ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2026

ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ Β.Κ. ΚΑΙ ΤΩΝ Ε.Ε.Κ.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ» ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 133
Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 51
Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 185
Α4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$D_{f\circ g}=\begin{cases}x\in[2,+\infty)\\ g(x)\in(1,+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ \sqrt{x-2}+1>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ \sqrt{x-2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2\\ x>2\end{cases}$$

άρα $x\in(2,+\infty)$

$$h(x)=f(g(x))=2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right)=2\ln\sqrt{x-2}=2\frac{1}{2}\ln(x-2)=\ln(x-2)$$

Β2. $h(x)=\ln(x-2)$ είναι παρ/μη με $f'(x)=\dfrac{1}{x-2}>0$ για $x\in(2,+\infty)$

άρα $h\uparrow$, άρα "1−1" και τότε υπάρχει η h^{-1}.

$$\lim_{x\to 2}h(x)=\lim_{x\to 2}\ln(x-2)=\lim_{u\to 0}\ln u=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}h(x)=\lim_{x\to +\infty}\ln(x-2)=\lim_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$$

Επειδή h συνεχής και γνησίως αύξουσα τότε έχει σύνολο τιμών

$$\left(\lim_{x\to 2}h(x),\ \lim_{x\to +\infty}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

$y=h(x)\Leftrightarrow y=\ln(x-2)\Leftrightarrow e^y=x-2\Leftrightarrow x=2+e^y$

άρα $h^{-1}(x)=2+e^x$, $x\in\mathbb{R}$

Β3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\dfrac{f(x)}{x-2}\right)$

- $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ όπου

- $f'(x)=\left(2\ln(x-1)\right)'=\dfrac{2}{x-1}$ άρα $f'(2)=2$

Τότε $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\dfrac{f(x)}{x-2}\right)=-\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

i) Για $\kappa\neq 0$ $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\kappa x=\begin{cases}+\infty, & \kappa>0\\ -\infty, & \kappa<0\end{cases}$

Για $\kappa=0$ $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\mu x}{x^2+1}=0$ δεκτό άρα $\kappa=0$

ii) $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$

$f'(x)=\mu\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $f'(0)=1\Leftrightarrow \mu=1$ άρα $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

Γ2.

i) $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f'		-		+		-	
f		↘		↗		↘	
			T.E.		T.M.		

$f\downarrow\ \Delta_1=\left(-\infty\,,-1\right]$, $f\uparrow\ \Delta_2=\left[-1\,,1\right]$, $f\downarrow\ \Delta_3=\left[1\,,+\infty\right)$

στο $x_0=-1$ έχει τοπικό ελάχιστο $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$

στο $x_0=1$ έχει τοπικό μέγιστο $f(1)=\dfrac{1}{2}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Άρα $f\left(\Delta_1\right)=\left[f(-1)\,,\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=\left[-\dfrac{1}{2}\,,0\right)$, $f\left(\Delta_2\right)=\left[f(-1),f(1)\right]=\left[-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{1}{2}\right]$

$f\left(\Delta_3\right)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,,f(1)\right]=\left(0\,,\dfrac{1}{2}\right]$ άρα $f\left(\mathbb{R}\right)=f\left(\Delta_1\right)\cup f\left(\Delta_2\right)\cup f\left(\Delta_3\right)=\left[-\dfrac{1}{2}\,,\dfrac{1}{2}\right]$

Η εξίσωση έχει λύση αν και μόνον αν $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}+\alpha^2\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow -1\le\alpha^2\le 0$

που ισχύει μόνο για $\alpha=0$.

Τότε έχουμε $f(x)=\dfrac{1}{2}$. Για $x\neq 1$ έχουμε $f(x)<\dfrac{1}{2}$ άρα η μοναδική λύση είναι για $x=1$

Γ3.

i) $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx$

$I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}\left(1+x^2\right)}{x^2+1}dx =$$

$$= \int_0^1 x^{2\nu+1}dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii) $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

Για $\nu = 0$ $\quad I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

Για $\nu = 1$ $\quad I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε $h(x) = g(x) + x$ με $h(0) = g(0) > 0$, $h(-1) = g(1) - 1 < 0$,

Θ. Bolzano στο $[-1, 0]$

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο

α' τρόπος : Θεώρημα Rolle και άτοπο

β' τρόπος : h γνησίως μονότονη άρα μοναδική ρίζα

Δ2.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\left(g(x)+x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\left(g(x)+x\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}x\left(2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}-\kappa\right)=$$

$$=2+1-\kappa=3-\kappa$$

Επειδή η συνάρτηση ειναι παραγωγίσιμη $3-\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=3$

β' τρόπος : D.L.H.

Δ3.

Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\left(2\sigma\upsilon\nu x+1\right)\left(\sigma\upsilon\nu x-1\right)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$$

για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ κι επειδή f συνεχής στο $x=0$ είναι $f\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα

$$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x\right)=+\infty$$

Επομένως $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[0,+\infty\right)$ και $\frac{\pi}{3}\in\left[0,+\infty\right)$ επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $3f(x_2)=\pi$ και επειδή $f\uparrow$ άρα x_2 μοναδικό.

Δ4.

i) Στο διάστημα $(x_1, 0]$ η $g(x)+x$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, επομένως διατηρεί πρόσημο.
Επειδή $g(0)>0$ τότε η $g(x)+x$ είναι θετική στο $(x_1, 0]$ επομένως $x^2(g(x)+x)\geq 0$ για κάθε $x\in[x_1, 0]$. Δηλαδή $f(x)\geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$

ii)

$$E(\Omega_1)=\int_{x_1}^{0}|f(x)|dx \quad , \quad E(\Omega_2)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}|f(x)|dx$$

$$E(\Omega_1)=\int_{x_1}^{0}|f(x)|dx=\int_{x_1}^{0}x^2g(x)dx+\int_{x_1}^{0}x^3dx$$

$$E(\Omega_2)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}|f(x)|dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)dx=$$

$$=-2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}}-[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{3}}-3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=-1+2-\ln\frac{1}{2}-\frac{\pi^2}{6}=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_{x_1}^{0}x^2g(x)dx-\frac{x_1^4}{4}=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\left[\frac{x^3}{3}g(x)\right]_{x_1}^{0}-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx-\frac{x_1^4}{4}=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{x_1^4}{3}-\frac{x_1^4}{4}-1-\ln 2+\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx$$

$$\frac{x_1^4}{4}+\frac{\pi^2}{2}-3\ln 2-3=\int_{x_1}^{0}x^3g'(x)dx$$

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑΣ – <u>ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ</u>

βαθμ/τής	**Α1**	**Α2**	**Α3**	**Α4**	**Α5**	**Α**
	6	5	4	10	-	25
	Β1	**Β2**	**Β3**	**Β4**	**Β5**	**Β**
κωδικός	8	9	8	-	-	25
	Γ1	**Γ2**	**Γ3**	**Γ4**	**Γ5**	**Γ**
	8	11	6	-	-	25
	Δ1	**Δ2**	**Δ3**	**Δ4**	**Δ5**	**Δ**
υπογραφή	6	2	7	10	-	25
	ολογράφως					**ΣΥΝΟΛΟ**
....	........................εκατό........................					100

ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΠΟΥ ΘΑ ΕΛΕΓΧΕΙ Η ΕΦΑΡΜΟΓΗ «ΒΑΘΜΟΛΟΓΟΣ» : **Α4**