

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:.....

ΒΑΘΜΟΣ:

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει : $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Μονάδες 5

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

γ) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , και είναι πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

δ) Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

στ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ζ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

η) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, v \in \mathbb{N}$

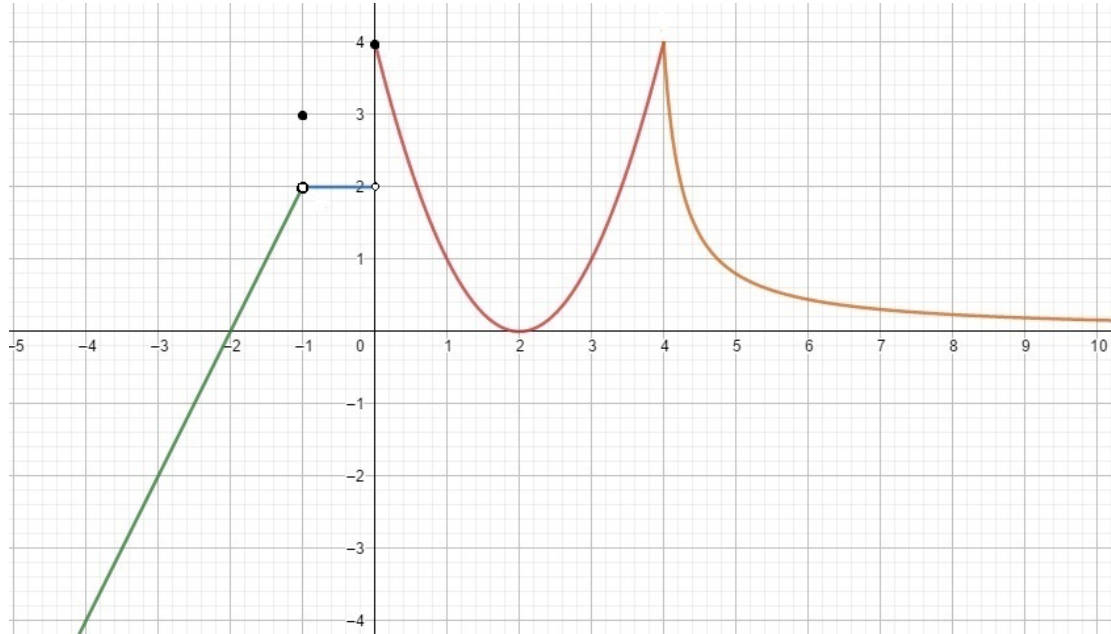
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

θ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}, \quad v \in \mathbb{N}^*$

ι) Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$

Μονάδες 20

ΘΕΜΑ Β



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας:

i) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{f(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)-4}$

Μονάδες 6

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

B3. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu 5f(x)}{5f(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sigma\upsilon\nu(3f(x))-1}{f(x)}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(e)-f(\pi)}{f(x)}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases} \text{ και } g(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \quad x > 1$$

Γ1. Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και να το υπολογίσετε (μονάδες 2)

αλλά δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Μονάδες 10

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) - f(x)\sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} \leq h(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x} \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

Μονάδες 4

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 3$ και
- $f(x) < \ln(2^x + 1) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{\sqrt{x+2}-2} \text{ (μονάδες 4) και } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{\eta\mu(x-2)} \text{ (μονάδες 4)}$$

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + \eta\mu f(x)}{f(x) - \sigma\upsilon\nu f(x)}$.

Μονάδες 7