ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ 2026

Επιμέλεια: Χρήστος Λοΐζος

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2026

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 15 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από ΔΥΟ (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1 Να βρείτε το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{\tau o\xi \eta\mu x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Α2 Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$, το $f(2)=-1$. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 3)

β) Αν $\alpha=-3$ και $\beta=3$, να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 2)

Α3 Εννέα σύνεδροι, εκ των οποίων ο ένας είναι ο πρόεδρος, οι δύο είναι σύμβουλοι και οι υπόλοιποι είναι μέλη, θα καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι για να συνεδριάσουν. Ο πρόεδρος και οι δύο σύμβουλοί του θα κάθονται σε διαδοχικές θέσεις. Αν ο πρόεδρος πρέπει να κάθεται πάντοτε στη μεσαία θέση, ανάμεσα στους δύο συμβούλους του, να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση όλων των συνέδρων.

Α4 α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20}=\frac{1}{\kappa+4}-\frac{1}{\kappa+5}$$

(Μονάδες 1)

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα της πιο κάτω σειράς:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20}$$

(Μονάδες 2)

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int\frac{x^2+9x+23}{x^2+9x+20}\,dx$$

(Μονάδες 2)

Α5 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x-xe^x=\ln x+\lambda,\ \ x\in(0,+\infty),\ \lambda\in\mathbb{R},$ έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Α6 Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(C)\colon x^2+y^2=4$ και η παραβολή με εξίσωση $y^2=8x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής.

(Μονάδες 1)

β) Έστω $N(2\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta),\ \theta\in(0,2\pi),$ τυχαίο σημείο του κύκλου (C) και $\Sigma(x,y)$ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος EN. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ είναι κύκλος με εξίσωση $(C_1)\colon(x-1)^2+y^2=1$.

(Μονάδες 2,5)

γ) Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων (C) και (C_1).

(Μονάδες 1,5)

Α7 α) Έστω ότι $X,\ Y$ είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(X'\cap Y')=P(X')\cdot P(Y')$$

β) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με

$$P(A)=3P(A'),\quad P(B)=\frac{1}{2}\ \text{ και }\ P(A\cup B)=\frac{7}{8}\,,$$

να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A'\cap B')$.

A8 α) Να αποδείξετε ότι:

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x > 1 - e^{x}, \qquad \forall\, x > 0$$

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tau o\xi\varepsilon\varphi x + e^{x} - 1}{x}$$

(Μονάδες 2)

A9 α) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\int e^{-x}\big(f''(x) - f(x)\big)\,dx = e^{-x}\big(f'(x) + f(x)\big) + c$$

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}\left(-\frac{1}{x} + x\ln x\right)dx$$

A10 α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{0}^{2}\sqrt{8 - x^{2}}\;dx = \pi + 2, \qquad x = 2\sqrt{2}\eta\mu\theta, \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το ημικύκλιο $y = \sqrt{8 - x^{2}}$, την καμπύλη $y = x^{3} + 4$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία $x = 2$.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΥΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

Β1 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τους άξονες των συντεταγμένων.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

στ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 1-2-2-2-2-1)

Β2 Έστω συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ και η ευθεία (ε): $3x - y = 2$ εφαπτόμενη της γραφικής παράστασής της στο σημείο $(3, f(3))$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x > -1$$

Β3 Ένα κουτί περιέχει 10 όμοιες μπάλες από τις οποίες οι 7 είναι κόκκινες και οι 3 είναι πράσινες. Παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες τυχαία από το κουτί. Αν η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη, τότε χωρίς να την επανατοποθετήσουμε στο κουτί παίρνουμε μία δεύτερη μπάλα. Ενώ, αν η πρώτη μπάλα είναι πράσινη, τότε την επανατοποθετούμε στο κουτί και στη συνέχεια παίρνουμε μία δεύτερη μπάλα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που πήραμε να είναι πράσινη.

(Μονάδες 6)

β) Αν η δεύτερη μπάλα που πήραμε είναι πράσινη, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη μπάλα που πήραμε να είναι κόκκινη;

(Μονάδες 4)

B4 Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2,\ 2t)$, $t \neq 0$. Στο σημείο A φέρουμε εφαπτόμενη (ε) η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης (ε) είναι:

$$(\varepsilon):\ ty = x + t^2$$

(Μονάδες 2)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Δ για το οποίο το $BO\Gamma\Delta$ (όπου O η αρχή των αξόνων) είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, είναι η παραβολή $y^2 = -x$.

(Μονάδες 3)

γ) Θεωρούμε ότι το σημείο $A(t^2,\ 2t)$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο $(t > 0)$. Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = -x$, τον άξονα των τεταγμένων και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο V_1. Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = 4x$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία (ε), περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο V_2. Να αποδείξετε ότι:

$$V_1 = 3\,V_2$$

(Μονάδες 5)

B5 Η ευθεία που διέρχεται του σημείου $K(7,3)$ τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο σημείο M και την ευθεία $y = x$ στο πρώτο τεταρτημόριο στο σημείο N. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου OMN (όπου O η αρχή των αξόνων) να είναι ελάχιστο.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ

1. Στατιστική

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2}{\nu}} \quad ή \quad s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\nu}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\kappa}f_i x_i^2}{\nu}-\bar{x}^2},$$

$$\text{όπου } \nu=\sum_{i=1}^{\kappa}f_i$$

$$r=\frac{\Sigma_{xy}-\nu\bar{x}\bar{y}}{\nu S_x S_y}, \text{ όπου } \Sigma_{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_\nu y_\nu$$

