

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΗ

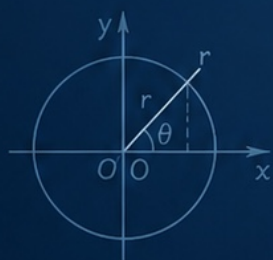
Θέματα Μαθηματικών

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

2026

ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

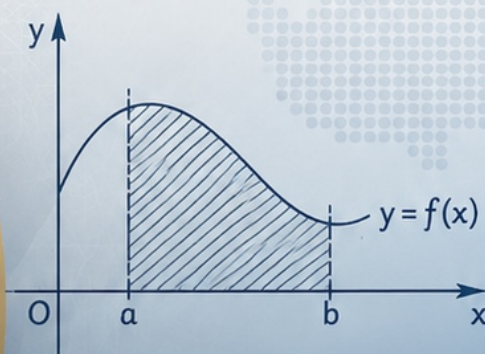
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$



π

Χρήστος Λοΐζος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2026

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (43)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 26 Ιουνίου 2026

8:00 – 11:00

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο
αποτελείται από δύο (2) σελίδες.

Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (12x^3 + 4x^2 - 8x + 3)dx$$

A2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 12x + 7$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία.

A3. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν:

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{8} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{7}{12}$$

(α) Να υπολογίσετε τις πιο κάτω πιθανότητες:

(i) $P(A \cap B)$

(1 μονάδα)

(ii) $P(B - A)$

(1 μονάδα)

(iii) $P(B/A)$

(2 μονάδα)

(β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

(1 μονάδα)

- A4.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 1, x \in \mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. (4 μονάδες)
(β) Αν $\kappa < 0$, να βρείτε το πρόσημο του $f(\kappa)$. (1 μονάδα)

- A5.** Δίνεται η λέξη **ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ**.
(α) Να βρείτε το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. (2 μονάδες)
(β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν με σύμφωνο και περιέχουν τη λέξη **ΚΛΗΡΟΣ**. (3 μονάδες)

- A6.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 + 2\beta x - 5, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και η γραφική της παράσταση παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = -1$.

- A7.** Ένας κύλινδρος και ένας κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι κατά $324\pi \text{ cm}^3$ μεγαλύτερος από τον όγκο του κώνου. Το ύψος του κυλίνδρου είναι 8 cm και το ύψος του κώνου είναι 12 cm .
Να υπολογίσετε:
(α) την ακτίνα της βάσης του κώνου, (2 μονάδες)
(β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου. (3 μονάδες)

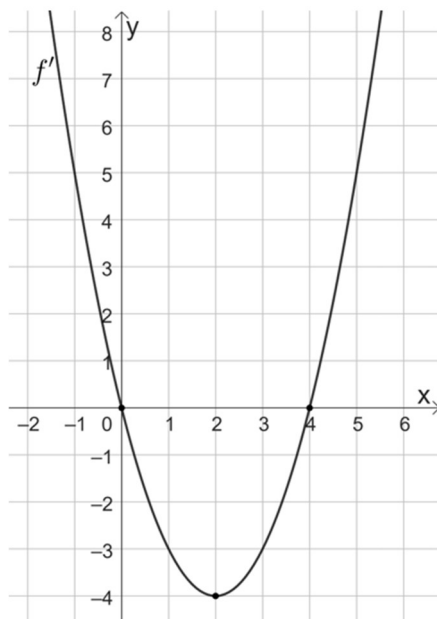
- A8.** Ένας κηπουρός θέλει να περιφράξει ένα χώρο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου στην αυλή του, έτσι ώστε η μία πλευρά του να είναι ο εξωτερικός τοίχος της αποθήκης του σπιτιού του. Θα χρησιμοποιήσει δίκτυ μήκους 120 m για να περιφράξει τις άλλες τρεις πλευρές του. Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν του περιφραγμένου χώρου.

- A9.** Μία εταιρεία κυβερνοασφάλειας στη Λευκωσία σχεδιάζει ένα νέο σύστημα κλειδώματος. Ο κωδικός πρόσβασης για κάθε χρήστη αποτελείται από 6 διαφορετικούς χαρακτήρες, οι οποίοι επιλέγονται από το σύνολο των ψηφίων $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και το σύνολο των γραμμάτων $\{A, B, \Gamma, \Delta, E\}$.

Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί κωδικοί μπορούν να σχηματιστούν, αν ο κωδικός:

- (α) περιέχει 4 ψηφία και 2 γράμματα,
(β) αρχίζει με 3 ψηφία ακολουθούμενα από 3 γράμματα.

A10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου (f') μίας πολυωνυμικής συνάρτησης f .



- (α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. **(1 μονάδα)**
- (β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να τα χαρακτηρίσετε. **(2 μονάδες)**
- (γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα. **(1 μονάδα)**
- (δ) Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\int (g(x) + 6) dx = f(x) + c$$

Να βρείτε την τιμή του $g(2)$.

