

Προτεινόμενη Γραπτή Δοκιμασία

Συναρτήσεις - Μονοτονία - Ακρότατα - Πράξεις - Σύνθεση - 1-1 - Αντίστροφη

Διάρκεια: 3 ώρες

Σάββατο 25 Ιουλίου 2026

ΘΕΜΑ Α**A1. α)** Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;**β)** Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 \in A$, (ολικό) ελάχιστο;**γ)** Θεωρούμε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε λέγεται η συνάρτηση αυτή 1-1;**(10 μονάδες)****A2.** Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας ως «Σωστό» εάν η πρόταση είναι σωστή ή «Λάθος» εάν η πρόταση είναι λανθασμένη, κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:**α)** Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A , τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο A .**β)** Κάθε συνάρτηση 1-1 είναι γνησίως μονότονη.**γ)** Αν η f είναι αντιστρέψιμη, τότε $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f .**δ)** Θεωρούμε την 1-1 συνάρτηση f . Τότε οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = -x$.**ε)** Αν ορίζονται οι συνθέσεις $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε είναι υποχρεωτικά ίσες, δηλαδή, $g \circ f = f \circ g$.**(15 μονάδες)****ΘΕΜΑ Β**Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 2, \quad x \in [-1, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

B1. Να βρείτε τη συνάρτηση σύνθεσης της g με την f και να εξετάσετε εάν αυτή είναι αντιστρέψιμη.**(08 μονάδες)****B2.**i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1} .ii. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και αν υπάρχει, να βρείτε τη θέση του. Ποια τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την διχοτόμο πρώτου-τρίτου τεταρτημορίου;**(10 μονάδες)****B3.** Να λύσετε την ανίσωση: $(f \circ g)(x) < f(x)$.**(07 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \eta\mu x + x - 1, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Γ1. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(08 μονάδες)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Είναι η συνάρτηση f αντιστρέψιμη; Εξηγείστε πλήρως. **(07 μονάδες)**

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu x + x + x^2 = 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{x-1} + x - 2, \quad x \in \mathbb{R},$$

η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το $f^{-1}(0)$. **(04 μονάδες)**

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}(x) = 2$. **(03 μονάδες)**

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(\ln x) < 1$. **(06 μονάδες)**

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση: $f(1 + f^{-1}(x)) = e$. **(06 μονάδες)**

Δ5. Να λυθεί η εξίσωση: $e^{x^2-1} - e^{|x|-1} = |x| - x^2$. **(06 μονάδες)**

Εύχομαι επιτυχία και καλό καλοκαίρι!!!