2. Τριγωνομετρία

$$ημ(Α\pm Β)=ημΑσυνΒ\pm συνΑημΒ$$

$$συν(Α\pm Β)=συνΑσυνΒ\mp ημΑημΒ$$

$$2ημασυνβ=ημ(α-β)+ημ(α+β)$$

$$2συνασυνβ=συν(α-β)+συν(α+β)$$

$$2ημαημβ=συν(α-β)-συν(α+β)$$

$$ημ2α=2ημασυνα \qquad συν2α=συν^2α-ημ^2α$$

$$ημ^2α=\frac{1-συν2α}{2} \qquad συν^2α=\frac{1+συν2α}{2}$$

$$ημ2α=\frac{2t}{1+t^2} \qquad συν2α=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t=εφα$$

$$ημΑ+ημΒ=2ημ\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2} \qquad ημΑ-ημΒ=2ημ\frac{Α-Β}{2}συν\frac{Α+Β}{2}$$

$$συνΑ+συνΒ=2συν\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2} \qquad συνΑ-συνΒ=2ημ\frac{Β-Α}{2}ημ\frac{Α+Β}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	**Σε ακτίνια**
$ημx=ημα$	$x=360^oκ+α$ ή $x=360^oκ+180^o-α,\quad κ\in\mathbb{Z}$	$x=2πκ+α$ ή $x=2πκ+π-α,\quad κ\in\mathbb{Z}$
$συνx=συνα$	$x=360^oκ\pm α,\quad κ\in\mathbb{Z}$	$x=2πκ\pm α,\quad κ\in\mathbb{Z}$
$εφx=εφα$	$x=180^o\,κ+α,\quad κ\in\mathbb{Z}$	$x=πκ+α,\quad κ\in\mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$Επ = Π_β \cdot υ$	$V = Ε_β \cdot υ$
Κανονική Πυραμίδα	$Ε_π = \frac{1}{2} Π_β \cdot h$	$V = \frac{Ε_β \cdot υ}{3}$
Κύλινδρος	$Ε_κ = 2πRυ$	$V = πR^2υ$
Κώνος	$Ε_κ = πRλ$	$V = \frac{πR^2υ}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$Ε_κ = π(R + ρ)λ$	$V = \frac{πυ}{3}(R^2 + Rρ + ρ^2)$
Σφαίρα	$Ε = 4πR^2$	$V = \frac{4πR^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1,y_1)$ από την ευθεία $Ax+By+Γ=0$: $d=\frac{|Ax_1+By_1+Γ|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Έλλειψη: $\frac{x^2}{α^2} + \frac{y^2}{β^2} = 1, \quad γ = \sqrt{α^2 - β^2}, \quad α > β$

Εστίες $(\pm γ,0)$, Διευθετούσες $x=\pm\frac{α}{ε}$, Εκκεντρότητα $ε=\frac{γ}{α}$

5. Παράγωγοι

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$(ημx)' = συνx$ $\quad (συνx)' = -ημx$ $\quad (εφx)' = τεμ^2x$ $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

6. Ολοκληρώματα

$\int τεμx\, dx = \ln|τεμx + εφx| + c$ $\quad \int στεμx\, dx = \ln\left|εφ\frac{x}{2}\right| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{α^2 - x^2}} = τοξημ\frac{x}{α} + c$ $\quad \int \frac{dx}{α^2 + x^2} = \frac{1}{α}τοξεφ\,\frac{x}{α} + c$

7. Απλός Τόκος

$$T=\frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$

ΜΕΡΟΣ Α

Άσκηση Α1

Θα υπολογίσουμε το $\displaystyle\int \frac{\tau o\xi\eta\mu x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

α) 1ος τρόπος (παραγοντική ολοκλήρωση)

$$\int \frac{\tau o\xi\eta\mu x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \tau o\xi\eta\mu x\,dx = \int \big(\tau o\xi\eta\mu x\big)'\cdot \tau o\xi\eta\mu x\,dx$$

$$= \big(\tau o\xi\eta\mu x\big)^2 - \int \tau o\xi\eta\mu x\cdot \big(\tau o\xi\eta\mu x\big)'\,dx = \big(\tau o\xi\eta\mu x\big)^2 - \int \tau o\xi\eta\mu x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + c.$$

Άρα, αν $I = \displaystyle\int \frac{\tau o\xi\eta\mu x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ τότε έχουμε:

$$2I = \big(\tau o\xi\eta\mu x\big)^2 \Rightarrow I = \frac{\big(\tau o\xi\eta\mu x\big)^2}{2} = \frac{1}{2}\big(\tau o\xi\eta\mu x\big)^2 + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

β) 2ος τρόπος (αντικατάσταση)

Θέτω $u = \tau o\xi\eta\mu x$, οπότε $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Άρα,

$$\int \frac{\tau o\xi\eta\mu x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{1}{2}\big(\tau o\xi\eta\mu x\big)^2 + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Άσκηση Α2

Η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 2$ τοπικό ακρότατο, με $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta$.