(1 μονάδα)

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. **(1,5 μονάδες)**
- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:
- (i) τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, **(3 μονάδες)**
 - (ii) την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, **(1,5 μονάδες)**
 - (iii) τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. **(1 μονάδα)**
- (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . **(3 μονάδες)**

B2. Ένα γεωργικό ινστιτούτο στην ελεύθερη περιοχή Αμμοχώστου μελέτησε τη σχέση ανάμεσα στον μέσο αριθμό ωρών καθημερινής ηλιοφάνειας κατά τη διάρκεια του ανοιξιότικου μήνα ανάπτυξης και στην τελική ετήσια σοδειά πατάτας (σε τόνους ανά δεκάριο). Τα δεδομένα από 5 τυχαία επιλεγμένα αγροτεμάχια στα Κοκκινοχώρια καταγράφηκαν στον παρακάτω πίνακα:

Ώρες Ηλιοφάνειας (x)	6	7	9	9	9
Σοδειά σε Τόνους (y)	2	3	4	5	6

- (α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ωρών ηλιοφάνειας ($\bar{x}$) και τη μέση τιμή των τόνων της σοδειάς ($\bar{y}$). **(2 μονάδες)**
- (β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. **(2 μονάδες)**
- (γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των δύο μεταβλητών. **(5 μονάδες)**
- (δ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών. **(1 μονάδα)**

B3. Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

- (α) Να βρείτε πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα πιο πάνω ψηφία, χωρίς επανάληψη ψηφίου. **(2 μονάδες)**
- (β) Παίρνουμε τυχαία έναν από τους πιο πάνω τετραψήφιους αριθμούς.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων ο αριθμός που επιλέξαμε:
- (i) Α: Να είναι περιττός. **(2 μονάδες)**
 - (ii) Β: Να μην περιέχει το ψηφίο 5. **(2 μονάδες)**
 - (iii) Γ: Να είναι άρτιος και να περιέχει το ψηφίο 5. **(4 μονάδες)**

- B4.** Ο πληθυσμός ενός είδους ψαριών σε μια λίμνη δίνεται από τη συνάρτηση $P(t)$, όπου t είναι οι μήνες από την έναρξη μιας περιβαλλοντικής μελέτης διάρκειας 2 χρόνων. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P'(t) = 2000 - 100t, \quad 0 \leq t \leq 24$$

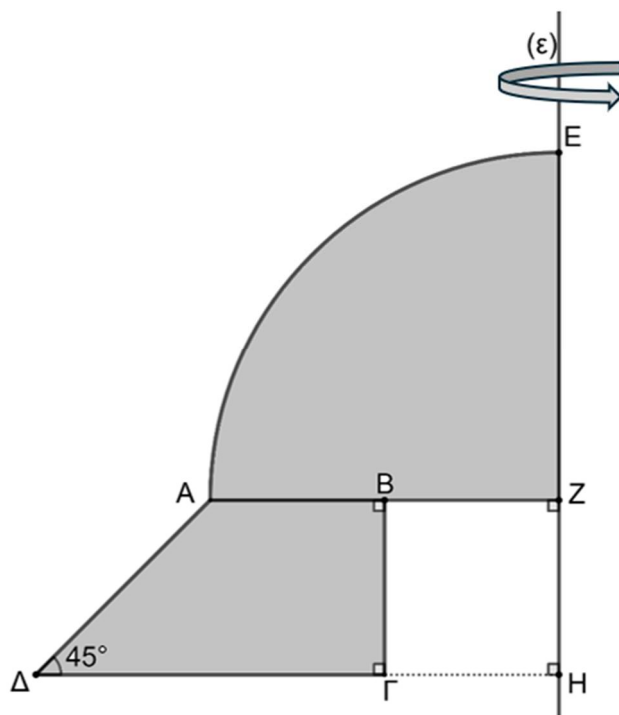
Σε ένα χρόνο, από την έναρξη της μελέτης, ο πληθυσμός των ψαριών στην λίμνη ήταν 31800.

- (α) Να αποδείξετε ότι: $P(t) = 2000t - 50t^2 + 15000$ (4 μονάδες)
 (β) Να υπολογίσετε τον μέγιστο πληθυσμό ψαριών, που είχε η λίμνη κατά τη διάρκεια της μελέτης. (4 μονάδες)
 (γ) Σε πόσους μήνες από την έναρξη της έρευνας ο πληθυσμός στην λίμνη έγινε 30000 ψάρια. (2 μονάδες)

- B5.** Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο. Τα σημεία A, B και Z είναι συνευθειακά. Με κέντρο το Z και ακτίνα ZA , γράφουμε τόξο AE . Δίνεται ότι $AB = BZ = B\Gamma$, $\Delta H = 12 \text{ cm}$, $AZ \perp (\varepsilon)$, $\Delta H \perp (\varepsilon)$ και $\angle A\hat{\Delta}\Gamma = 45^\circ$ (τα σημεία E, Z και H ανήκουν στην ευθεία (ε)). Το σκιασμένο σχήμα $(A\Delta\Gamma BZEA)$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία (ε) .

Να υπολογίσετε συναρτήσει του π :

- (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και (6 μονάδες)
 (β) τον όγκο του στερεού που παράγεται. (4 μονάδες)



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ

1. Στατιστική

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{ή} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2},$$

όπου $n = \sum_{i=1}^k f_i$

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - n\bar{x}\bar{y}}{nS_x S_y}, \quad \text{όπου} \quad \Sigma_{xy} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

2. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B$$

$$\sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha - \beta) + \eta\mu(\alpha + \beta)$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$$

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$t = \varepsilon\varphi\alpha$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

Λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων:

	Σε μοίρες	Σε ακτίνια
$\eta\mu x = \eta\mu\alpha$	$x = 360^\circ\kappa + \alpha \quad \text{ή}$ $x = 360^\circ\kappa + 180^\circ - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa + \alpha \quad \text{ή}$ $x = 2\pi\kappa + \pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\alpha$	$x = 360^\circ\kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi\kappa \pm \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$
$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\alpha$	$x = 180^\circ\kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$	$x = \pi\kappa + \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

3. Γεωμετρία

Ορθό πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική Πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2\pi R \upsilon$	$V = \pi R^2 \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi R \lambda$	$V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho)\lambda$	$V = \frac{\pi \upsilon}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$
Σφαίρα	$E = 4\pi R^2$	$V = \frac{4\pi R^3}{3}$

