ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 5

Α3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι “1-1”, αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

γ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

δ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)\ .$$

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{x\,|\,\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $(\sigma\varphi x)'=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ \text{ με τύπο } f(x)=2\ln(x-1)$$

και

$$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R},\ \text{ με τύπο } g(x)=\sqrt{x-2}+1\ .$$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $h(x)=\ln(x-2),\ \ x\in(2,+\infty)$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h^{-1} (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$$

με $\kappa,\mu\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\kappa=0$ και

ii) $\mu=1$.

Μονάδες 8

Γ2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (μονάδες 3) και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 11

Γ3. Για $\nu \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$.

i) Να αποδείξετε ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

ii) Να υπολογίσετε τα I_0, I_1 και I_2.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0 .$$

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(g(x) + x\big) \ , \ x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x \ , \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 2

Δ3. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν:

i) $f(x) \geq 0$ και (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μια ρίζα, x_2. (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ4. **i)** Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $\left[x_1, 0\right]$. (μονάδες 3)

ii) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, όπου x_1 είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και x_2 είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.$$

(μονάδες 7)

Μονάδες 10

<u>**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)**</u>

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Λύσεις Μαθηματικών Προσανατολισμού Πανελλαδικών Εξετάσεων ΓΕΛ 2026

Επιμέλεια λύσεων: Χρήστος Λοΐζος, Μαθηματικός

Επιμέλεια LaTeX: Χρήστος Κατσανδρής

5 Ιουνίου 2026

Θέμα Α

Ερώτημα Α1.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η συνάρτηση f είναι:
  - συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq \Delta$,
  - παραγωγίσιμη στο $(x_1, x_2) \subseteq \Delta$.

  Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Διαφορικού Λογισμού) υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \iff f'(\xi)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \quad (1)$$

  Επειδή ξ εσωτερικό του $(x_1, x_2) \subseteq \Delta$, τότε $f'(\xi) = 0$. Από (1) έχουμε:

$$0 \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \iff f(x_1) = f(x_2)$$

Σε κάθε περίπτωση, $f(x_1) = f(x_2)$ ■

Ερώτημα Α2.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g, h. Εάν:

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, και

- $$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

τότε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Ερώτημα Α3.

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

Ερώτημα Α4.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

Θέμα Β

Ερώτημα Β1.

Θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x)$.

- Πεδίο ορισμού:

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \Big\{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\Big\} = \Big\{x > 2 \text{ και } \sqrt{x-2}+1 > 1\Big\} \\ &= \Big\{x > 2 \text{ και } \sqrt{x-2} > 0\Big\} = (2, +\infty) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

  Άρα, $D_{f\circ g} = (2, +\infty) \neq \emptyset$, οπότε ορίζεται η πράξη της σύνθεσης της g με την f.

- Τύπος:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2\ln(g(x)-1) \\ &= 2\ln\Big(\sqrt{x-2}+1-1\Big) = 2\ln\sqrt{x-2} \\ &= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\ln(x-2) = \ln(x-2). \end{aligned}$$

  Τελικά, $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$.

Ερώτημα Β2.

Απόδειξη αντιστρεψιμότητας

1$^{\text{ος}}$ τρόπος

Απόδειξη. Για τυχαία $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $h(x_1) = h(x_2)$:

$$\ln(x_1-2) = \ln(x_2-2) \xRightarrow{\ln \text{ '1-1'}} x_1 - 2 = x_2 - 2 \implies x_1 = x_2.$$

Άρα η h είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται. ∎

2$^{\text{ος}}$ τρόπος

Απόδειξη. Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(2, +\infty)$ ως σύνθεση μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με:

$$h'(x) = (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}(x-2)' = \frac{1}{x-2} > 0 \quad \text{αφού } x > 2.$$

Άρα $h'(x) > 0$, οπότε από γνωστό θεώρημα η h γνησίως αύξουσα (↑) στο $(2, +\infty)$. Κατά συνέπεια, αντιστρέφεται από άλλο γνωστό θεώρημα. ∎

Εύρεση αντίστροφης συνάρτησης

1ος τρόπος

Είναι $h(x) = \ln(x-2),\ x > 2$.

$$\textit{θέτω}\ y = h(x) \iff y = \ln(x-2) \iff e^y = x-2 \iff x = e^y + 2.$$

Απαιτώ $e^y + 2 > 2 \iff e^y > 0$, που ισχύει. Άρα $x = e^y + 2,\ y \in \mathbb{R}$, ή $h^{-1}(y) = e^y + 2,\ y \in \mathbb{R}$.

