

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 5

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι “1-1”. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1} , της f είναι το σύνολο τιμών της f .

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

γ) Αν $v \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v}} = -\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

- ε) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

- B1.** Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

Στα ερωτήματα B2 έως B4 να θεωρήσετε ότι $\alpha = -6$.

- B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

- B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

- B4.** Έστω $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\eta\mu x} & , \quad x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.
Μονάδες 5

Γ4. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M , $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F , της f στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$xf(x) = 2F(x)\ln x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x > 0$, είναι σταθερή.
Μονάδες 6

Δ2. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1) = 1$ (μονάδες 3) και $F(x) = x^{\ln x}$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 9

- Δ3.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F , τις ευθείες $x=1$, $x=e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E > 2e - 3$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Ενδεικτικές Λύσεις Μαθηματικών

Προσανατολισμού — Πανελλαδικές 2025

liveyourmaths.com

ΘΕΜΑ Α

A1.

Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \quad \forall x \in \Delta.$$

Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Από συνέπεια του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c \in \mathbb{R}$:

$$G(x) = F(x) + c$$

για κάθε $x \in \Delta$.

A2.

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Εάν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\alpha, \beta)$: $f(x_0) = \eta$.

A3.

Εάν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται *κατακόρυφη ασύμπτωτη* της γραφικής παράστασης της f .

A4.

- α) Σωστό
- β) Σωστό
- γ) Λάθος
- δ) Λάθος
- ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Έχουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$, με $a \in \mathbb{R}$.

B1.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$.

Στο σημείο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει — το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$ και παρουσιάζει σε αυτό τοπικό ακρότατο. Πληρούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat. Δηλαδή $f'(1) = 0$.

Είναι

$$f'(x) = (x^3 + ax^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2ax + 9.$$

Θέτουμε $x = 1$:

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow 2a + 12 = 0 \Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow a = -6.$$

Άρα

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

B2.

1^{ος} τρόπος.

Η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Επιλέγουμε $[0, 1]$ στο οποίο η f συνεχής, με $f(0) = -3$ και

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1 - 6 + 9 - 3 = 1 > 0.$$

Άρα η f συνεχής στο $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ και $f(0) \cdot f(1) = (-3) \cdot 1 = -3 < 0$, οπότε από Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$: $f(x_0) = 0$, με $x_0 > 0$.

Η f συνεχής στο $[1, 3] \subseteq \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f(1) = 1$ και

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = 27 - 54 + 27 - 3 = -3 < 0.$$

Άρα $f(1) \cdot f(3) < 0$, οπότε από Θ.Bolzano $\exists x_1 \in (1, 3)$: $f(x_1) = 0$, με $x_1 > 0$.

Η f συνεχής στο $[3, 4] \subseteq \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f(3) = -3$ και

$$f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 3 = 64 - 96 + 36 - 3 = 1 > 0.$$

Άρα $f(3) \cdot f(4) = (-3) \cdot 1 = -3 < 0$, οπότε από Θ.Bolzano $\exists x_2 \in (3, 4)$: $f(x_2) = 0$, με $x_2 > 0$.

Εφόσον η f είναι πολυωνυμική 3^{ου} βαθμού και έχουμε ήδη τρεις ρίζες, δεν έχει άλλες.

2^{ος} τρόπος.

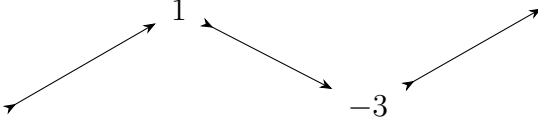
Η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική. Η f παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (x^3 - 6x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Έστω $A_1 = (-\infty, 1]$, $A_2 = [1, 3]$ και $A_3 = [3, +\infty)$.

Στο A_1 : η f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_1 , οπότε

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right].$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad f(1) = 1 \neq 0.$$

Άρα $f(A_1) = (-\infty, 1]$, όμως $0 \in f(A_1)$, άρα υπάρχει $x_0 \leq 1$: $f(x_0) = 0$. Όμως δεν ξεχωρίζει αν $x_0 > 0$ ή όχι.

Στο σημείο αυτό μπορούμε είτε να πάρουμε $(0, 1] \subseteq A_1 = (-\infty, 1]$ με (f συνεχής στο $(0, 1]$, $f \uparrow$ στο $(0, 1]$)

$$f((0, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right] = (-3, 1], \quad \text{με } 0 \in f((0, 1]),$$

άρα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$: $f(x_0) = 0$, δηλαδή $x_0 > 0$.