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Απόσταση του σημείου $A(x_1, y_1)$ από την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $\alpha > \beta$

Εστίες $(\pm \gamma, 0)$, Διευθετούσες $x = \pm \frac{\alpha}{\varepsilon}$, Εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$

5. Παράγωγοι

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x \quad (\sigma \upsilon \nu x)' = -\eta \mu x \quad (\varepsilon \varphi x)' = \tau \varepsilon \mu^2 x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Ολοκληρώματα

$$\int \tau \varepsilon \mu x \, dx = \ln |\tau \varepsilon \mu x + \varepsilon \varphi x| + c \quad \int \sigma \tau \varepsilon \mu x \, dx = \ln \left| \varepsilon \varphi \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \tau \omicron \xi \eta \mu \frac{x}{\alpha} + c \quad \int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha} \tau \omicron \xi \varepsilon \varphi \frac{x}{\alpha} + c$$

7. Απλός Τόκος

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ (Κ.Κ.)

Παγκύπριες Εξετάσεις Πρόσβασης 2026 - Ενδεικτικές Λύσεις

Επιμέλεια: Χρήστος Λοΐζος

26 Ιουνίου 2026

ΜΕΡΟΣ Α'**A1.**

Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (12x^3 + 4x^2 - 8x + 3) dx$$

Λύση

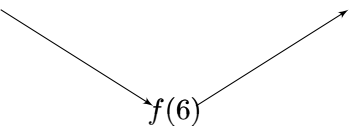
$$\begin{aligned} \int (12x^3 + 4x^2 - 8x + 3) dx &= \int \left(3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3x \right)' dx \\ &= 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A2.Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 12x + 7$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία.**Λύση****α' τρόπος (με παράγωγο)**Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με

$$f'(x) = (x^2 - 12x + 7)' = 2x - 12 = 2(x - 6).$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 6$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 6$

Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 6]$ και γνησίως αύξουσα στο $[6, +\infty)$.

β' τρόπος (με τύπο κορυφής τριωνύμου)

Αφού $\alpha = 1 > 0$, η f (τριώνυμο) παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{(-12)}{2 \cdot 1} = 6.$$

Άρα στο $(-\infty, 6]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[6, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ' τρόπος (με τη μορφή $(x - \rho)^2 + k$ και ορισμό μονοτονίας)

Είναι $f(x) = x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 7 = x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 - 29 = (x - 6)^2 - 29$, $x \in \mathbb{R}$.

- Για $x_1 < x_2 < 6$: $x_1 - 6 < x_2 - 6 < 0 \Rightarrow (x_1 - 6)^2 > (x_2 - 6)^2 \Rightarrow (x_1 - 6)^2 - 29 > (x_2 - 6)^2 - 29 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 6]$.
- Για $6 < x_1 < x_2$: $0 < x_1 - 6 < x_2 - 6 \Rightarrow (x_1 - 6)^2 < (x_2 - 6)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[6, +\infty)$.

A3.

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{3}{8} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{7}{12}.$$

(α) Να υπολογίσετε τις πιο κάτω πιθανότητες:

(i) $P(A \cap B)$

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} - \frac{7}{12} = \frac{8+9-14}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

Τελικά, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

(ii) $P(B - A)$

Είναι $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$. Αφού $A \cap B = B \cap A$, ισχύει $P(A \cap B) = P(B \cap A)$. Συνεπώς,

$$P(B - A) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

(iii) $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}.$$

(β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα αν $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$\text{Είναι } P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8} = P(A \cap B).$$

Άρα τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

A4.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη.

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x = x_0$. Το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, άρα, από το Θεώρημα Fermat ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Όμως

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 7x - 1)' = 3x^2 - 6x + 7,$$

με διακρίνουσα

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 36 - 84 = -48 < 0.$$

Αφού $\Delta < 0$ και ο συντελεστής του x^2 είναι $a = 3 > 0$, το τριώνυμο $f'(x)$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f'(x_0) > 0$ άτοπο.

Άρα, η υπόθεση ότι η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο οδηγεί σε άτοπο, οπότε η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

(β) Αν $\kappa < 0$, να βρείτε το πρόσημο του $f(\kappa)$.

Είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 7 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (από το (α)), και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα, από γνωστό θεώρημα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως, για $\kappa < 0$:

$$\kappa < 0 \xrightarrow{f \text{ γν. αύξουσα}} f(\kappa) < f(0).$$

Είναι $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 - 1 = -1$, οπότε

$$f(\kappa) < -1 < 0 \Rightarrow f(\kappa) < 0.$$

A5.

Δίνεται η λέξη **ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

Η λέξη ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ περιέχει 10 γράμματα: Ο, Λ, Ο, Κ, Λ, Η, Ρ, Ω, Σ, Η.

Αν όλα τα γράμματα ήταν διαφορετικά, θα είχαμε $10!$ αναγραμματισμούς. Όμως η λέξη περιέχει το γράμμα Ο δύο φορές, το Λ δύο φορές και το Η δύο φορές, οπότε δεν έχουμε διαφορετικό αναγραμματισμό για κάθε μια από αυτές τις επαναλήψεις.

Κατά συνέπεια, το πλήθος $10!$ πρέπει να διαιρεθεί με $2! \cdot 2! \cdot 2! = 8$:

$$\frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{10!}{8} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 453600.$$

Άρα προκύπτουν **453 600** αναγραμματισμοί για τη λέξη ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ.

(β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν με σύμφωνο και περιέχουν τη λέξη ΚΛΗΡΟΣ.