Αντικαθιστώ y με x:

$$\boxed{h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

2ος τρόπος

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της h. Είναι $h'(x) = \dfrac{1}{x-2} > 0 \implies h \uparrow$ στο $(2, +\infty)$, οπότε:

$$h((2,+\infty)) \underset{h\uparrow \text{ στο } (2,+\infty)}{\overset{h \text{ συνεχής}}{=\!=\!=}} \Big(\lim_{x\to 2^+} h(x),\ \lim_{x\to+\infty} h(x)\Big).$$

$$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2). \quad \textit{θέτω}\ x-2 = u,\ \text{όταν}\ x \to 2^+ \implies u \to 0^+.$$

$$\lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty \quad (\text{θεωρία}).$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x-2) = +\infty \quad (\textit{θέτω}\ x-2 = t,\ t \to +\infty).$$

Άρα, $h((2,+\infty)) = \mathbb{R}$.

Τελικά, *θέτω* $y = h(x) \iff y = \ln(x-2) \iff e^y = x-2 \iff x = e^y + 2 \iff h^{-1}(y) = e^y + 2,\ y \in \mathbb{R}$, ή:

$$\boxed{h^{-1}(x) = e^x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Ερώτημα Β3.

Θα υπολογίσουμε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)$.

1ος τρόπος

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)$$

αφού $f(2) = 2\ln(2-1) = 2\ln 1 = 2\cdot 0 = 0 \implies f(2) = 0$.

Όμως, $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'_+(2)$.

Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, άρα και στο 2, με:

$$f'(x) = (2\ln(x-1))' = 2(\ln(x-1))' = \frac{2}{x-1}(x-1)' = \frac{2}{x-1},$$

οπότε $f'(2) = \dfrac{2}{2-1} = 2 \implies f'_+(2) = 2.$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) = -\infty$ από προηγούμενο ερώτημα. Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = -\infty.$

Τελικά:

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = (-\infty)\cdot 2 = -\infty,$$

ή

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = -\infty.$$

2ος τρόπος

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)$.

Όμως, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2} \underset{\text{(DLH)}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=}} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{(x-2)'} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2}{x-1}}{1} = 2$, ή

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = 2.$$

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty \quad (\text{θέτω } x-2=u, \text{ όταν } x\to 2^+ \implies u\to 0^+).$$

Τελικά:

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = -\infty,$$

ή

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right) = -\infty.$$

Θέμα Γ

Ερώτημα Γ1.

Είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$, $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$.

- Αφού η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$.

  Δηλαδή:

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \kappa x = \kappa \cdot \lim_{x\to+\infty} x^3 = \begin{cases} +\infty, & \kappa > 0 \\ -\infty, & \kappa < 0 \end{cases}$$

  και στις δύο περιπτώσεις $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \notin \mathbb{R}$.

  Κατά συνέπεια, πρέπει $\kappa = 0$ για να έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$.

  Για $\kappa = 0$ έχουμε $f(x) = \dfrac{\mu x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Αφού η C_f εφάπτεται στην $y = x$ στο $O(0,0)$, τότε $f'(0) = 1$.

  Η συνάρτηση f είναι ρητή και συνεχής στο $\mathbb{R}$, και παραγωγίσιμη με:

  $$f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(\mu x)'(x^2 + 1) - \mu x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - \mu x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2},$$

  οπότε $f'(0) = 1 \iff \dfrac{\mu - 0}{1} = 1 \iff \mu = 1$.

Τελικά, $\kappa = 0$ κ' $\mu = 1$, οπότε $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ερώτημα Γ2.