α) Αφού το $x_0 = 2$ είναι εσωτερικό του D_f και η f παραγωγίσιμη, από το Θεώρημα Fermat ισχύει $f'(2) = 0$.

$$f'(x) = (x^3 + ax^2 + \beta)' = 3x^2 + 2ax.$$

Άρα

$$f'(2) = 3\cdot 2^2 + 2\cdot a\cdot 2 = 0 \Rightarrow 12 + 4a = 0 \Rightarrow 4a = -12 \Rightarrow \boxed{a = -3}.$$

Επίσης $f(2) = -1$:

$$2^3 + (-3)\cdot 2^2 + \beta = -1 \Rightarrow 8 - 12 + \beta = -1 \Rightarrow -4 + \beta = -1 \Rightarrow \boxed{\beta = 3}.$$

Για $a = -3,\ \beta = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Η f παραγωγίζεται ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2).$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$, $\quad f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$, $\quad f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 2)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

Στη θέση $x_0 = 2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

β) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = 6x - 6.$$

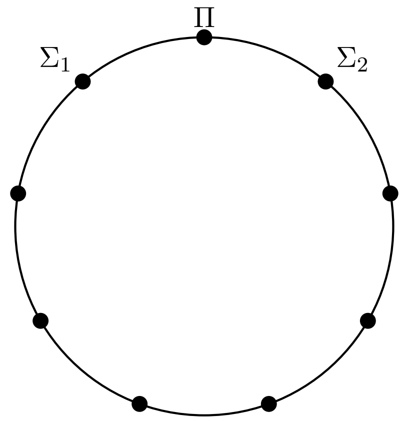
$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 6(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \qquad f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; x > 1, \qquad f''(x) < 0 \;\Rightarrow\; x < 1.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			Σ.Κ.		

Η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$ σημείο καμπής το $f(1) = 1$.

Άσκηση Α3

Έχουμε 9 σύνεδροι, 2 σύμβουλοι (Σ_1, Σ_2) και 1 πρόεδρος (Π), σε κυκλικό τραπέζι.



Η θέση των συμβούλων Σ_1, Σ_2 (γειτονικά) καλύπτεται με 2 τρόπους, (Σ_1, Σ_2) ή (Σ_2, Σ_1). Οι υπόλοιπες $6 + 1 = 7$ θέσεις στο τραπέζι καλύπτονται με $(7-1)! = 6!$ τρόπους (αφού έχουμε κυκλική μετάθεση 7 θέσεων, σύμβουλοι και πρόεδρος αντιμετωπίζονται ως μία θέση).

Συνεπώς, οι εννέα σύνεδροι μπορούν να τοποθετηθούν συνολικά με

$$2 \cdot 6! = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 1440 \text{ τρόπους.}$$

Άσκηση Α4

α) Είναι

$$\frac{1}{k^2 + 9k + 20} = \frac{1}{(k+5)(k+4)} = \frac{A}{k+5} + \frac{B}{k+4}.$$

Με $\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1 > 0$ προκύπτουν οι ρίζες $k_{1,2} = \dfrac{-9 \pm 1}{2} = \begin{cases} -5 \\ -4 \end{cases}$.

$$\frac{1}{(k+5)(k+4)} = \frac{A(k+4)+B(k+5)}{(k+5)(k+4)} \;\Rightarrow\; 1 = A(k+4)+B(k+5).$$

$$1 = (A+B)k + 4A + 5B \;\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4A+5B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A-5A=1 \end{cases} \Rightarrow\; A=-1,\; B=1.$$

Τελικά,

$$\frac{1}{k^2+9k+20} = \frac{-1}{k+5} + \frac{1}{k+4} = \frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5}.$$

β)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+9k+20} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5}\right) = \left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7}\right) + \cdots = \frac{1}{5}.$$

γ)

$$\int \frac{x^2+9x+23}{x^2+9x+20}\,dx = \int \frac{x^2+9x+20+3}{x^2+9x+20}\,dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2+9x+20}\right) dx$$

$$= \int (x)'\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+9x+20}\,dx \overset{(\alpha)}{=} x + 3\int \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}\right) dx$$

$$= x + 3\Big(\ln|x+4| - \ln|x+5|\Big) + c = x + 3\ln|x+4| - 3\ln|x+5| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση A5

Δίνεται η εξίσωση $e^x - xe^x = \ln x + \lambda$, $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Είναι

$$e^x - xe^x = \ln x + \lambda \;\Leftrightarrow\; (1-x)e^x - \ln x - \lambda = 0.$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = (1-x)e^x - \ln x - \lambda$, $x > 0$
Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $\rho_1 \neq \rho_2$ στο $(0, +\infty)$·
Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να υποθέσω ότι: $0 < \rho_1 < \rho_2$ (όμοια αν $\rho_1 > \rho_2 > 0$).

- Η f συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ (πράξεις συνεχών).
- Η f παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2).
- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ αφού είναι ρίζες.

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, +\infty)$ με $f'(\xi) = 0$. Όμως,

$$f'(x) = \left[(1-x)e^x - \ln x + \lambda\right]' = (1-x)'e^x + (1-x)(e^x)' - \frac{1}{x} = -e^x + (1-x)e^x - \frac{1}{x}$$

$$= e^x(1-x-1) - \frac{1}{x} = -xe^x - \frac{1}{x} < 0 \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

δηλαδή $f'(\xi) \neq 0$: ΑΤΟΠΟ.
Συνεπώς, η f έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση Α6

α) Είναι ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 4$ με κέντρο $K = O(0,0)$ και $\rho = 2$, και η παραβολή $y^2 = 2 \cdot 4x$ με $p = 4 > 0$. Η εστία είναι

$$E\left(\tfrac{p}{2}, 0\right) = \left(\tfrac{4}{2}, 0\right) = (2,0),$$

και η διευθετούσα $(\delta) : x = -\frac{p}{2} = -2$.