Θέλουμε τους αναγραμματισμούς που αρχίζουν με σύμφωνο και περιέχουν (ως συνεχόμενο κομμάτι) τη λέξη ΚΛΗΡΟΣ.

Θεωρούμε τη λέξη «ΚΛΗΡΟΣ» ως ένα σταθερό «τμήμα» (χρησιμοποιεί ένα Κ, ένα Λ, ένα Η, ένα Ρ, ένα Ο, ένα Σ). Τα γράμματα που μας μένουν από τη λέξη ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ, αφού αφαιρεθούν αυτά που «δεσμεύει» το τμήμα ΚΛΗΡΟΣ, είναι: Ο, Λ, Η, Ω.

Άρα, έχουμε συνολικά 5 «στοιχεία» προς διάταξη: το τμήμα ΚΛΗΡΟΣ και τα γράμματα Ο, Λ, Η, Ω. Θέλουμε ο αναγραμματισμός να ξεκινά με σύμφωνο. Από τα 5 στοιχεία, με σύμφωνο ξεκινούν μόνο:

- το τμήμα ΚΛΗΡΟΣ (ξεκινά με Κ), ή
- το μεμονωμένο γράμμα Λ.

(Τα Ο, Η, Ω είναι φωνήεντα.)

- **Αν πρώτο στοιχείο είναι το μπλοκ ΚΛΗΡΟΣ:** τα υπόλοιπα 4 στοιχεία (Ο, Λ, Η, Ω) διατάσσονται στις 4 εναπομένουσες θέσεις με $4! = 24$ τρόπους.
- **Αν πρώτο στοιχείο είναι το γράμμα Λ:** τα υπόλοιπα 4 στοιχεία (μπλοκ ΚΛΗΡΟΣ, Ο, Η, Ω) διατάσσονται στις 4 εναπομένουσες θέσεις με $4! = 24$ τρόπους.

Από τη Βασική Αρχή Απαρίθμησης, οι δυνατοί αναγραμματισμοί είναι:

$$24 + 24 = \boxed{48}.$$

A6.

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 + 2\beta x - 5, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και η γραφική της παράσταση παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = -1$.

Λύση

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = (\alpha x^3 - 3x^2 + 2\beta x - 5)' = 3\alpha x^2 - 6x + 2\beta.$$

Το $x = 2$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη εκεί, οπότε αφού παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, από το Θεώρημα Fermat: $f'(2) = 0$.

$$f'(2) = 3\alpha \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2\beta = 0 \Leftrightarrow 12\alpha - 12 + 2\beta = 0 \Leftrightarrow 6\alpha + \beta = 6. \quad (1)$$

Αφού η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = -1$ και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, ισχύει $f''(-1) = 0$, όπου

$$f''(x) = (3\alpha x^2 - 6x + 2\beta)' = 6\alpha x - 6.$$

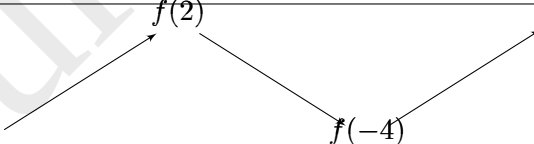
$$f''(-1) = 6\alpha \cdot (-1) - 6 = 0 \Leftrightarrow -6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = -1. \quad (2)$$

Από τις (1) και (2): $6 \cdot (-1) + \beta = 6 \Leftrightarrow \beta = 12$.

Άρα $\boxed{\alpha = -1, \beta = 12}$, οπότε $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x - 5, \quad x \in \mathbb{R}$.

Επαλήθευση (πλήρης μελέτη): Με $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x - 5$:

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 24 = -3(x^2 + 2x - 8) = -3(x - 2)(x + 4).$$

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Πράγματι, στο $x = 2$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $f(2) = -8 - 12 + 48 - 5 = 23$. Ομοίως, εξετάζουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της f , ήτοι, $f''(x) = -6x - 6$.

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x - 6 = 0 \Leftrightarrow -6x = 6 \Leftrightarrow x = -1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -6x - 6 > 0 \Leftrightarrow -6x > 6 \Leftrightarrow x < -1$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow -6x - 6 < 0 \Leftrightarrow -6x < 6 \Leftrightarrow x > -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
κυρτότητα			

Πράγματι, στη θέση $x = -1$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής (σ.κ.), το $f(-1) = 1 - 3 - 24 - 5 = -31$.

A7.

Ένας κύλινδρος και ένας κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι κατά $324\pi \text{ cm}^3$ μεγαλύτερος από τον όγκο του κώνου. Το ύψος του κυλίνδρου είναι 8 cm και το ύψος του κώνου είναι 12 cm .

Λύση**(α) Η ακτίνα της βάσης του κώνου.**

Έστω R η κοινή ακτίνα βάσης κώνου και κυλίνδρου. Είναι

$$V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi R^2 v_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi R^2 \cdot 8, \quad V_{\kappa\omega\nu} = \frac{\pi R^2 v_{\kappa\omega\nu}}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot 12}{3} = 4\pi R^2.$$

Από τα δεδομένα, $V_{\kappa\upsilon\lambda} = 324\pi + V_{\kappa\omega\nu}$:

$$8\pi R^2 = 324\pi + 4\pi R^2 \Leftrightarrow 4\pi R^2 = 324\pi \Leftrightarrow R^2 = 81 \Leftrightarrow R = 9 \text{ cm}.$$

(β) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου.