ι) Μονοτονία και ακρότατα

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως ρητή, και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Βρίσκουμε το πρόσημο της f':

- $f'(x) = 0 \iff \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff |x| = 1$.

- $f'(x) > 0 \iff \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \overset{(x^2+1)^2>0}{\iff} 1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$.

- $f'(x) < 0 \iff \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0 \overset{(x^2+1)^2>0}{\iff} 1 - x^2 < 0 \iff x^2 > 1 \iff x > 1$ ή $x < -1$.

Έχουμε συνεπώς τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\searrow$		$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ κ′ στο $[1, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.

Παρουσιάζει στη θέση $x = -1$ τοπικό ελάχιστο $f(-1) = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$, κ′ στη θέση $x = 1$ τοπικό μέγιστο $f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

ιι) Σύνολο τιμών και πλήθος ριζών

Είναι $A_1 = (-\infty, -1]$:

$$f(A_1) \overset{f \text{ συνεχής στο } A_1}{\underset{f\downarrow \text{ στο } A_1}{=\!=}} \Big[f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)\Big).$$

$$f(-1) = -\tfrac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Άρα $f(A_1) = \left[-\tfrac{1}{2}, 0\right)$.

Είναι $A_2 = [-1, 1]$, άρα:

$$f(A_2) \overset{f \text{ συνεχής στο } A_2}{\underset{f\uparrow \text{ στο } A_2}{=\!=}} [f(-1), f(1)] = \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right].$$

Είναι $A_3 = [1, +\infty)$, άρα:

$$f(A_3) \overset{f \text{ συνεχής στο } A_3}{\underset{f\downarrow \text{ στο } A_3}{=\!=}} \Big(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\Big] = \left(0, \tfrac{1}{2}\right].$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

Τελικά:

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \\ &= \left[-\tfrac{1}{2}, 0\right) \cup \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \cup \left(0, \tfrac{1}{2}\right] = \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right], \end{aligned}$$

ή $f(\mathbb{R}) = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Ουσιαστικά, τα ακρότατα που βρήκαμε πιο πάνω στο ερώτημα, είναι ολικά.

Θα βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a^2 + \dfrac{1}{2}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Είναι $a^2 \geq 0 \iff a^2 + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2}$. Επίσης, $-\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ αφού $f(\mathbb{R}) = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

Άρα $a^2 + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2}$, με την ισότητα να ισχύει για $a = 0$.

- Αν $a = 0$: $f(x) = \dfrac{1}{2} \iff x = 1$ (θέση ακρότατου). Άρα **μία ρίζα**, $x = 1$.
- Αν $a \neq 0$: $a^2 > 0 \iff a^2 + \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση $f(x) = a^2 + \dfrac{1}{2}$ είναι αδύνατη (εκτός συνόλου τιμών). Συνεπώς, **καμία ρίζα**.

Ερώτημα Γ3.

Έχουμε: $I_\nu = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx.$

ι)

$$I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx.$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
I_\nu + I_{\nu+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{2\nu}(x+x^3)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu}\cdot x(1+x^2)}{x^2+1}\,dx \\
&= \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right)'dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - 0 = \frac{1}{2\nu+2}, \quad \nu \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Άρα $I_\nu + I_{\nu+1} = \dfrac{1}{2\nu+2}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

ιι)

Είναι για $\nu = 0$ (αφού $\nu \in \mathbb{N}$):

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\ln(x^2+1))'\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+1)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+1) - \ln(0+1)\Big) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Άρα $I_0 = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Από σχέση στο ερώτημα ι) έχουμε $I_0 + I_1 = \dfrac{1}{2\cdot 0+2} = \dfrac{1}{2}$ για $\nu = 0$, οπότε:

$$I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

Από τη σχέση $I_\nu + I_{\nu+1} = \dfrac{1}{2\nu+2}$ για $\nu = 1$:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \iff I_2 = \frac{1}{4} - I_1 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{2-2\ln 2}{4} = \frac{1-(2-2\ln 2)}{4} = \frac{1-2+2\ln 2}{4} = \frac{2\ln 2 - 1}{4}.$$

$$\boxed{I_2 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}.}$$

Θέμα Δ

Ερώτημα Δ1.

