \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{4^3}}{3} + c = 10 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 8}{3} + c = 10 \Leftrightarrow \frac{32}{3} + c = 10$$

$$\Leftrightarrow c = 10 - \frac{32}{3} = \frac{30 - 32}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Τελικά,

$$f(x) = \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} - x - \frac{2}{3}, \quad x \in (-1, +\infty).$$

### Άσκηση Β3

Δοχείο με 10 μπάλες: 7 κόκκινες και 3 πράσινες· γίνονται δύο διαδοχικές κληρώσεις, και χωρίς επανατοποθέτηση όταν η πρώτη είναι κόκκινη, ενώ με επανατοποθέτηση όταν η πρώτη είναι πράσινη.

α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

- $K_1$ : η 1η μπάλα κόκκινη,  $\Pi_1$ : η 1η μπάλα πράσινη.
- $K_2$ : η 2η μπάλα κόκκινη,  $\Pi_2$ : η 2η μπάλα πράσινη.

$$\text{Αρχικά } P(K_1) = \frac{7}{10}, \quad P(\Pi_1) = \frac{3}{10}.$$

Με τον Θ.Ο.Π. (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας):

$$P(\Pi_2) = P(K_1) \cdot P(\Pi_2 | K_1) + P(\Pi_1) \cdot P(\Pi_2 | \Pi_1). \quad (1)$$

- Αν η 1η είναι κόκκινη ( $K_1$ ), δεν την επανατοποθετούμε. Άρα μένουν 9 μπάλες, εκ των οποίων οι 3 πράσινες:  $P(\Pi_2 | K_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ .
- Αν η 1η είναι πράσινη ( $\Pi_1$ ), την επανατοποθετούμε. Άρα έχουμε ξανά 10 μπάλες με τις 3 πράσινες:  $P(\Pi_2 | \Pi_1) = \frac{3}{10}$ .

Συνεπώς, από την (1):

$$P(\Pi_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30} + \frac{9}{100} = \frac{70}{300} + \frac{27}{300} = \frac{97}{300}.$$

β) Ζητούμε την πιθανότητα η 1η μπάλα να είναι κόκκινη, δεδομένου ότι η 2η είναι πράσινη. Με τον τύπο Bayes:

$$P(K_1 | \Pi_2) = \frac{P(K_1 \cap \Pi_2)}{P(\Pi_2)} = \frac{P(K_1) \cdot P(\Pi_2 | K_1)}{P(\Pi_2)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{97}{300}} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{97}{300}} = \frac{7 \cdot 300}{30 \cdot 97} = \frac{70}{97}.$$

$$\text{Άρα } P(K_1 | \Pi_2) = \frac{70}{97}.$$

### Άσκηση Β4

Έχουμε την παραβολή  $y^2 = 4x$ , δηλαδή  $y^2 = 2 \cdot 2x$  με  $p = 2 > 0$ , και σημείο  $A(t^2, 2t)$ ,  $t \neq 0$ .

α) Το  $A(t^2, 2t)$  είναι σημείο επαφής της παραβολής με ευθεία ( $\varepsilon$ ). Η εξίσωση εφαπτομένης είναι  $y \cdot 2t = 2(x + t^2)$ , δηλαδή

$$2ty = 2x + 2t^2 \Leftrightarrow ty = x + t^2, \quad (\varepsilon): \quad ty = x + t^2.$$

β) Η ( $\varepsilon$ ) τέμνει τον  $y'y$  στο  $B(0, y_B)$ : θέτω  $x = 0$ ,  $ty = t^2 \stackrel{t \neq 0}{\Rightarrow} y = t$ . Άρα  $B(0, t)$ ,  $t \neq 0$ .

Η ( $\varepsilon$ ) τέμνει τον  $x'x$  στο  $\Gamma(x_\Gamma, 0)$ : θέτω  $y = 0$ ,  $x + t^2 = 0 \Rightarrow x = -t^2$ . Άρα  $\Gamma(-t^2, 0)$ ,  $t \neq 0$ .

Για να είναι το ΒΟΓΔ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, η τέταρτη κορυφή είναι  $\Delta(x_{\Gamma}, y_B) = (-t^2, t)$ . Αν  $\Delta(x_{\Delta}, y_{\Delta})$  σημείο του γεωμετρικού τόπου:

$$\begin{cases} x_{\Delta} = -t^2 \\ y_{\Delta} = t \end{cases} \Rightarrow x_{\Delta} = -y_{\Delta}^2 \Rightarrow y^2 = -x.$$

Άρα το  $\Delta$  κινείται στην παραβολή  $C' : y^2 = -x$ , με εξαίρεση την αρχή  $O(0, 0)$  (αφού  $xy \neq 0$ ,  $t \neq 0$ ).

γ) Είναι  $\Delta(-t^2, t)$  με  $t > 0$ . Η περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα  $y'y$ . Ο όγκος εκ περιστροφής γύρω από τον  $y'y$  δίνεται από τη σχέση  $V = \pi \int_a^b x^2 dy$ .

Όγκος  $V_1$  (περιστροφή χωρίου της  $C' : y^2 = -x \Leftrightarrow x = -y^2$ , για  $0 \leq y \leq t$ ):

$$V_1 = \pi \int_0^t |x|^2 dy = \pi \int_0^t (-y^2)^2 dy = \pi \int_0^t y^4 dy = \pi \int_0^t \left(\frac{y^5}{5}\right)' dy = \pi \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^t = \frac{\pi t^5}{5}.$$

Όγκος  $V_2$ . Για το δεύτερο χωρίο έχουμε την παραβολή  $y^2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}$ , τον άξονα  $y'y$  και την  $(\varepsilon) : ty = x + t^2$ . Το χωρίο ορίζεται στις τιμές  $0 \leq y \leq 2t$ . Ο  $V_2$  ισούται με τον όγκο από την παραβολή μείον τον όγκο από την ευθεία.