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας δίνεται από $E_{\kappa} = \pi R\lambda$, όπου λ η γενέτειρα του κώνου.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα (ορθογώνιο τρίγωνο ακτίνας-ύψους-γενέτειρας):

$$\lambda^2 = R^2 + v_{\kappa\omega\nu}^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow \lambda = 15 \text{ cm}.$$

Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$E_{\kappa} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = \boxed{135\pi \text{ cm}^2}.$$

A8.

Ένας κηπουρός θέλει να περιφράξει ένα χώρο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου στην αυλή του, έτσι ώστε η μία πλευρά του να είναι ο εξωτερικός τοίχος της αποθήκης του σπιτιού του. Θα χρησιμοποιήσει δίκτυ μήκους 120 m για να περιφράξει τις άλλες τρεις πλευρές του. Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν του περιφραγμένου χώρου.

Λύση

Έστω $x \text{ m}$ το μήκος της μίας πλευράς (κάθετες στον τοίχο) και y το μήκος της πλευράς παράλληλης στον τοίχο, με $x, y > 0$. Χρησιμοποιούμε προφανώς δίκτυ μόνο στις τρεις πλευρές:

$$2x + y = 120 \Rightarrow y = 120 - 2x.$$

Αφού $y > 0 \Leftrightarrow 120 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 60$. Άρα, $0 < x < 60$.

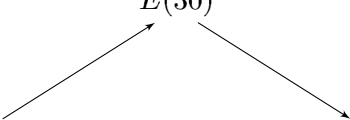
Το εμβαδόν είναι:

$$E(x) = x \cdot y = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2, \quad 0 < x < 60.$$

1ος τρόπος (παράγωγος)

Η E είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, 60)$, με $E'(x) = 120 - 4x$.

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 30$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 30, \quad E'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 30$

x	0	30	60	
$E'(x)$		+	0	−
$E(x)$	$E(30)$ 			

Άρα το $E(x)$ μεγιστοποιείται όταν $x = 30$, με $y = 120 - 60 = 60$.

2ος τρόπος (κορυφή τριωνύμου)

Η $E(x) = 120x - 2x^2$ είναι τριώνυμο με $a = -2 < 0$, άρα παρουσιάζει μέγιστο στη θέση

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{120}{2 \cdot (-2)} = 30.$$

Συμπέρασμα: Οι διαστάσεις για μέγιστο εμβαδόν είναι $x = 30 \text{ m}$, $y = 60 \text{ m}$, με

$$E(30) = 30 \cdot 60 = \boxed{1800 \text{ m}^2}.$$

A9.

Μία εταιρεία κυβερνοασφάλειας στη Λευκωσία σχεδιάζει ένα νέο σύστημα κλειδώματος. Ο κωδικός πρόσβασης για κάθε χρήστη αποτελείται από 6 διαφορετικούς χαρακτήρες, οι οποίοι επιλέγονται από το σύνολο των ψηφίων $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και το σύνολο των γραμμάτων $\{A, B, \Gamma, \Delta, E\}$.

Λύση

(α) Ο κωδικός περιέχει 4 ψηφία και 2 γράμματα.

Η επιλογή (χωρίς σειρά) 4 ψηφίων από τα 7 γίνεται με τους συνδυασμούς των 7 ανά 4, δηλαδή:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35 \text{ τρόπους.}$$

Η επιλογή 2 γραμμάτων από τα 5 γίνεται με συνδυασμούς των 5 ανά 2:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ τρόπους.}$$

Οι 6 επιλεγμένοι χαρακτήρες διατάσσονται μεταξύ τους με $6! = 720$ τρόπους.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή, οι διαφορετικοί κωδικοί είναι:

$$35 \cdot 10 \cdot 720 = \boxed{252\,000}.$$

(β) Ο κωδικός αρχίζει με 3 ψηφία ακολουθούμενα από 3 γράμματα.

Οι θέσεις των 3 (διαφορετικών) ψηφίων γεμίζουν με διατάξεις των 7 ανά 3:

$$\Delta_3^7 = \frac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210 \text{ τρόπους.}$$

Οι θέσεις των 3 (διαφορετικών) γραμμάτων γεμίζουν με διατάξεις των 5 ανά 3:

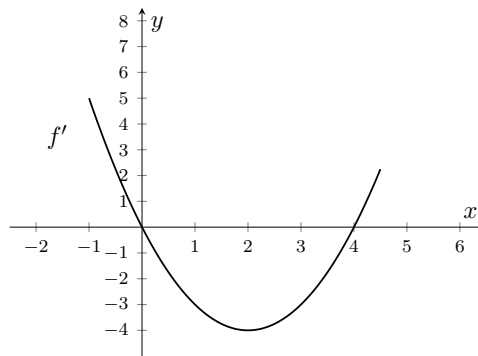
$$\Delta_3^5 = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ τρόπους.}$$

Από την πολλαπλασιαστική αρχή:

$$210 \cdot 60 = \boxed{12\,600 \text{ κωδικοί}}.$$

A10.

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου (f') μίας πολυωνυμικής συνάρτησης f .

**Λύση****(α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η f είναι γνησίως φθίνουσα;**

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική. Από το γράφημα:

- Για $x \in (-\infty, 0)$: $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Για $x \in (0, 4)$: $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 4]$.
- Για $x \in (4, +\infty)$: $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[4, +\infty)$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\boxed{[0, 4]}$.

(β) Τοπικά ακρότατα.

Από το γράφημα, $f'(0) = 0$ και $f'(4) = 0$. Από το (α), η f είναι γνησίως αύξουσα πριν το 0 και γνησίως φθίνουσα μετά, άρα στη θέση $x = 0$ παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** το $f(0)$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα πριν το 4 και γνησίως αύξουσα μετά, άρα στη θέση $x = 4$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** το $f(4)$.

(γ) Κυρτότητα.