Στο A_2 : ομοίως, f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο A_2 ,

$$f(A_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1].$$

$0 \in f(A_2)$, άρα υπάρχει $x_1 \in (1, 3)$: $f(x_1) = 0$, με $x_1 > 0$.

Στο A_3 : f γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε

$$f(A_3) = \left(f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = +\infty,$$

δηλαδή $f(A_3) = (-3, +\infty)$. Άρα υπάρχει $x_2 \in (3, +\infty)$: $f(x_2) = 0$, με $x_2 > 0$.

Συνεπώς η f έχει τρεις (3) θετικές πραγματικές ρίζες.

B3.

Από το B2 έχουμε ήδη βρει $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$. Η f' συνεχής ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = [3(x^2 - 4x + 3)]' = 3(x^2 - 4x + 3)' = 3(2x - 4) = 6(x - 2),$$

δηλαδή $f''(x) = 6(x - 2)$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x > 2$.
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6(x - 2) < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα κυρτότητας της f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
κυρτότητα	$\curvearrowright$		$\curvearrowleft$

Συνεπώς, η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$. Στη θέση $x = 2$ παρουσιάζει καμπή. Το σημείο καμπής είναι

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 3 = 8 - 24 + 18 - 3 = -1,$$

$$K(2, f(2)) = (2, -1).$$

B4.

Έχουμε $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$:

$$(\varepsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) \quad (1)$$

Βρίσκουμε την εφαπτομένη της g στο σημείο της $B(\xi, g(\xi))$:

$$(\varepsilon_2): y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) \quad (2)$$

Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται, θα βρούμε το σημείο τομής τους. Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2):

$$f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) \quad (3)$$

Αλλά $f(x) + x = g(x)$ και g παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = (x + f(x))' = 1 + f'(x),$$

για $x = \xi$ έχουμε $g'(\xi) = 1 + f'(\xi)$. Συνεπώς το (3) γίνεται

$$f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) = (1 + f'(\xi))(x - \xi) + f(\xi) + \xi$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(x - \xi) = (x - \xi) + f'(\xi)(x - \xi) + \xi$$

$$\Leftrightarrow x - \xi + \xi = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται σε σημείο με τετμημένη $x = 0$. Άρα οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται σε σημείο του $y'y$.

Εναλλακτικά: Θα μπορούσαμε να θέσουμε στις (ε_1) και (ε_2) $x = 0$ και να δούμε ότι έχουν την ίδια τεταγμένη

$$f'(\xi) \cdot (-\xi) + f(\xi) = y.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έχουμε τη διπλό τύπο συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \eta\mu x) = e^0 \eta\mu 0 = 1 \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0 = f(0).$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, οπότε η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στο 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{(DLH)}}{\lim_{x \rightarrow 0^+}}} \frac{(\sqrt{x^2 + x})'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x}}. \end{aligned}$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$ με $\sqrt{x^2 + x} > 0$ κοντά στο 0^+ , και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$, προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x}} = +\infty.$$

Συνεπώς

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \notin \mathbb{R},$$

άρα η f όχι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2.

Στη θέση $x_0 = 0$ η f συνεχής (από ερώτημα Γ1), άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Πλάγια ασύμπτωτη καθώς $x \rightarrow -\infty$:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right).$$

Όμως $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$, οπότε

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|},$$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$, άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$. Επίσης

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$. Συνεπώς $\lambda = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta\mu x).$$

Όμως $|e^x \eta \mu x| \leq |e^x| = e^x$ (αφού $e^x > 0$), άρα

$$-e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x,$$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0$. Άρα η $y = 0$ είναι πλάγια (οριζόντια) ασύμπτωτη της $\mathcal{C}_f$ καθώς $x \rightarrow -\infty$.

Πλάγια ασύμπτωτη καθώς $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \quad (+\infty - \infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \stackrel{x \geq 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς η $\mathcal{C}_f$ δέχεται πλάγια ασύμπτωτη καθώς $x \rightarrow +\infty$ την $(\varepsilon) : y = x + \frac{1}{2}$.

Γ3.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ και η $\mathcal{C}_f$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με $x < 0$.

Λύνουμε την $f(x) = y$ για $x < 0$:

$$e^x \eta \mu x = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2} = 0.$$

Θεωρώ συνάρτηση $\lambda(x) = e^x \eta \mu x - x - \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi, 0]$.

- Η λ συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

•

$$\lambda(-\pi) = e^{-\pi} \eta \mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = -e^{-\pi} \eta \mu \pi + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0,$$

$$\lambda(0) = e^0 \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Άρα η λ συνεχής στο $[-\pi, 0]$ και $\lambda(-\pi) \cdot \lambda(0) < 0$, οπότε πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano: υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-\pi, 0)$: $\lambda(x_0) = 0$.