β) Έστω $N(2\sigma\upsilon\nu\vartheta,\, 2\eta\mu\vartheta)$, $\vartheta \in (0, 2\pi)$, σημείο του C και $E(2,0)$. Το μέσο $\Sigma(x_\Sigma, y_\Sigma)$ του EN έχει

$$x_\Sigma = \frac{x_E + x_N}{2} = \frac{2 + 2\sigma\upsilon\nu\vartheta}{2} = 1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta, \qquad y_\Sigma = \frac{y_E + y_N}{2} = \frac{2\eta\mu\vartheta + 0}{2} = \eta\mu\vartheta.$$

Αν $\Sigma(x_\Sigma, y_\Sigma)$ σημείο του γεωμετρικού τόπου, τότε

$$\begin{cases} x_\Sigma = 1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\vartheta = x_\Sigma - 1 \\ y_\Sigma = \eta\mu\vartheta \end{cases} \Rightarrow\ \sigma\upsilon\nu^2\vartheta + \eta\mu^2\vartheta = (x_\Sigma - 1)^2 + y_\Sigma^2 = 1,$$

δηλαδή $(x-1)^2 + y^2 = 1$: κύκλος C_1 με κέντρο $K_1(1,0)$ και $\rho_1 = 1$.

γ) Είναι

$$d(O, K_1) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1\ \Rightarrow\ d(O, K_1) = 1.$$

Επειδή $\rho - \rho_1 = 2 - 1 = 1$ και $d(O, K_1) = 1 = \rho - \rho_1$, οι κύκλοι C_1 και C εφάπτονται εσωτερικά.

Άσκηση Α7

α) Αφού X, Ψ ανεξάρτητα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου, ισχύει

$$P(X \cap \Psi) = P(X) \cdot P(\Psi). \tag{1}$$

Σύμφωνα με το νόμο De Morgan $(X \cup \Psi)' = X' \cap \Psi'$, οπότε

$$P(X' \cap \Psi') = P\big((X \cup \Psi)'\big) = 1 - P(X \cup \Psi) = 1 - \big(P(X) + P(\Psi) - P(X \cap \Psi)\big)$$

$$= 1 - P(X) - P(\Psi) + P(X)P(\Psi) = 1 - P(\Psi) - P(X)\big(1 - P(\Psi)\big) = \big(1 - P(\Psi)\big)\big(1 - P(X)\big),$$

δηλαδή $P(X' \cap \Psi') = P(X') \cdot P(\Psi')$.

β) Δίνεται $P(A) = 3P(A')$ και $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. Θα εξετάσουμε αν τα A, B είναι ανεξάρτητα.

Από $P(A) + P(A') = 1$ και $P(A) = 3P(A')$:

$$P(A) = 3\big(1 - P(A)\big)\ \Rightarrow\ 4P(A) = 3\ \Rightarrow\ P(A) = \tfrac{3}{4}. \tag{3}$$

Από $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{7}{8} = \frac{6 + 4 - 7}{8} = \frac{3}{8}. \tag{2}$$

Επίσης $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. Άρα $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, δηλαδή τα A, B είναι ανεξάρτητα.

Υπολογίζουμε (με βάση το α) ότι, αφού A, B ανεξάρτητα, τα A', B' είναι ανεξάρτητα:

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = \big(1 - \tfrac{3}{4}\big)\big(1 - \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Άσκηση Α8

Είναι $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = τοξεφx + c,\ c \in \mathbb{R}$.

α) Θα αποδείξουμε ότι $τοξεφx > 1 - e^x$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή $τοξεφx + e^x - 1 > 0$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = τοξεφx + e^x - 1,\ x \in [0,+\infty)$. Η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ (πράξεις συνεχών) και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x) = \big(τοξεφx + e^x - 1\big)' = \frac{1}{1+x^2} + e^x > 0 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για $x > 0$:

$$g(x) > g(0) \;\Rightarrow\; g(x) > 0 \;\Rightarrow\; τοξεφx + e^x - 1 > 0 \;\Rightarrow\; τοξεφx > 1 - e^x.$$

β)

$$\lim_{x\to 0}\frac{τοξεφx + e^x - 1}{x} \underset{\text{(DLH)}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\big(τοξεφx + e^x - 1\big)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2} + e^x}{1} = 2.$$

Άρα $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{τοξεφx + e^x - 1}{x} = 2$.