Από το γράφημα, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2)$ και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ (ελάχιστο της f' στο $x = 2$). Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$.

(δ) Εύρεση $g(2)$.

Έστω η πολυωνυμική $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\int (g(x) + 6) dx = f(x) + c$. Παραγωγίζοντας τη δοθείσα σχέση:

$$g(x) + 6 = f'(x) \Leftrightarrow g(x) = f'(x) - 6.$$

Από το γράφημα, $f'(2) = -4$ (ελάχιστο της παραβολής f'), οπότε

$$g(2) = f'(2) - 6 = -4 - 6 = \boxed{-10}.$$

ΜΕΡΟΣ Β'**B1.**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$$

Λύση

(α) Πεδίο ορισμού και σημεία τομής με τους άξονες.

Είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Τομή με τον x' : Θέτουμε $y = 0$:

$$\begin{aligned} -x^3 + 6x^2 - 9x = 0 &\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow x(x - 3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 3. \end{aligned}$$

Σημεία τομής με τον x' : $O(0, 0)$ και $A(3, 0)$.

Τομή με τον y' : $f(0) = 0$, άρα κοινό σημείο το $O(0, 0)$.

(β)(i) Μονοτονία και τοπικά ακρότατα.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3).$$

Η εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$ έχει $\Delta = 16 - 12 = 4$, ρίζες $x = 1$ και $x = 3$.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		−	0	+	0	−
$f(x)$						

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$, γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$.

Τοπικό ελάχιστο στο $x = 1$: $f(1) = -1 + 6 - 9 = -4$, σημείο $K(1, -4)$.

Τοπικό μέγιστο στο $x = 3$: $f(3) = -27 + 54 - 27 = 0$, σημείο $\Lambda(3, 0)$.

(β)(ii) Κυρτότητα και σημεία καμπής.

$$f''(x) = (-3x^2 + 12x - 9)' = -6x + 12 = 6(2 - x).$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−
κυρτότητα	↪		↩

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 2]$ και κοίλη στο $[2, +\infty)$.

Σημείο καμπής στο $x = 2$: $f(2) = -8 + 24 - 18 = -2$, δηλαδή $M(2, -2)$.

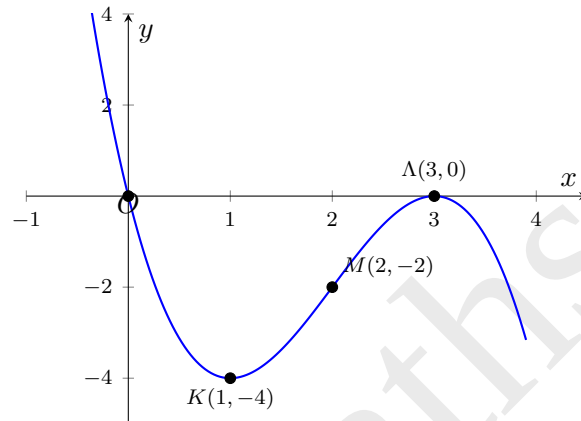
(β)(iii) Συμπεριφορά στα άκρα.

Βρίσκουμε τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$$

(γ) Γραφική παράσταση.



B2.

Ένα γεωργικό ινστιτούτο στην ελεύθερη περιοχή Αμμοχώστου μελέτησε τη σχέση ανάμεσα στον μέσο αριθμό ωρών καθημερινής ηλιοφάνειας κατά τη διάρκεια του ανοιξιάτικου μήνα ανάπτυξης και στην τελική ετήσια σοδειά πατάτας (σε τόνους ανά δεκάριο). Τα δεδομένα από 5 τυχαία επιλεγμένα αγροτεμάχια στα Κοκκινοχώρια καταγράφηκαν στον παρακάτω πίνακα:

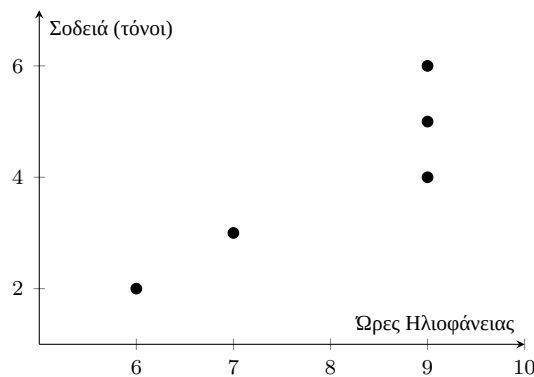
Ώρες Ηλιοφάνειας (x)	6	7	9	9	9
Σοδειά σε Τόνους (y)	2	3	4	5	6

Λύση

(α) Μέσες τιμές.

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} (6 + 7 + 9 + 9 + 9) = \frac{40}{5} = 8$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{1}{5} (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{20}{5} = 4$$

(β) Διάγραμμα διασποράς.**(γ) Συντελεστής συσχέτισης r .**

x	y	$x \cdot y$
6	2	12
7	3	21
9	4	36
9	5	45
9	6	54

Χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$r = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{n S_x S_y}. \quad (1)$$

Υπολογίζουμε τα S_x, S_y :

$$S_x^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} [(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2] = \frac{1}{5} (4 + 1 + 3) = \frac{8}{5} \Rightarrow S_x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$S_y^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{5} [(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2] = \frac{1}{5} (4 + 1 + 1 + 4) = 2 \Rightarrow S_y = \sqrt{2}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1):

$$r = \frac{(12 + 21 + 36 + 45 + 54) - 5 \cdot 8 \cdot 4}{5 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{168 - 160}{4\sqrt{5}} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89.$$

(δ) Είδος συσχέτισης.