Γ4.

Είναι $y = f(x)$, $x \geq 0$, με $x'(t) > 0 \forall t \geq 0$. Δηλαδή $x = x(t)$ και $y = y(t)$, οπότε $M(x(t), y(t))$ με $t \geq 0$. Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ θα είναι $x'(t_0) = y'(t_0)$ που είναι προς εξέταση.

Αλλά $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, παραγωγίζουμε τη σχέση αυτή ως προς t και έχουμε:

$$y'(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)} \right)' \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} (x^2(t) + x(t))'$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}.$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε:

$$y'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \xrightarrow{y'(t_0)=x'(t_0)>0}$$

$$x'(t_0) = \frac{x'(t_0)(2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \xleftrightarrow{x'(t_0)>0} 2x(t_0) + 1 = 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}.$$

$$(2x(t_0) + 1)^2 = 4(x^2(t_0) + x(t_0)) \Leftrightarrow 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 = 4x^2(t_0) + 4x(t_0) \\ \Leftrightarrow 1 = 0 \quad \text{άτοπο.}$$

Άρα, δεν υπάρχει τέτοια χρονική στιγμή!

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έχουμε $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και F παράγουσα (αρχική) της f στο $(0, +\infty)$. Ισχύει:

$$x f(x) = 2F(x) \ln x, \quad \forall x > 0.$$

Αφού η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $(\varepsilon) : y = 2x$, τότε

$$f'(1) = 2 \quad (1).$$

Για να αποδείξουμε ότι η g είναι σταθερή αρκεί $g'(x) = 0, \forall x \in (0, +\infty)$.

Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \left(\frac{F(x)}{x^{\ln x}} \right)' = \frac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)(x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2}.$$

Με $(x^{\ln x})' = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$ (αποδεικνύεται παρακάτω), και $F'(x) = f(x)$:

$$g'(x) = \frac{f(x)x^{\ln x} - F(x) \cdot \frac{2 \ln x \cdot e^{\ln^2 x}}{x}}{(x^{\ln x})^2}.$$

Από την υπόθεση $x f(x) = 2F(x) \ln x$, δηλαδή $2F(x) \ln x = x f(x)$, οπότε

$$g'(x) = \frac{f(x)x^{\ln x} - f(x)e^{\ln^2 x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x)x^{\ln x} - f(x)x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} = 0,$$

αφού $x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}, x > 0$.

Τελικά, $g'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Από συνέπειες του Θ.Μ.Τ. η g είναι σταθερή.

Εναλλακτικά (για την παράγωγο της $x^{\ln x}$): Θέτω $K(x) = x^{\ln x}, x > 0$, άρα $K(x) > 0$, οπότε λογαριθμίζω τη σχέση

$$\ln K(x) = \ln x^{\ln x} \Leftrightarrow \ln K(x) = \ln x \cdot \ln x \Leftrightarrow \ln K(x) = \ln^2 x.$$

Παραγωγίζω τη σχέση αυτή, $(\ln K(x))' = (\ln^2 x)'$, και έχω:

$$\frac{K'(x)}{K(x)} = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow K'(x) = K(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\Rightarrow K'(x) = x^{\ln x} \frac{2 \ln x}{x} = \frac{2 \ln x \cdot x^{\ln x}}{x} = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1},$$

δηλαδή $(x^{\ln x})' = 2 \ln x \cdot x^{\ln x - 1}$.

Δ2.

(i) Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$.

Εξ' υποθέσεως έχουμε $x f(x) = 2F(x) \ln x$, $\forall x > 0$. Θέτω στη δοθείσα $x = 1$ και έχω $1 \cdot f(1) = 2F(1) \ln 1$, δηλαδή

$$f(1) = 0 \quad (1).$$

Επίσης $x f(x) = 2F(x) \ln x \xrightarrow{x \geq 0} f(x) = \frac{2F(x) \ln x}{x}$. Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη και

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2F(x) \ln x}{x} \right)' = \frac{(2F(x) \ln x)'x - 2F(x) \ln x (x)'}{x^2} \\ &= \frac{2(F(x) \ln x + F(x)(\ln x)')x - 2F(x) \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2x \left(f(x) \ln x + \frac{F(x)}{x} \right) - 2F(x) \ln x}{x^2} = \frac{2x f(x) \ln x + 2F(x) - 2F(x) \ln x}{x^2}, \end{aligned}$$

δηλαδή η f' συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Τελικά,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \stackrel{\frac{f(1)}{\ln 1} = \frac{0}{0}, \text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{f' \text{ συνεχής}}{=} \frac{f'(1)}{1} = f'(1) = 2.$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2.}$$

(i) **Εναλλακτικά:** Ζητάμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$ για $x \neq 1$. Από σχέση (1) του ερωτήματος Δ1 είναι $f(1) = 0$, οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x - \ln 1} \quad [\ln 1 = 0] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{\ln x - \ln 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\ln x - \ln 1}{x - 1}} \\ &= f'(1) \cdot \frac{1}{1} = 2 \quad \text{από υπόθεση.} \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2$.