Απόδειξη. Είναι:

- $0 < g(x) < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$,
- $g'(x) \neq -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Θεωρώ συνάρτηση $h(x) = g(x) + x,\ x \in [-1, 0]$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

- $h(-1) = g(-1) + (-1) = g(-1) - 1 < 0$, αφού $0 < g(x) < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, άρα και για $x = -1$: $0 < g(-1) < 1 \implies g(-1) - 1 < 0$.
- $h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$, διότι $0 < g(x) < 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, άρα και για $x = 0$, $g(0) > 0$.

Συνεπώς, πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$: $h(x_1) = 0,\ \implies g(x_1) + x_1 = 0$.

Μοναδικότητα της ρίζας x_1

$1^{\text{ος}}$ τρόπος

Απόδειξη. Έστω ότι η h έχει και άλλη ρίζα στο $(-1, 0)$ με $x_1 \neq x_2$, x_2 η δεύτερη ρίζα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορώ να υποθέσω ότι $x_1 < x_2$. Οπότε η h συνεχής στο $[x_1, x_2]$, η h παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με, $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Από Θ.Rolle:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-1, 0) : h'(\xi) = 0.$$

Αλλά $h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1$, κατά συνέπεια:

$$h'(\xi) = 0 \iff g'(\xi) + 1 = 0 \iff g'(\xi) = -1.$$

Άτοπο, αφού $g'(x) \neq -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$. ■

$2^{\text{ος}}$ τρόπος

Απόδειξη. Έχουμε αποδείξει ότι η εξίσωση $g(x) + x = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 0)$. Είναι $h(x) = g(x) + x$ η οποία συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ αφού $g'(x) \neq -1$ (εξ υποθέσεως). Η h' είναι συνεχής αφού g' συνεχής εξ υποθέσεως, και $h'(x) \neq 0$, οπότε από συνέπειες θεωρήματος Bolzanon $h'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $[-1, 0]$. Δηλαδή, $h'(x) > 0\ \forall x \in [-1, 0]$ ή $h'(x) < 0\ \forall x \in [-1, 0]$. Δηλαδή η h είναι γνησίως μονότονη στο $[-1, 0]$, οπότε το x_1 μοναδικό. ■

■

Ερώτημα Δ2.

Έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x)+x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Αφού η f παραγωγίσιμη στο $(-\infty, \frac{\pi}{2})$, τότε παραγωγίσιμη και στο 0. Δηλαδή:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2(g(x)+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}[(g(x)+x)\cdot x] = g(0)\cdot 0 = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\phi x}{x} - \kappa\right). \tag{1}$$

Πιο απλά: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\varepsilon\phi x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x\cdot \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1\cdot 1 = 1.$

Από σχέση (1):

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\phi x}{x} - \kappa\right) = 2\cdot 1 + 1 - \kappa = 3 - \kappa.$$

Αφού τα όρια υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τελικά, πρέπει $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \iff 0 = 3-\kappa \iff \kappa = 3.$

Ερώτημα Δ3.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

ι) $f(x) \geq 0$ **στο** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Είναι $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, με $\kappa = 3$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με:

$$f'(x) = (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Εξετάζω τον αριθμητή: $2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1$.

Αναπτύσσω: $-3\sigma\upsilon\nu^2 x = -2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x$, οπότε:

$$\begin{aligned} 2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 &= 2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (1-\sigma\upsilon\nu x)(1+\sigma\upsilon\nu x) \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x - 1)(1+\sigma\upsilon\nu x) \\ &= (\sigma\upsilon\nu x - 1)[2\sigma\upsilon\nu^2 x - (1+\sigma\upsilon\nu x)] \\ &= (\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1). \end{aligned}$$

Παραγοντοποιώ $2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1$:

$$\begin{aligned} 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1 &= 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x - 1 \\ &= 2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (\sigma\upsilon\nu x - 1) \\ &= (\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1). \end{aligned}$$

Άρα:

$$f'(x) = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \geq 0,$$

διότι:

- $\sigma\upsilon\nu x \leq 1 \iff \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq 0$, αλλά $(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 \geq 0$,
- $2\sigma\upsilon\nu x + 1 > 0$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$ αφού $\sigma\upsilon\nu x > 0$,
- $\sigma\upsilon\nu^2 x > 0$.