Αφού $r \approx 0,89$, τιμή κοντά στο 1, υπάρχει **ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση** μεταξύ των μεταβλητών X και Y .

B3.

Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Λύση

(α) Τετραψήφιοι αριθμοί χωρίς επανάληψη ψηφίου.

- 1ο ψηφίο: 6 επιλογές (εκτός του 0)
- 2ο ψηφίο: 6 επιλογές (μένουν 6, αφού αφαιρέθηκε ένα, αλλά επιτρέπεται πλέον το 0)

- 3ο ψηφίο: 5 επιλογές
- 4ο ψηφίο: 4 επιλογές

Άρα, σύμφωνα με την αρχή της απαρίθμησης μπορούν να σχηματιστούν:

$$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{720} \text{ διαφορετικοί τετραψήφιοι αριθμοί.}$$

(β)(i) $P(A)$, όπου A : ο αριθμός είναι περιττός.

Εάν A το ενδεχόμενο ο τυχαία επιλεγμένος τετραψήφιος αριθμός να είναι περιττός. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει το τελευταίο ψηφίο να είναι περιττό, δηλαδή ένας εκ των αριθμών : 1, 3 ή 5 (3 επιλογές). Ο αριθμός θα είναι της μορφής ΧΕΔΜ (Χιλιάδες, Εκατοντάδες, Δεκάδες, Μονάδες) Ξεκινάμε τη διερεύνηση:

- Μονάδες: 3 επιλογές (περιττό ψηφίο)
- Χιλιάδες: 5 επιλογές (εκτός 0 και εκτός του ψηφίου των μονάδων)
- Εκατοντάδες: 5 επιλογές
- Δεκάδες: 4 επιλογές

$$N(A) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 300 \Rightarrow P(A) = \frac{300}{720} = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

(β)(ii) $P(B)$, όπου B : ο αριθμός δεν περιέχει το ψηφίο 5.

Έστω B το ενδεχόμενο ο αριθμός να μην περιέχει το ψηφίο 5. Για τον τετραψήφιο αυτόν έχουμε:

Τα διαθέσιμα ψηφία: $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$ (6 ψηφία).

Ξεκινάμε την διερεύνηση:

- 1ο ψηφίο: 5 επιλογές (εκτός 0)
- 2ο ψηφίο: 5 επιλογές
- 3ο ψηφίο: 4 επιλογές
- 4ο ψηφίο: 3 επιλογές

$$N(B) = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300, P(B) = \frac{300}{720} = \boxed{\frac{5}{12}}.$$

(β)(iii) $P(\Gamma)$, όπου Γ : ο αριθμός είναι άρτιος και περιέχει το 5.

Έστω Γ το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος και να περιέχει το 5.

Για να είναι άρτιος ο ζητούμενος θα πρέπει να λήγει σε 0, 2, 4 και 6.

Πρώτα βρίσκουμε το πλήθος των άρτιων αριθμών: $N(\text{άρτιοι}) = N(\Omega) - N(A) = 720 - 300 = 420$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε τους άρτιους χωρίς το ψηφίο 5:

- **Αν λήγει σε 0:** μονάδες 1 επιλογή, χιλιάδες 5, εκατοντάδες 4, δεκάδες 3: $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- **Αν λήγει σε 2, 4 ή 6:** μονάδες 3 επιλογές, χιλιάδες 4 (εκτός 0 και εκτός ψηφίου μονάδων), εκατοντάδες 4, δεκάδες 3: $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 144$.

Άρτιοι χωρίς το 5, είναι σύμφωνα με την προσθετική αρχή: $60 + 144 = 204$.

$$N(\Gamma) = N(\text{άρτιοι}) - N(\text{άρτιοι χωρίς 5}) = 420 - 204 = 216$$

$$P(\Gamma) = \frac{216}{720} = \boxed{\frac{3}{10}}.$$

B4.

Ο πληθυσμός ενός είδους ψαριών σε μια λίμνη δίνεται από τη συνάρτηση $P(t)$, όπου t είναι οι μήνες από την έναρξη μιας περιβαλλοντικής μελέτης διάρκειας 2 χρόνων. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P'(t) = 2000 - 100t, \quad 0 \leq t \leq 24$$

Σε ένα χρόνο, από την έναρξη της μελέτης, ο πληθυσμός των ψαριών στην λίμνη ήταν 31800.

Λύση

(α) Να αποδείξετε ότι $P(t) = 2000t - 50t^2 + 15000$.

Είναι $P'(t) = (2000t - 50t^2)'$, άρα, από συνέπειες θεωρήματος Μέσης Τιμής έχουμε:

$$P(t) = 2000t - 50t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Όμως, $P(12) = 31800$ οπότε θα έχουμε:

$$2000 \cdot 12 - 50 \cdot 12^2 + c = 31800 \Leftrightarrow 24000 - 7200 + c = 31800 \Leftrightarrow 16800 + c = 31800 \Leftrightarrow c = 15000.$$

Άρα $P(t) = 2000t - 50t^2 + 15000$, $0 \leq t \leq 24$.

(β) Μέγιστος πληθυσμός.