(ii) Θα αποδείξουμε ότι $F(1) = 1$.

Η F είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = F(1)$ και στο 1 συνεχής προφανώς.

Από δοθείσα $x f(x) = 2F(x) \ln x, \forall x \in (0, +\infty)$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{x f(x)}{2 \ln x}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x f(x)}{2 \ln x} \stackrel{0/0, \text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x f(x))'}{(2 \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x)' f(x) + x f'(x)}{\frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x f(x) + x^2 f'(x)}{2} \stackrel{f, f' \text{ συνεχής}}{=} \frac{1 \cdot f(1) + 1^2 f'(1)}{2} = \frac{1 \cdot 0 + 1^2 \cdot 2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = 1$, όμως η F συνεχής, οπότε $F(1) = 1$.

Από Δ1 η g σταθερή, άρα $g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x} \cdot c$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Θέτω σε αυτήν $x = 1$, οπότε $F(1) = 1^{\ln 1} \cdot c$:

$$F(1) = c \Leftrightarrow c = 1 \quad \text{αφού } F(1) = 1.$$

Άρα $c = 1$, τελικά

$$F(x) = x^{\ln x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Δ3.

Θα μελετήσουμε την F ως προς τη μονοτονία στο $(0, +\infty)$. Η F συνεχής στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = (x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} (\ln^2 x)' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x (\ln x)' = \frac{2 \ln x \cdot e^{\ln^2 x}}{x}.$$

$$\text{Άρα } F'(x) = \frac{2 \ln x \cdot e^{\ln^2 x}}{x}.$$

- $F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x \cdot e^{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$.
- $F'(x) > 0 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x \cdot e^{\ln^2 x} > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$.
- $F'(x) < 0 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x \cdot e^{\ln^2 x} < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$.

Πίνακας μεταβολών:

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		− 0 +	
$F(x)$		↙ 1 ↘	

Άρα, η F γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
Θα λύσουμε την εξίσωση:

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \quad (1) \quad \text{στο } (0, +\infty).$$

Η εξίσωση (1) έχει προφανή ρίζα την $x = 1$ αφού $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$: θέτω $x = 1$ και έχω

$$F(1^2) = F(1) - (1-1)^2 \Leftrightarrow F(1) = F(1) - 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Αν $0 < x < 1$: τότε $0 < x^2 < x < 1$, και επειδή η F γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$:

$$F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > (x-1)^2 > 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Αν $1 < x$: τότε $x < x^2$, και επειδή η F γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$:

$$F(x) < F(x^2) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > (x-1)^2 > 0.$$

Δηλαδή η εξίσωση $F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, με προφανή ρίζα την $x = 1$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

Δ4.

Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τη σχέση

$$E = \int_1^e |F(x)| dx, \quad \text{όμως } F(x) = x^{\ln x}, \quad x > 0.$$

Είναι $F(x) > 0$ θετική $\forall x \in (0, +\infty)$, άρα $F(x) > 0$ για $x \in [1, e] \subseteq (0, +\infty)$. Συνεπώς

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx.$$

Γνωρίζουμε ότι $e^x \geq x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε όπου x το $\ln^2 x \in \mathbb{R}$ για $x \in [1, e]$, τότε $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$, με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$. Από γνωστό θεώρημα

$$\int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Rightarrow E > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx.$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln^2 x dx &= \int_1^e 1 \cdot \ln^2 x dx = \int_1^e (x)' \ln^2 x dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x (\ln^2 x)' dx \\ &= [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x (\ln x)' dx = e \ln^2 e - 1 \cdot \ln^2 1 - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2 \int_1^e (x)' \ln x dx = e - 2 \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= e - 2 \left[(e \ln e - 1 \cdot \ln 1) - (e - 1) \right] = e - 2(e - e + 1) = e - 2. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = (e - 2) + (e - 1) = 2e - 3.$$

Δηλαδή :

$E > 2e - 3.$

Χρήστος Δοΐζος