Τελικά, $f'(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα η $f \uparrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε για $x \geq 0$:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \implies f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

ιι) Η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μία ρίζα x_2

Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $3f(x) = \pi \iff f(x) = \dfrac{\pi}{3}$ έχει ακριβώς μία ρίζα, έστω x_2.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f:

$$f\left(\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right)\right) \underset{f\uparrow \text{ στο } [0,\frac{\pi}{2})}{\overset{f \text{ συνεχής}}{=\!=\!=}} \left[f(0), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right).$$

$$f(0) = 2\eta\mu 0 + \varepsilon\varphi 0 - 3\cdot 0 = 0 \implies f(0) = 0.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x).$$

Υπολογίζω $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x \cdot \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$. Όμως $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0$ κι $\sigma\upsilon\nu x > 0$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}^-$, άρα από γνωστή ιδιότητα $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty$. Οπότε $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}) = +\infty$.

Από σχέση $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = +\infty$.

Άρα, $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = [0, +\infty)$.

Δηλαδή, $\dfrac{\pi}{3} \in [0, +\infty) \implies$ υπάρχει $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$: $f(x_2) = \dfrac{\pi}{3}$, και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα από Δ3 ι) ερώτημα, το x_2 μοναδικό.

Άρα, η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει μοναδική ρίζα x_2: $3f(x_2) = \pi$, με $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ερώτημα Δ4.

Θα αποδείξουμε ότι:

ι) $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$

1^{ος} τρόπος

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$, ή $x^2(g(x) + x) \geq 0$. Αλλά, $x^2 \geq 0$ $\forall x \in [x_1, 0]$. Πρέπει x^2 και $g(x) + x$ να είναι ομόσημοι.

Η συνάρτηση $h(x) = g(x) + x$ από Δ1 είναι η $h(x) \neq 0$ $\forall x \in (x_1, 0)$ αφού έχει μοναδική ρίζα το x_1. Η h είναι συνεχής στο $(x_1, 0]$ και δεν μηδενίζεται στο $(x_1, 0]$. Από συνέπειες Θεωρήματος Bolzano, η εν λόγω συνάρτηση διατηρεί πρόσημο. Δηλαδή, $h(x) > 0$ $\forall x \in (x_1, 0]$ ή $h(x) < 0$ $\forall x \in (x_1, 0]$.

Όμως $h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0$ αφού $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Οπότε $h(0) = g(0) > 0$, δηλαδή η $h(x) > 0$ στο $(x_1, 0]$, ή $h(x) \geq 0$ $\forall x \in [x_1, 0]$.

Τελικά, $x^2(g(x) + x) \geq 0$ $\forall x \in [x_1, 0]$, ή

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, 0].$$

■

2^{ος} τρόπος

Απόδειξη. Από Δ1 ερώτημα, έχουμε θέσει $h(x) = g(x) + x$ στο $[-1, 0]$. Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Η h είναι παράλληλη στο $(-1, 0)$, από Θ.Μ.Τ. (Δ.Λ.) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 0)$:

$$h'(\xi) = \frac{h(0) - h(-1)}{0 - (-1)} = \frac{h(0) - h(-1)}{1} = g(0) - (g(-1) - 1).$$

Αφού $0 < g(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, κι για $x = 0$: $g(0) > 0$, ομοίως για $x = -1$: $g(-1) < 1 \iff 1 - g(-1) > 0$. Τελικά $h'(\xi) > 0$ και επειδή η h' διατηρεί πρόσημο στο $[-1, 0]$, τότε $h'(x) > 0$ $\forall x \in [-1, 0]$, δηλαδή η $h \uparrow$ στο $[-1, 0]$. Οπότε $-1 \leq x_1 \leq x \leq 0 \overset{h\uparrow}{\Longrightarrow} h(x_1) \leq h(x) \leq h(0)$. Αφού $g(x_1) + x_1 = 0$ (Δ1 ερώτημα) και $h(0) = g(0) > 0$, τότε $0 \leq h(x) \leq g(0) \implies h(x) \geq 0$, δηλαδή $g(x) + x \geq 0$ στο $[x_1, 0]$. Τελικά, $f(x) = x^2(g(x) + x) \geq 0$ $\forall x \in [x_1, 0]$. ■