Από ερώτημα (α) έχουμε δεδομένο την παράγωγο της συνάρτησης P , κατά συνέπεια:

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow 2000 - 100t = 0 \Leftrightarrow t = 20.$$

$P'(t) > 0$ για $t < 20$, $P'(t) < 0$ για $t > 20$.

t	0	20	24	
$P'(t)$		+	0	-
$P(t)$			$P(20)$	

$$P(20) = 2000 \cdot 20 - 50 \cdot 20^2 + 15000 = 40000 - 20000 + 15000 = \boxed{35\,000 \text{ ψάρια}}.$$

(γ) Πότε ο πληθυσμός έγινε 30000 ψάρια;

Θα πρέπει: $P(t) = 30000$ για $0 \leq t \leq 24$:

$$2000t - 50t^2 + 15000 = 30000 \Leftrightarrow -50t^2 + 2000t - 15000 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 300 = 0.$$

$$\Delta = (-40)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 300 = 1600 - 1200 = 400 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{40 \pm 20}{2} \Rightarrow t_1 = 10, \quad t_2 = 30.$$

Η λύση $t_2 = 30$ απορρίπτεται αφού $t \in [0, 24]$. Άρα $t = 10$.

Ο πληθυσμός έγινε 30 000 ψάρια **10 μήνες** μετά την έναρξη της έρευνας.

B5.

Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο. Τα σημεία A, B και Z είναι συνευθειακά. Με κέντρο το Z και ακτίνα ZA , γράφουμε τόξο AE . Δίνεται ότι $AB = BZ = B\Gamma$, $\Delta H = 12 \text{ cm}$, $AZ \perp (\varepsilon)$, $\Delta H \perp (\varepsilon)$ και $\hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 45^\circ$ (τα σημεία E, Z και H ανήκουν στην ευθεία (ε)). Το σκιασμένο σχήμα ($A\Delta\Gamma BZEA$) περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία (ε) .

Λύση

Φέρνουμε $\Delta K \perp AZ$ (κάθετη). Στο τρίγωνο $A\Delta K$: $\hat{\Delta} = 45^\circ$, $\hat{A}\hat{K}\hat{\Delta} = 90^\circ$, άρα $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{K} = 45^\circ$. Συνεπώς το $A\Delta K$ είναι ισοσκελές ορθογώνιο, με $\Delta K = AK$.

Το $AB\Gamma K$ είναι τετράγωνο, αφού $AB = B\Gamma$ (δεδομένο) και $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{\Gamma}\hat{K} = \hat{\Gamma}\hat{K}\hat{A} = 90^\circ$. Άρα $AB = B\Gamma = \Gamma K = AK$.

Είναι $\Delta H = \Delta K + K\Gamma + \Gamma H = 12$, δηλαδή $3\Delta K = 12 \Rightarrow \Delta K = 4 \text{ cm}$. Άρα $\Delta K = K\Gamma = \Gamma H = 4 \text{ cm}$.

Επίσης $AZ = AB + BZ = 2AB = 2 \cdot 4 = 8 \text{ cm}$.

(α) Εμβαδόν ολικής επιφάνειας.

Ημισφαίριο (περιστροφή τόξου AE γύρω από (ε)):

$$E_1 = \frac{4\pi \cdot AZ^2}{2} = 2\pi \cdot AZ^2 = 2\pi \cdot 8^2 = 128\pi \text{ cm}^2.$$

Παράπλευρη επιφάνεια κώλου (περιστροφή του $A\Delta$):

Με Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta K$ ($AK = \Delta K = 4$):

$$A\Delta^2 = AK^2 + \Delta K^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow A\Delta = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

$$E_2 = \pi \cdot A\Delta \cdot (AZ + \Delta H) = \pi \cdot 4\sqrt{2} \cdot (8 + 12) = 80\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2.$$

Κυκλικός δακτύλιος (βάση από την περιστροφή του $\Delta\Gamma$):

$$E_3 = \pi(\Delta H^2 - \Gamma H^2) = \pi(144 - 16) = 128\pi \text{ cm}^2.$$

Παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου (περιστροφή του $B\Gamma$):

$$E_4 = 2\pi \cdot \Gamma H \cdot ZH = 2\pi \cdot 4 \cdot 4 = 32\pi \text{ cm}^2.$$

Κύκλος βάσης κυλίνδρου (περιστροφή του BZ):

$$E_5 = \pi \cdot BZ^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2.$$

Συνολικό εμβαδόν:

$$E_{\text{ολ}} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = 128\pi + 80\pi\sqrt{2} + 128\pi + 32\pi + 16\pi$$

$$E_{\text{ολ}} = 304\pi + 80\pi\sqrt{2} = \boxed{(304 + 80\sqrt{2})\pi \text{ cm}^2}.$$

(β) Όγκος στερεού.

Ημισφαίριο:

$$V_1 = \frac{V_{\sigma\varphi}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot AZ^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 8^3}{6} = \frac{2\pi \cdot 512}{3} = \frac{1024\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Κώλυρος κώνος (περιστροφή του $ZA\Delta H$), με $R = \Delta H = 12$, $\rho = AZ = 8$, ύψος $ZH = B\Gamma = 4$:

$$V_2 = \frac{\pi \cdot ZH}{3} (\Delta H^2 + AZ \cdot \Delta H + AZ^2) = \frac{4\pi}{3} (144 + 96 + 64) = \frac{4\pi}{3} \cdot 304 = \frac{1216\pi}{3} \text{ cm}^3.$$

Αφαιρούμε τον κύλινδρο (ακτίνας $BZ = 4$, ύψους $ZH = 4$):

$$V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi \cdot BZ^2 \cdot ZH = \pi \cdot 16 \cdot 4 = 64\pi \text{ cm}^3.$$

Συνολικός όγκος:

$$V = V_1 + V_2 - V_{\kappa\upsilon\lambda} = \frac{1024\pi}{3} + \frac{1216\pi}{3} - 64\pi = \frac{2240\pi}{3} - 64\pi = \frac{(2240 - 192)\pi}{3}$$

$$V = \boxed{\frac{2048\pi}{3} \text{ cm}^3}.$$