Άσκηση Α9

α) Έστω $\displaystyle\int e^{-x}\big(f''(x) - f(x)\big)\,dx$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\big(f''(x) - f(x)\big)\,dx &= \int e^{-x} f''(x)\,dx - \int e^{-x} f(x)\,dx \\
&= \int \big(f'(x)\big)' e^{-x}\,dx - \int e^{-x} f(x)\,dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f'(x)\,e^{-x} - \int f'(x)\,\big(e^{-x}\big)'\,dx - \int e^{-x} f(x)\,dx \\
&= f'(x)\,e^{-x} + \int f'(x)\,e^{-x}\,dx - \int e^{-x} f(x)\,dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f'(x)\,e^{-x} + f(x)\,e^{-x} - \int f(x)\,\big(e^{-x}\big)'\,dx - \int e^{-x} f(x)\,dx \\
&= e^{-x}\big(f'(x) + f(x)\big) + \int f(x)\,e^{-x}\,dx - \int e^{-x} f(x)\,dx \\
&= e^{-x}\big(f'(x) + f(x)\big) + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\int e^{-x}\big(f''(x) - f(x)\big)\,dx = e^{-x}\big(f'(x) + f(x)\big) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

β)

$$\int e^{-x}\left(-\frac{1}{x}+x\ln x\right)dx=-\int e^{-x}\left(\frac{1}{x}-x\ln x\right)dx. \tag{1}$$

Θεωρώ $f(x)=x\ln x$, $x>0$. Τότε

$$f'(x)=(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1,$$

και η f' παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x)=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}.$$

Από την (1) και το α) ερώτημα,

$$-\int e^{-x}\left(\frac{1}{x}-x\ln x\right)dx=-\int e^{-x}\big(f''(x)-f(x)\big)dx=-e^{-x}\big(\ln x+1+x\ln x\big)+c$$
$$=-e^{-x}\big((x+1)\ln x+1\big)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Δηλαδή,

$$\int e^{-x}\left(-\frac{1}{x}+x\ln x\right)dx=-e^{-x}\big[(x+1)\ln x+1\big]+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

Άσκηση Α10

α) Θα υπολογίσουμε το $\displaystyle\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,dx$.

Θέτω $x=2\sqrt{2}\,\eta\mu\vartheta$ με $\vartheta\in[0,\frac{\pi}{4}]$, οπότε $dx=2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\,d\vartheta$.

Μεταβολή ορίων:

- $x=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,\eta\mu\vartheta=0\Leftrightarrow \eta\mu\vartheta=0\Leftrightarrow\vartheta=0$ αφού $\vartheta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
- $x=2\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\,\eta\mu\vartheta=2\Leftrightarrow\sqrt{2}\,\eta\mu\vartheta=1\Leftrightarrow\eta\mu\vartheta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\eta\mu\vartheta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow \eta\mu\vartheta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\vartheta=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ή $\vartheta=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Εύρεση k:

Για τον κλάδο $\vartheta=2k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$0\le 2k\pi+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}\ \Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{4}\le 2k\pi\le 0\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{4}\le 2k\le 0.$$

Αφού $k\in\mathbb{Z}$ και $-\frac{1}{8}\le k\le 0$, συμπεραίνουμε $k=0$.

Για τον κλάδο $\vartheta=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$0\le 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}\ \Leftrightarrow\ -\frac{3\pi}{4}\le 2k\pi\le-\frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ -\frac{3}{8}\le k\le-\frac{1}{4}.$$

Δεν υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ στο $\left[-\frac{3}{8},-\frac{1}{4}\right]$.

Τελικά, $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$ (για $k = 0$).

Άρα

$$\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{8-8\eta\mu^2\vartheta}\;2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\,d\vartheta = \int_0^{\pi/4} 2\sqrt{2}\,\sqrt{1-\eta\mu^2\vartheta}\;2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta\,d\vartheta$$

$$= 8\int_0^{\pi/4} \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}\;\sigma\upsilon\nu\vartheta\,d\vartheta \overset{\sigma\upsilon\nu\vartheta>0}{=} 8\int_0^{\pi/4} \sigma\upsilon\nu^2\vartheta\,d\vartheta = 8\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\vartheta}{2}\,d\vartheta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} (1+\sigma\upsilon\nu 2\vartheta)\,d\vartheta = 4\left[\vartheta + \frac{\eta\mu 2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/4} = 4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta\mu\frac{\pi}{2}}{2} - 0\right) = 4\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \pi + 2.$$

Άρα $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx = \pi + 2$.

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^2 \left|\sqrt{8-x^2} - (x^3+4)\right| dx.$$

Αφού, $x^3 + 4 > \sqrt{8-x^2}$ στο $[0,2]$, (βασικές συναρτήσεις, όπου x^3+4 είναι πάνω από τη $\sqrt{8-x^2}$ στο εν λόγω διάστημα).

$$E = \int_0^2 \left(x^3+4-\sqrt{8-x^2}\right) dx = \int_0^2 (x^3+4)\,dx - \int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx$$

$$\overset{(\alpha)}{=} \left[\frac{x^4}{4} + 4x\right]_0^2 - (\pi+2) = \frac{2^4}{4} + 4\cdot 2 - (\pi+2) = 4+8-\pi-2 = 10-\pi.$$

Δηλαδή, $E(\Omega) = (10-\pi)$ τ.μ.

ΜΕΡΟΣ Β

Άσκηση Β1

Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

α) Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$, άρα $D_f = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Σημεία τομής με άξονες:

- Με τον $x'x$: θέτω $y=0$, οπότε $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x-1} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Άρα $O(0,0)$.
- Με τον $y'y$: θέτω $x = 0$ (αφού $0 \in D_f$), τότε $f(0) = \dfrac{0}{0-1} = 0$. Άρα $O(0,0)$.