ιι) Εύρεση του ολοκληρώματος

Είναι $E(\Omega_1) = \displaystyle\int_{x_1}^{0} |f(x)|\, dx$, όμως από ερώτημα Δ4 ι): $f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0]$, οπότε $|f(x)| = f(x)$.

Από ερώτημα Δ3 ιι): $3f(x_2) = \pi \iff f(x_2) = \dfrac{\pi}{3}$ (αριθμός).

Άρα, $E(\Omega) = \displaystyle\int_{x_1}^{\pi/3} |f(x)|\, dx$.

Είναι $E(\Omega_1) = \displaystyle\int_{x_1}^{0} |f(x)|\, dx \underset{f(x)\geq 0 \ [x_1,0]}{\overset{\Delta 4ι}{=\!=}} \int_{x_1}^{0} f(x)\, dx$.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx &= \int_{x_1}^{0} x^2(g(x)+x)\,dx = \int_{x_1}^{0} (x^2 g(x) + x^3)\,dx\\ &= \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3\,dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}\\ &= \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \left(\frac{0}{4} - \frac{x_1^4}{4}\right) = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4}.\end{aligned}$$

Τελικά, $E(\Omega_1) = \displaystyle\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4}.$ (1)

$$E(\Omega_2) = \int_0^{\pi/3} |f(x)|\,dx \overset{\Delta3\iota}{\underset{f(x)\geq 0\ \ [0,\pi/3]}{\equiv}} \int_0^{\pi/3} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/3} (2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - 3x)\,dx.$$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\pi/3} 2\eta\mu x\,dx + \int_0^{\pi/3} \varepsilon\phi x\,dx - \int_0^{\pi/3} 3x\,dx\\ &= 2\int_0^{\pi/3} (\text{-}\sigma\upsilon\nu x)'\,dx + \int_0^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx - 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/3}\\ &= 2\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx - 3\cdot\frac{(\pi/3)^2}{2}\\ &= 2\Big(-\sigma\upsilon\nu\tfrac{\pi}{3} - (-\sigma\upsilon\nu 0)\Big) - [\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\pi/3} - \frac{\pi^2/9}{2}\cdot 3\\ &= 2\Big(-\tfrac{1}{2}+1\Big) - \Big(\ln\sigma\upsilon\nu\tfrac{\pi}{3} - \ln\sigma\upsilon\nu 0\Big) - \frac{\pi^2}{6}\\ &= 2\cdot\tfrac{1}{2} - \Big(\ln\tfrac{1}{2} - 0\Big) - \frac{\pi^2}{6}\\ &= 1 - \ln\tfrac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6}\\ &= 1 - (\ln 1 - \ln 2) - \frac{\pi^2}{6} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, $E(\Omega_2) = 1 + \ln 2 - \dfrac{\pi^2}{6}.$ (2)

Πρέπει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$:

$$\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}. \tag{3}$$

Το ζητούμενο γράφεται:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx &= \int_{x_1}^{0} g'(x)x^3\,dx = \Big[g(x)\cdot x^3\Big]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} g(x)(x^3)'\,dx\\ &= g(0)\cdot 0^3 - g(x_1)\cdot x_1^3 - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx\\ &= -g(x_1)\cdot x_1^3 - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Αφού $g(x_1) + x_1 = 0$ (Δ1 ερώτημα) $\implies g(x_1) = -x_1$:

$$= -(-x_1)x_1^3 - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx. \tag{4}$$

Από (3): $\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$, οπότε $3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = \frac{3x_1^4}{4} + 3 + 3\ln 2 - \frac{\pi^2}{2}$.

Από (4):

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = x_1^4 - \frac{3x_1^4}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.$$

$$\boxed{\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.}$$