Όγκος από την παραβολή ( $0 \leq y \leq 2t$ ):

$$V_C = \pi \int_0^{2t} \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy = \pi \int_0^{2t} \frac{y^4}{16} dy = \frac{\pi}{16} \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{2t} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(2t)^5}{5} = \frac{32\pi t^5}{16 \cdot 5} = \frac{2\pi t^5}{5}.$$

Όγκος από την ευθεία ( $t \leq y \leq 2t$ , όπου  $x = ty - t^2 = t(y - t)$ ):

$$\begin{aligned} V_{\varepsilon} &= \pi \int_t^{2t} (ty - t^2)^2 dy = \pi \int_t^{2t} t^2(y - t)^2 dy = \pi t^2 \int_t^{2t} (y^2 - 2yt + t^2) dy \\ &= \pi t^2 \left[ \frac{y^3}{3} - 2t \frac{y^2}{2} + t^2 y \right]_t^{2t} = \pi t^2 \left( \frac{(2t)^3 - t^3}{3} - t((2t)^2 - t^2) + t^2(2t - t) \right) \\ &= \pi t^2 \left( \frac{7t^3}{3} - 3t^3 + t^3 \right) = \pi t^2 \left( \frac{7t^3}{3} - 2t^3 \right) = \pi t^2 \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{\pi t^5}{3}. \end{aligned}$$

Άρα

$$V_2 = V_C - V_{\varepsilon} = \frac{2\pi t^5}{5} - \frac{\pi t^5}{3} = \frac{6\pi t^5 - 5\pi t^5}{15} = \frac{\pi t^5}{15}.$$

Τελικά,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi t^5}{5}}{\frac{\pi t^5}{15}} = \frac{15}{5} = 3 \Leftrightarrow V_1 = 3V_2.$$

## Άσκηση Β5

Έστω  $(\varepsilon) : y = ax + \beta$  που διέρχεται από το  $K(7, 3)$ , τέμνει τον  $Ox$  στο  $M$  και την ευθεία  $y = x$  στο  $N$ . Για να είναι το εμβαδόν  $(OMN)$  ελάχιστο, πρέπει  $a < 0$  (ώστε να σχηματίζει αμβλεία γωνία  $\eta$   $(\varepsilon)$  με τον  $x'x$ ).

Από  $K(7, 3) \in (\varepsilon) : 3 = 7a + \beta \Rightarrow \beta = 3 - 7a$ . Άρα  $(\varepsilon) : y = ax + (3 - 7a)$  με  $a < 0$ .

**Τομή με  $Ox$  ( $y = 0$ ):**  $ax + (3 - 7a) = 0 \Rightarrow ax = 7a - 3 \Rightarrow x = \frac{7a - 3}{a}$ . Άρα  $M \left( \frac{7a - 3}{a}, 0 \right)$ .

Τομή με  $y = x$ : λύνω το σύστημα  $\begin{cases} y = ax + (3 - 7a) \\ y = x \end{cases}$  :

$$x = ax + 3 - 7a \Rightarrow x - ax = 3 - 7a \Rightarrow (1 - a)x = 3 - 7a \Rightarrow (a - 1)x = 7a - 3. \quad (1)$$

- Αφού  $a < 0$ , τότε:  $x = \frac{7a - 3}{a - 1}$ , δηλαδή  $N\left(\frac{7a - 3}{a - 1}, \frac{7a - 3}{a - 1}\right)$ .

Είναι

$$(OMN) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) \right|, \quad \overrightarrow{ON} = \left(\frac{7a-3}{a-1}, \frac{7a-3}{a-1}\right), \quad \overrightarrow{OM} = \left(\frac{7a-3}{a}, 0\right).$$

$$(OMN) = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \frac{7a-3}{a} & 0 \\ \frac{7a-3}{a-1} & \frac{7a-3}{a-1} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{7a-3}{a} \cdot \frac{7a-3}{a-1} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{(7a-3)^2}{a(a-1)} \quad (a < 0).$$

Θεωρώ τη συνάρτηση  $f(a) = \frac{(7a-3)^2}{2a(a-1)}$ ,  $a < 0$ . Η  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0)$  με

$$f'(a) = \frac{2(7a-3) \cdot 7 \cdot 2a(a-1) - (7a-3)^2(4a-2)}{4(a^2-a)^2} = \frac{(7a-3)[14a(a-1) - (7a-3)(2a-1)]}{2(a^2-a)^2}.$$

Άρα,

$$f'(a) = \frac{(7a-3)(-(a+3))}{2(a^2-a)^2} = \frac{(3-7a)(a+3)}{2(a^2-a)^2}.$$

$$f'(a) = 0 \stackrel{a \leq 0}{\Rightarrow} a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \quad (\text{αφού } 3 - 7a > 0 \text{ για } a < 0).$$

$a$	$-\infty$	$-3$	$0$
$f'(a)$	$-$	$0$	$+$
$f(a)$			

Άρα η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση  $a = -3$ , το

$$f(-3) = \frac{(7(-3) - 3)^2}{2(-3)(-3 - 1)} = \frac{(-24)^2}{2 \cdot (-3) \cdot (-4)} = \frac{576}{24} = 24.$$

Επίσης

$$M\left(\frac{7(-3) - 3}{-3}, 0\right) = \left(\frac{-24}{-3}, 0\right) = (8, 0), \quad N\left(\frac{-24}{-4}, \frac{-24}{-4}\right) = (6, 6).$$

Άρα το ελάχιστο εμβαδόν είναι  $(OMN)_{\min} = 24$  τ.μ., με  $M(8, 0)$  και  $N(6, 6)$ .