β) Η f είναι συνεχής στο D_f ως ρητή και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2-2x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

$$f'(x) > 0 \overset{(x-1)^2>0}{\iff} x^2 - 2x > 0 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty,0)\cup(2,+\infty), \qquad f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; x \in (0,2).$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0 Τ.Μ.	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	4 Τ.Ε.	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[0, 1)$, $(1, 2]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x = 0$, το $f(0) = 0$, και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = 2$, το $f(2) = \dfrac{4}{1} = 4$.

γ) Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ως ρητή και παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\big[2(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2\big]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2\big[(x^2-2x+1) - (x^2-2x)\big]}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2}{(x-1)^3} = 0$ ΑΔΥΝΑΤΟ.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow (x-1)^3 > 0 \Rightarrow x > 1, \qquad f''(x) < 0 \Rightarrow x < 1.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1)$ και κυρτή στο $(1, +\infty)$. Σημεία καμπής δεν έχουμε.

δ) *Ασύμπτωτες.*

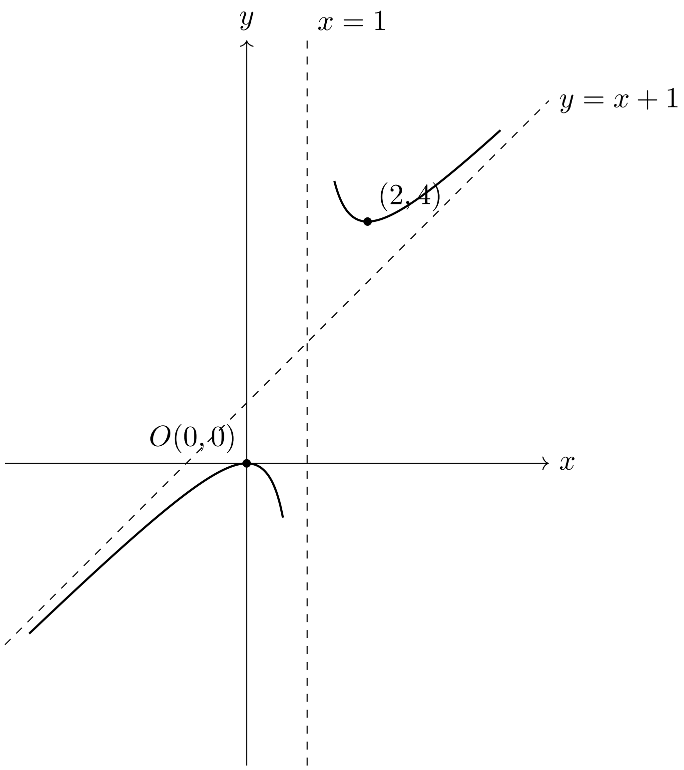
- **Κατακόρυφη**: για $x \to 1^-$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{x-1}\cdot x^2\right) = -\infty$ (αφού $\lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0$ με $x < 1$, άρα $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$). Όμοια για $x \to 1^+$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. Συνεπώς η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.
- **Οριζόντια**: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2}{x} = \pm\infty \notin \mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη.
- **Πλάγια**:

$$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1 \in \mathbb{R},$$

$$\beta = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την $(\varepsilon): y = x + 1$ καθώς $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

ε) *Γραφική παράσταση.* Σύμφωνα με τα παραπάνω: τοπικό μέγιστο $O(0, 0)$, τοπικό ελάχιστο $(2, 4)$, κατακόρυφη ασύμπτωτη $x = 1$, πλάγια ασύμπτωτη $y = x + 1$.



στ) Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = k$ για $k \in \mathbb{R}$ (πλήθος λύσεων ως τομή της C_f με την $y = k$):

- Αν $k < 0$, η εξίσωση $f(x) = k$ έχει δύο λύσεις.
- Αν $k = 0$, η εξίσωση $f(x) = k$ έχει μοναδική λύση.
- Αν $0 < k < 4$, η εξίσωση $f(x) = k$ είναι αδύνατη.
- Αν $k = 4$, η εξίσωση $f(x) = k$ έχει μοναδική λύση.
- Αν $k > 4$, η εξίσωση $f(x) = k$ έχει δύο λύσεις.

Άσκηση Β2

Έχουμε $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, και η ευθεία $(\varepsilon) : y = 3x - 2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$. Οπότε $f'(3) = 3 \ \ (1)$.

Είναι $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x > -1$, δηλαδή $f''(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{x+1}} = \left(2\sqrt{x+1}\right)'$. Άρα

$$\left(f'(x)\right)' = \left(2\sqrt{x+1}\right)' \overset{\Theta.\Sigma.\Pi.\Theta.}{\Longrightarrow} f'(x) = 2\sqrt{x+1} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Από (1), $f'(3) = 3$:

$$f'(3) = 2\sqrt{3+1} + c_1 \ \Rightarrow \ 3 = 4 + c_1 \ \Rightarrow \ c_1 = -1.$$

Άρα $f'(x) = 2\sqrt{x+1} - 1$, $x \in (-1, +\infty)$. Τότε

$$f'(x) = 2(x+1)^{1/2} - 1 \ \Rightarrow \ f(x) = 2 \cdot \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} - x + c = \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Όμως $A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(3) = 7$ διότι $f(3) = 3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$

$$\frac{4\sqrt{(3+1)^3}}{3} - 3 + c = 7 \ \Leftrightarrow \ \frac{4\sqrt{4^3}}{3} + c = 10 \ \Leftrightarrow \ \frac{4 \cdot 8}{3} + c = 10 \ \Leftrightarrow \ \frac{32}{3} + c = 10$$

$$\Leftrightarrow\ c = 10 - \frac{32}{3} = \frac{30-32}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Τελικά,

$$f(x) = \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} - x - \frac{2}{3}, \quad x \in (-1, +\infty).$$

Άσκηση Β3

Δοχείο με 10 μπάλες: 7 κόκκινες και 3 πράσινες· γίνονται δύο διαδοχικές κληρώσεις, και **χωρίς επανατοποθέτηση** όταν η πρώτη είναι κόκκινη, ενώ **με επανατοποθέτηση** όταν η πρώτη είναι πράσινη.

α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

- K_1: η 1η μπάλα κόκκινη, Π_1: η 1η μπάλα πράσινη.
- K_2: η 2η μπάλα κόκκινη, Π_2: η 2η μπάλα πράσινη.

Αρχικά $P(K_1) = \frac{7}{10}$, $P(\Pi_1) = \frac{3}{10}$.

Με τον Θ.Ο.Π. (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας):

$$P(\Pi_2) = P(K_1)\cdot P(\Pi_2 \mid K_1) + P(\Pi_1)\cdot P(\Pi_2 \mid \Pi_1). \tag{1}$$

- Αν η 1η είναι κόκκινη (K_1), δεν την επανατοποθετούμε. Άρα μένουν 9 μπάλες, εκ των οποίων οι 3 πράσινες: $P(\Pi_2 \mid K_1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
- Αν η 1η είναι πράσινη (Π_1), την επανατοποθετούμε. Άρα έχουμε ξανά 10 μπάλες με τις 3 πράσινες: $P(\Pi_2 \mid \Pi_1) = \frac{3}{10}$.

Συνεπώς, από την (1):

$$P(\Pi_2) = \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{7}{30} + \frac{9}{100} = \frac{70}{300} + \frac{27}{300} = \frac{97}{300}.$$

β) Ζητούμε την πιθανότητα η 1η μπάλα να είναι κόκκινη, δεδομένου ότι η 2η είναι πράσινη. Με τον τύπο Bayes:

$$P(K_1 \mid \Pi_2) = \frac{P(K_1 \cap \Pi_2)}{P(\Pi_2)} = \frac{P(K_1)\cdot P(\Pi_2 \mid K_1)}{P(\Pi_2)} = \frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{97}{300}} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{97}{300}} = \frac{7\cdot 300}{30\cdot 97} = \frac{70}{97}.$$

Άρα $P(K_1 \mid \Pi_2) = \frac{70}{97}$.

Άσκηση Β4

Έχουμε την παραβολή $y^2 = 4x$, δηλαδή $y^2 = 2\cdot 2x$ με $p = 2 > 0$, και σημείο $A(t^2, 2t)$, $t \neq 0$.

α) Το $A(t^2, 2t)$ είναι σημείο επαφής της παραβολής με ευθεία (ε). Η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y\cdot 2t = 2(x + t^2)$, δηλαδή

$$2ty = 2x + 2t^2 \ \Leftrightarrow\ ty = x + t^2, \quad (\varepsilon):\ ty = x + t^2.$$

β) Η (ε) τέμνει τον $y'y$ στο $B(0, y_B)$: θέτω $x = 0$, $ty = t^2 \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} y = t$. Άρα $B(0, t)$, $t \neq 0$.
Η (ε) τέμνει τον $x'x$ στο $\Gamma(x_\Gamma, 0)$: θέτω $y = 0$, $x + t^2 = 0 \Rightarrow x = -t^2$. Άρα $\Gamma(-t^2, 0)$, $t \neq 0$.

Για να είναι το $BO\Gamma\Delta$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, η τέταρτη κορυφή είναι $\Delta(x_\Gamma, y_B) = (-t^2, t)$. Αν $\Delta(x_\Delta, y_\Delta)$ σημείο του γεωμετρικού τόπου:

$$\begin{cases} x_\Delta = -t^2 \\ y_\Delta = t \end{cases} \Rightarrow\ x_\Delta = -y_\Delta^2\ \Rightarrow\ y^2 = -x.$$

Άρα το Δ κινείται στην παραβολή $C' : y^2 = -x$, με εξαίρεση την αρχή $O(0,0)$ (αφού $xy \neq 0$, $t \neq 0$).

γ) Είναι $\Delta(-t^2, t)$ με $t > 0$. Η περιστροφή γίνεται γύρω από τον άξονα $y'y$. Ο όγκος εκ περιστροφής γύρω από τον $y'y$ δίνεται από τη σχέση $V = \pi \int_a^b x^2\,dy$.

Όγκος V_1 (περιστροφή χωρίου της $C' : y^2 = -x \Leftrightarrow x = -y^2$, για $0 \leq y \leq t$):

$$V_1 = \pi \int_0^t |x|^2\,dy = \pi \int_0^t (-y^2)^2\,dy = \pi \int_0^t y^4\,dy = \pi \int_0^t \left(\frac{y^5}{5}\right)'dy = \pi \left[\frac{y^5}{5}\right]_0^t = \frac{\pi t^5}{5}.$$

Όγκος V_2. Για το δεύτερο χωρίο έχουμε την παραβολή $y^2 = 4x \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2}{4}$, τον άξονα $y'y$ και την $(\varepsilon) : ty = x + t^2$. Το χωρίο ορίζεται στις τιμές $0 \leq y \leq 2t$. Ο V_2 ισούται με τον όγκο από την παραβολή μείον τον όγκο από την ευθεία.

Όγκος από την παραβολή ($0 \leq y \leq 2t$):

$$V_C = \pi \int_0^{2t} \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy = \pi \int_0^{2t} \frac{y^4}{16}\,dy = \frac{\pi}{16}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{2t} = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{(2t)^5}{5} = \frac{32\pi t^5}{16\cdot 5} = \frac{2\pi t^5}{5}.$$

Όγκος από την ευθεία ($t \leq y \leq 2t$, όπου $x = ty - t^2 = t(y-t)$):

$$V_\varepsilon = \pi \int_t^{2t} (ty - t^2)^2\,dy = \pi \int_t^{2t} t^2(y-t)^2\,dy = \pi t^2 \int_t^{2t} (y^2 - 2yt + t^2)\,dy$$

$$= \pi t^2 \left[\frac{y^3}{3} - 2t\frac{y^2}{2} + t^2 y\right]_t^{2t} = \pi t^2 \left(\frac{(2t)^3 - t^3}{3} - t\big((2t)^2 - t^2\big) + t^2(2t - t)\right)$$

$$= \pi t^2 \left(\frac{7t^3}{3} - 3t^3 + t^3\right) = \pi t^2 \left(\frac{7t^3}{3} - 2t^3\right) = \pi t^2 \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{\pi t^5}{3}.$$

Άρα

$$V_2 = V_C - V_\varepsilon = \frac{2\pi t^5}{5} - \frac{\pi t^5}{3} = \frac{6\pi t^5 - 5\pi t^5}{15} = \frac{\pi t^5}{15}.$$

Τελικά,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi t^5}{5}}{\frac{\pi t^5}{15}} = \frac{15}{5} = 3\ \Leftrightarrow\ V_1 = 3V_2.$$

Άσκηση Β5

Έστω $(\varepsilon) : y = ax + \beta$ που διέρχεται από το $K(7,3)$, τέμνει τον Ox στο M και την ευθεία $y = x$ στο N. Για να είναι το εμβαδόν (OMN) ελάχιστο, πρέπει $a < 0$ (ώστε να σχηματίζει αμβλεία γωνία η (ε) με τον $x'x$).

Από $K(7,3) \in (\varepsilon)$: $3 = 7a + \beta \Rightarrow \beta = 3 - 7a$. Άρα $(\varepsilon) : y = ax + (3 - 7a)$ με $a < 0$.

Τομή με Ox ($y = 0$): $ax + (3 - 7a) = 0 \Rightarrow ax = 7a - 3 \Rightarrow x = \dfrac{7a-3}{a}$. Άρα $M\left(\dfrac{7a-3}{a}, 0\right)$.

Τομή με $y = x$: λύνω το σύστημα $\begin{cases} y = ax + (3-7a) \\ y = x \end{cases}$:

$$x = ax + 3 - 7a \Rightarrow x - ax = 3 - 7a \Rightarrow (1-a)x = 3 - 7a \Rightarrow (a-1)x = 7a - 3. \quad (1)$$

- Αφού $a < 0$, τότε: $x = \dfrac{7a-3}{a-1}$, δηλαδή $N\left(\dfrac{7a-3}{a-1}, \dfrac{7a-3}{a-1}\right)$.

Είναι

$$(OMN) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}\right)\right|, \quad \overrightarrow{ON} = \left(\tfrac{7a-3}{a-1}, \tfrac{7a-3}{a-1}\right), \ \overrightarrow{OM} = \left(\tfrac{7a-3}{a}, 0\right).$$

$$(OMN) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{7a-3}{a} & 0 \\ \frac{7a-3}{a-1} & \frac{7a-3}{a-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|\frac{7a-3}{a} \cdot \frac{7a-3}{a-1}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{(7a-3)^2}{a(a-1)} \quad (a<0).$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(a) = \dfrac{(7a-3)^2}{2a(a-1)}$, $a < 0$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με

$$f'(a) = \frac{2(7a-3)\cdot 7 \cdot 2a(a-1) - (7a-3)^2(4a-2)}{4(a^2-a)^2} = \frac{(7a-3)\big[14a(a-1) - (7a-3)(2a-1)\big]}{2(a^2-a)^2}.$$

Άρα,

$$f'(a) = \frac{(7a-3)\big(-(a+3)\big)}{2(a^2-a)^2} = \frac{(3-7a)(a+3)}{2(a^2-a)^2}.$$

$$f'(a) = 0 \overset{a<0}{\Rightarrow} a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \quad (\text{αφού } 3 - 7a > 0 \text{ για } a < 0).$$

a	$-\infty$	-3	0
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\searrow$	$f(-3)$	$\nearrow$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $a = -3$, το

$$f(-3) = \frac{(7(-3)-3)^2}{2(-3)(-3-1)} = \frac{(-24)^2}{2\cdot(-3)\cdot(-4)} = \frac{576}{24} = 24.$$

Επίσης

$$M\left(\frac{7(-3)-3}{-3}, 0\right) = \left(\frac{-24}{-3}, 0\right) = (8, 0), \qquad N\left(\frac{-24}{-4}, \frac{-24}{-4}\right) = (6, 6).$$

Άρα το ελάχιστο εμβαδόν είναι $(OMN)_{\min} = 24$ τ.μ., με $M(8,0)$ και $N(6,6)$.